VISIT…

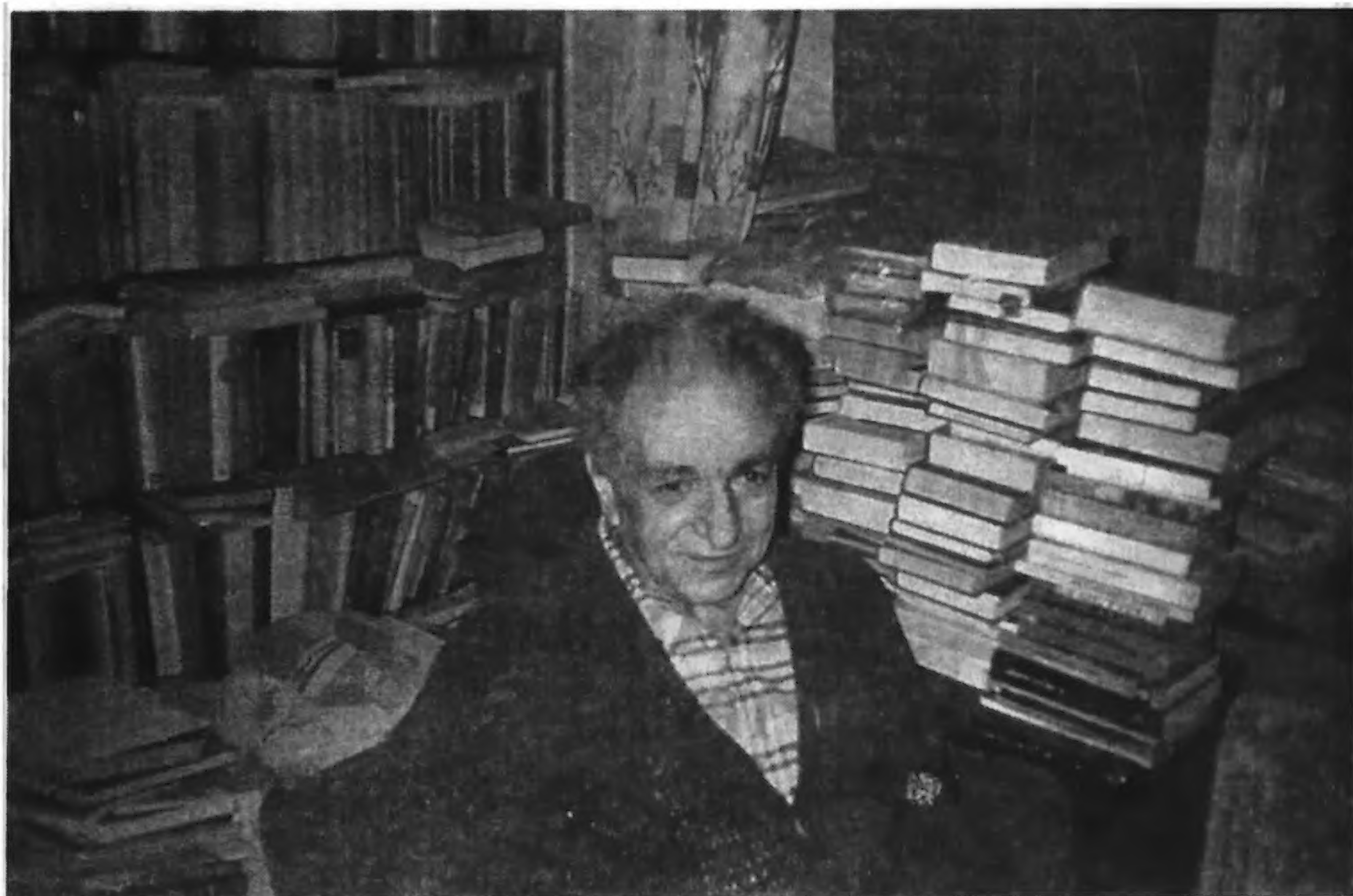
LANZAROTE
Caliente.COM

КЛАССИКИ
наука

Я.А.СМОРОДИНСКИЙ



ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ



Я. А. Смородинский
(1917–1992)

КЛАССИКИ
науки

Я.А.СМОРОДИНСКИЙ



ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Под редакцией
Ю.А.Данилова, В.Г.Кадышевского, А.Н.Сисакяна

Издание второе, стереотипное



УРСС
МОСКВА

ББК 22.3я44

Составители:
П. Винтерниц, Ю. А. Данилов, В. Г. Кадышевский, В. Н. Ораевский, Г. С. Погосян, Р. М. Рындин, А. Н. Сисакян, Ю. Ф. Смирнов, Н. Я. Смородинская, В. Д. Эфрос

Смородинский Яков Абрамович
Избранные труды / Под ред. Ю. А. Данилова, В. Г. Кадышевского, А. Н. Сисакяна. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Эдиториал УРСС, 2006. — 568 с. (Классики науки.)

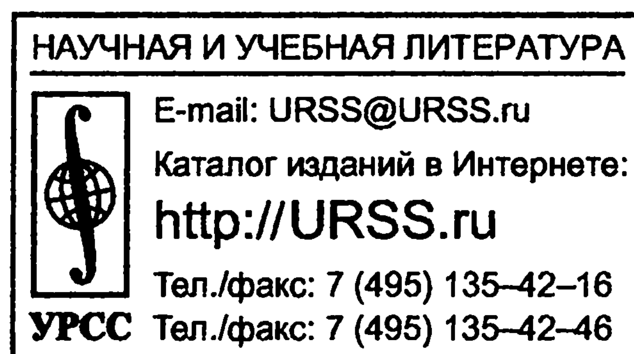
Настоящее издание представляет собой посмертное собрание избранных трудов профессора Якова Абрамовича Смородинского, охватывающих бóльшую часть разделов теоретической физики, от физики элементарных частиц и теории ядра до космологии и математической физики. В последнюю главу включены воспоминания друзей и соратников.

Издательство «Эдиториал УРСС» 113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11
Формат 70×100/16. Печ. л 35,5. Зак. № 198

Отпечатано в ГУП «Облиздат» 248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5.

10-значный ISBN, применяемый до 2007 г.:
ISBN 5–8360–0537–0
Соотв. 13-значный ISBN, вводимый с 2007 г.:
ISBN 978–5–8360–0537–5

© Эдиториал УРСС, 2001, 2006





Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, если на то нет письменного разрешения Издательства.

Предисловие

В современной науке, будь то физика или биология, лингвистика или математика, с ее дифференциацией и специализацией, тип ученого-энциклопедиста, владеющего наукой во всем ее объеме, понимающего ее связи с другими областями знаний, способного квалифицированно судить о ее перспективах и роли в культурном развитии человечества, встречается редко. Физик-теоретик Яков Абрамович Смородинский (30 декабря 1917 года – 16 октября 1992 года) был одним из таких ученых-энциклопедистов. Он великолепно ориентировался в огромном здании современной физической науки, остро реагировал на происходящие в ней изменения, проницательно оценивал новые результаты и сам принимал активное участие в формировании современного точного естествознания.

Кем был профессор Смородинский для тех, кому выпало счастье непосредственно работать с ним, иметь с ним научные или личные контакты, кто имеет право считать себя его учеником, сотрудником, коллегой? Ответить на эти вопросы не так просто.

Прежде всего Яков Абрамович принадлежал к той редкой породе людей, которые с возрастом продолжают по-детски удивляться всему новому, что преподносит им окружающий мир. Такие люди очень склонны задавать «глупые вопросы», которые на поверку оказываются чрезвычайно глубокими.

Яков Абрамович обладал редким даром безошибочно оценивать новизну и значимость полученного результата задолго до его официального признания. В выступлениях на семинарах, конференциях или просто в дружеской беседе он испытывал острую потребность делиться с коллегами информацией, виртуозно извлекаемой из различных источников, порой отрывочных, далеко не полных. Он любил и умел учить физике других и делал это самоотверженно и страстно. Многие теоретики в широком или в узком, в прямом или в переносном смысле могут считать и считают себя его учениками.

На протяжении многих лет «по третьим пятницам» каждого месяца в актовом зале Института атомной энергии им. И. В. Курчатова проходили семинары под руководством Якова Абрамовича Смородинского, на которых присутствующим предоставлялась редкая возможность познакомиться с последними достижениями физики не в пересказе, а из уст участников событий, «специалистов класса А» по определению Якова Абрамовича.

Свою науку — физику — Яков Абрамович любил по-юношески искренне и пылко. В его присутствии «температура» любого научного собрания, будь то небольшой семинар или международная конференция, немедленно повышалась, доходя порой до точки кипения. Всю жизнь он стремился познавать новое и старался тут же осмыслить взаимосвязи нового с тем, что знал раньше, как бы дополняя свою картину, свое видение мира.

Он знал и любил историю физики, но не как специалист и заведомо не как любитель, а по-своему, «как Смородинский», живо реагируя на факты, позволяющие лучше понять современную науку. Он был членом редакционной коллегии многотомного издания «Классики науки» и ответственным редактором четырехтомного собрания научных трудов Альберта Эйнштейна, двухтомника Вольфганга Паули, работал над подготовкой издания трудов Вернера Гейзенберга.

Сборник, предлагаемый вниманию читателей, включает в себя как избранные работы Я. А. Смородинского, так и воспоминания о нем. Он заведомо не полон, ибо сфера научных интересов Якова Абрамовича была чрезвычайно обширна. Мы глубоко признательны всем, кто принял участие в работе над сборником. Свою особую благодарность мы бы хотели выразить Валентине Александровне, вдове Якова Абрамовича, и его дочери Ноэми Яковлевне. Их работа, помощь и участие в подготовке этого сборника были поистине неоценимы.

Ю. А. Данилов
В. Г. Кадышевский
А. Н. Сисакян

Начало пути

Введение

Ю. А. Данилов

Первая печатная работа — волнующее событие в жизни каждого автора. Ретроспективно в нем, как в зародыше, пытаются найти отличительные черты его будущих научных свершений, угадать особенности индивидуальной, только ему присущей манеры, нередко выдавая желаемое за действительное и проецируя на несовершенное творение то, что было выработано автором лишь впоследствии и выношено на тернистом пути исследователя, упорно игнорируя незрелость, иногда даже инфантильность мысли, несовершенство математического аппарата и другие изъяны, свойственные научной молодости.

О первой научной публикации Я. А. Смородинского, посвященной комптон-эффекту на мезоне и напечатанной в десятом номере ЖЭТФ за 1940 год, этого никак не скажешь. У Я. А. как бы не было научной молодости: в первой же работе он заявил о себе как о зрелом мастере, как о теоретике, обладающем физическим мышлением, как о специалисте, которому есть что сказать своим придирчивым и скептически настроенным коллегам и который умеет донести до них свою мысль ясно и просто.

Работы, включенные в этот раздел избранных трудов Я. А., ознаменовали начало пути мастера, каким несомненно был Смородинский. Они отобраны исключительно по хронологическому принципу, без единого изъяна и пропуска. Среди них не было слабых и неинтересных.

Все работы за исключением двустраничной заметки в ДАН 1948 года опубликованы в ЖЭТФ — уже тогда самом авторитетном физическом журнале нашей страны, и одно это обстоятельство косвенно подтверждает их значимость и зрелость. Две работы (О рассеянии света мезотронами, ЖЭТФ, 1941, 11, 35–37 и Рассеяние протонов протонами, ЖЭТФ, 1944, 14, 97–106) опубликованы Я. А. в соавторстве с Л. Д. Ландау, одна (О волновых уравнениях частиц с переменным спином, ЖЭТФ, 1942, 13, 247–250) — в соавторстве с В. Л. Гинзбургом.

Те, кому посчастливилось работать в непосредственном общении с Я. А., возможно, заметят в его первых публикациях интонации, столь знакомые по беседам и семинарам. Я. А. был увлечен физикой, именно она при необычайной широте его интересов была его главной страстью, и это явственно ощущается даже сквозь аскетическую форму, принятую в современных научных публикациях.

Комптон-эффект на мезоне

Я. А. Смородинский

1. Как известно [1], уравнения для частиц со спином 1, в присутствии электромагнитного поля, имеют вид:

$$Y_{ik} = \pi_i U_k - \pi_k U_i, \tag{1.1}$$

$$\pi_k Y_{ik} = -\varkappa^2 U_i, \tag{1.2}$$

где U_i и Y_{ik} — четырехмерные вектор и антисимметричный тензор — волновые функции частицы, π_i — четырехмерный оператор:

$$\pi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{ie}{\hbar c} A_i \tag{1.3}$$

и

$$\varkappa = \frac{\mu c}{\hbar}, \tag{1.4}$$

где μ — масса мезона, A_i — вектор-потенциал электромагнитного поля, который мы выберем так, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Исключая из уравнений (1.1) и (1.2) вторые производные антисимметричного тензора, получим уравнение второго порядка для вектора U_i:

$$\left(-\pi_k \pi_k + \varkappa^2\right) U_i + \frac{1}{2} \frac{ie}{\hbar c} \frac{1}{\varkappa^2} \pi_i F_{kl} Y_{kl} - \frac{ie}{\hbar c} F_{ki} U_k = 0. \tag{1.5}$$

В отсутствие электромагнитного поля это уравнение обращается в уравнение

$$\left(-\Box + \varkappa^2\right) U_i = 0. \tag{1.6}$$

Обозначим плоскую волну — решение уравнения (1.6) через v_i:

$$v_i = B_i e^{ik_i r_i} = B e^{i(kr - \omega t)}, \tag{1.7}$$

где B_i — некоторый постоянный четырехмерный вектор. Как известно, v_i удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{1.8}$$

При наличии электромагнитного поля условие (1.8) не выполняется, а заменяется условием:

$$\pi_k U_k = \frac{1}{2} \frac{ie}{\hbar c} \frac{1}{\varkappa^2} F_{kl} Y_{kl}. \tag{1.9}$$

В дальнейшем мы будем различать три различных поляризации мезона. Для этого удобнее будет перейти к трехмерным обозначениям

$$v_i = (\mathbf{v}, \varepsilon v_0), \tag{1.10}$$

где $\varepsilon^2 = -1$ [1)].

[1)] Удобнее не пользоваться обычной мнимой единицей, чтобы избежать путаницы при переходе к сопряженным уравнениям.

Вектор $\mathbf{v}$ разобьем на две части:

$$\mathbf{v} = \mathbf{l} + \mathbf{t} \tag{1.11}$$

так, что

$$\operatorname{div} \mathbf{t} = 0, \tag{1.12}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{l} = 0, \tag{1.13}$$

и вместо вектора $\mathbf{l}$ и скаляра U_0 введем вектор

$$\psi = \operatorname{grad} U_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t}. \tag{1.14}$$

С помощью уравнения (1.6) и условия (1.8) легко показать, что:

$$v_0 = \frac{1}{\varkappa^2} \operatorname{div} \psi, \tag{1.15}$$

$$\mathbf{l} = -\frac{1}{c\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{1.16}$$

Тензор в трехмерных обозначениях распадается на два вектора по схеме:

$$(Y_{ik}) = \begin{pmatrix} G & \frac{1}{\varepsilon}F \\ \varepsilon F & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

где

$$\mathbf{G} = \operatorname{rot} \mathbf{t}, \tag{1.18}$$

$$\mathbf{F} = -\psi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t}. \tag{1.19}$$

Четырехмерный вектор плотности тока имеет вид:

$$j_i = -ie\hbar c\left(\overline{U}_k Y_{ik} - U_k \overline{Y}_{ik}\right). \tag{1.20}$$

Из условия нормировки волновой функции:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int j_4\, dv = 1, \tag{1.21}$$

где j_4 — четвертая компонента (1.20) в отсутствие электромагнитного поля, находим коэффициенты B_i в формуле (1.7); после этого находим трехмерные волновые функции свободного мезона:

$$\mathbf{t} = \alpha\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{1.22}$$

$$\psi = \mathbf{k}\frac{\varkappa}{k}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{1.23}$$

α — вектор, перпендикулярный вектору $\mathbf{k}$.

Перейдем теперь к решению уравнения (1.5). Пусть $\mathbf{A}$ есть плоская волна вида

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- = \mathbf{A}_0\left(e^{i(\mathbf{Kr}-cKt)} + \text{компл. сопряж.}\right); \tag{1.24}$$

тензор электромагнитного поля:

$$F_{ik} = F_{ik}^+ - F_{ik}^- = F_0\left(e^{i(\mathbf{Kr}-cKt)} + \text{компл. сопряж.}\right), \tag{1.25}$$

$$\overline{F}^+ = F.$$

Тогда решение уравнения (1.5) с точностью до членов первого порядка в **A** имеет вид:

$$U_i = v_i + \varphi_i^+ + \varphi_i^-, \tag{1.26}$$

где

$$\varphi_i^+ = \frac{e}{2\hbar c}\frac{1}{K_i k_i}\left[\frac{1}{2\varkappa^2}(K_i + k_i)F_{kl}^+ Y_{kl} + iF_{ki}^+ v_k + 2(A_k^+ k_k)v_i\right]; \tag{1.27}$$

$$\varphi_i^- = -\frac{e}{2\hbar c}\frac{1}{K_i k_i}\left[\frac{1}{2\varkappa^2}(K_i - k_i)F_{kl}^- Y_{kl} - iF_{ki}^- v_k + 2(A_k^- k_k)v_i\right]. \tag{1.28}$$

2. При вычислении поперечника для комптон-эффекта мы будем пользоваться, следуя Клейну и Нишине [2], методом запаздывающих потенциалов. Вычисления, полностью аналогичные вычислениям Клейна и Нишины, приводят к следующему выражению для вектора-потенциала электромагнитного поля, излучаемого мезоном:

$$A' = -\frac{e^{i(ct-R)K}}{R}\frac{1}{\sqrt{\Delta\Delta'}}\mathbf{j}_{IF} + \text{компл. сопряж.}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{j}_{IF}$ есть члены в разложении тока в интеграл, получаемом при подстановке в выражение для тока интегралов Фурье для волновых функций, соответствующие тем значениям начального и конечного волнового вектора мезона, которые удовлетворяют закону сохранения импульса (точнее эти члены мы определим ниже). Величины Δ и Δ' равны[2]:

$$\Delta = 1 - \frac{c}{E}(\mathbf{n}'\mathbf{p}), \tag{2.2}$$

$$\Delta' = 1 - \frac{c}{E'}(\mathbf{n}'\mathbf{p}'), \tag{2.3}$$

здесь $\mathbf{p}$, E, $\mathbf{p}'$, E' — импульс и энергия мезона в начальном и конечном состояниях, $\mathbf{n}'$ — единичный вектор в направлении излученного кванта[3].

Из (2.1) дифференцированием получаем магнитное поле излучения:

$$H' = -iK\frac{e^{i(ct-R)K}}{R\sqrt{\Delta\Delta'}}[\mathbf{n}', \mathbf{j}_{IF}] \tag{2.4}$$

и энергию, излученную в единицу времени в телесный угол $d\Omega$:

$$S = \frac{c}{4\pi}\overline{(\mathbf{H})^2}\, d\Omega = \frac{cK^2A^2}{4\pi}[\mathbf{n}', \mathbf{j}_{IF}]^2\, d\Omega. \tag{2.5}$$

Поток энергии падающего света

$$S_0 = \overline{\frac{c}{4\pi}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2} = \frac{cK^2A_0^2}{4\pi}, \tag{2.6}$$

откуда для поперечника рассеяния получаем:

$$d\sigma = \frac{1}{\Delta\Delta'}\frac{1}{A^2}[\mathbf{n}', \mathbf{j}_{IF}]^2. \tag{2.7}$$

[2] См. [2], формула (36).

[3] Формула (2.1), полученная Гордоном [4], неверна; член B в знаменателе лишний. Однако в системе координат, которой пользовались Клейн и Нишина, $\Delta = 1$ и потому их результат верен. В дальнейшем мы всюду будем выбрасывать Δ из знаменателя.

3. При выводе формулы мы будем пользоваться системой координат, в которой покоится центр инерции мезона и падающего кванта.

В этой системе импульсы кванта и мезона равны по величине и противоположны по направлению.

Обозначим импульсы мезона и кванта в начальном состоянии через

$$\mathbf{n}k \text{ и } -\mathbf{n}k \tag{3.1}$$

и в конечном состоянии

$$\mathbf{n}'k \text{ и } -\mathbf{n}'k. \tag{3.2}$$

Величины Δ и Δ' в этой системе:

$$\Delta = 1 + \frac{ck}{\omega}\cos\vartheta, \tag{3.3}$$

$$\Delta' = 1 + \frac{ck}{\omega}, \tag{3.4}$$

где ϑ — угол рассеяния, а $\hbar\omega$ — энергия мезона, одинаковая в начальном и конечном состояниях.

В разложении тока, получаемом после разложения волновых функций на плоские волны, существенны только такие члены, у которых при переходе к векторному потенциалу коэффициент при радиусе-векторе в показателе степени обращается в ноль. Остальные члены не удовлетворяют закону сохранения импульса. Легко видеть, что это члены типа

$$\bar{f}_F A^+ f_I \text{ и компл. сопряж.}, \tag{3.5}$$

где f_I имеет показатель степени $i(-k\mathbf{n}\mathbf{r} - \omega t)$, f_F — показатель $i(-k\mathbf{n}'\mathbf{r} - \omega t)$, а A^+ – $i(k\mathbf{n}\mathbf{r} - ckt)$.

Действительно, в этом случае в показателе степени (3.5) стоит выражение

$$\pm(k\mathbf{n}\mathbf{r} - ckt). \tag{3.6}$$

При переходе к вектору-потенциалу надо заменить t на

$$t - \frac{|r - r'|}{c} = t - \frac{r'}{c} + \frac{1}{c}(rn'). \tag{3.7}$$

При этом (3.6) обращается в

$$\pm\left(t - \frac{r'}{c}\right)ck, \tag{3.8}$$

т. е. действительно коэффициент при r обращается в нуль.

Также легко видеть, что все члены других типов не удовлетворяют этому условию. Ток перехода в нашем случае будет равен:

$$j = -ie\hbar c\left[U_{(F)k} Y_{(I)ik} - U_{(I)k} Y_{(F)(ik)} + \text{компл. сопряж.}\right]. \tag{3.9}$$

Выписанный член соответствует типу $\bar{f}_F A^+ f_I$, а сопряженный $f_F A^- \bar{f}_I$. В дальнейшем будем выписывать только первый член. Соответственно этому в возмущении волновой функции начального состояния нам надо учитывать только член φ^+, а в волновой функции конечного — только член φ^-.

Так как при этом во всех формулах конечная волновая функция будет входить сопряженной, то мы будем опускать значки I и F.

Подставляя в (3.9) выражение для Y_{ik} и $\overline{Y}_{ik}$, получим:

$$j = -ie\hbar c\left[\overline{U}_k \frac{\partial}{\partial x_i} U_k - U_k \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U}_k - \overline{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} U_i + U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{U}_i - \right.$$

$$\left. - \frac{2ie}{\hbar c}(U_k U_k)A_i + \frac{ie}{\hbar c}(\overline{U}_k A_k)U_i + \frac{ie}{\hbar c}(U_k A_k)\overline{U}_i\right]. \qquad (3.10)$$

Подставляя значения для возмущенных волновых функций, отбрасывая члены второго порядка в A и члены, соответствующие току в отсутствие электромагнитного поля, получим:

$$j_i = -ie^2\left\{-\frac{1}{\delta'}\left[\frac{1}{2\varkappa^2}(K_k - k'_k)F^+_{ne}\overline{Y}_{ne} + iF^+_{ek}\,\bar{v}_e + 2k(\mathbf{A}^+\mathbf{n}')\bar{v}_k\right]Y_{ik} - \right.$$

$$- \frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{2\varkappa^2}(K_k + k_k)F^+_{ne}Y_{ne} + iF^+_{ek}\,\bar{v}_e\right]\overline{Y}_{ik} + \frac{1}{\delta}(K_k + k_k)\bar{v}_k F^+_{ei}\,v_e +$$

$$+ \frac{1}{\delta'}(K_i - k'_i)v_k\left[iF^+_{ek}\,\bar{v}_e + 2k(\mathbf{A}^+\mathbf{n}')\bar{v}_k\right] - \frac{i}{\delta'}(K_i - k'_i)v_k\left[iF_{ci}\,\bar{v}_c + 2k(\mathbf{A}^+\mathbf{n}')v_i\right] -$$

$$\left. - 2i(\bar{v}_k v_k)A^+_i + i(\bar{\mathbf{v}}\mathbf{A}^+)v_i + i(\mathbf{v}\mathbf{A}^+)\bar{v}_i\right\}; \qquad (3.11)$$

здесь

$$\delta = -2k^2\left(1 + \frac{\omega}{ck}\right), \qquad (3.12)$$

$$\delta' = 2k^2\left(\cos\vartheta + \frac{\omega}{ck}\right), \qquad (3.13)$$

а под Y_{ik} и $\overline{Y}_{ik}$ мы теперь понимаем волновые функции свободного мезона.

Переходя к трехмерным обозначениям, получим

$$j = e^2\left\{\frac{ik}{\varkappa^2\delta'}(\mathbf{H}^+\overline{\mathbf{G}} - \mathbf{E}^+\overline{\mathbf{F}})\left([\mathbf{n}+\mathbf{n}',\ \mathbf{G}] + \left(1 - \frac{\omega}{ck}\right)\mathbf{F}\right) + \frac{1}{\delta'}[[\mathbf{v},\ \mathbf{H}^+],\mathbf{G}] + \right.$$

$$+ \frac{1}{\delta'}\bar{v}_0[\mathbf{E}^+,\ \mathbf{G}] + \frac{1}{\delta'}(\bar{\mathbf{v}},\ \mathbf{E}^+)\mathbf{F} + \frac{2ik}{\delta'}(\mathbf{A}^+,\ \mathbf{n}')([\bar{\mathbf{v}},\ \mathbf{G}] + v_0\mathbf{F}) +$$

$$+ \frac{i}{2k}\bar{v}_0([\mathbf{v},\ \mathbf{H}^+] + v_0\varepsilon) - \frac{i}{2k\varkappa^2}\overline{\mathbf{F}}((\mathbf{H}^+,\ \mathbf{G}) - (\mathbf{E}^+,\ \mathbf{F})) + \frac{1}{\delta}[[\mathbf{v},\ \mathbf{H}^+]\overline{\mathbf{G}}] +$$

$$+ \frac{1}{\delta}v_0[\mathbf{E}^+,\ \overline{\mathbf{G}}] + \frac{1}{\delta}(\mathbf{v},\ \mathbf{E}^+)\overline{\mathbf{F}} - \frac{ik}{\delta'}(\mathbf{n}+\mathbf{n}')([\bar{\mathbf{v}},\ \mathbf{H}^+] + \bar{v}_0\mathbf{E}^+,\ \mathbf{v}) +$$

$$+ \frac{ik}{\delta'}(\mathbf{n}+\mathbf{n}')v_0(\bar{\mathbf{v}},\ \mathbf{E}^+) + \frac{ik}{\delta'}\left[(\mathbf{v},\ \mathbf{n}+\mathbf{n}') - v_0\left(1 - \frac{\omega}{ck}\right)\right][[\bar{\mathbf{v}},\ \mathbf{H}^+] + \bar{v}_0\,\mathbf{E}^+] -$$

$$- \frac{2k^2}{\delta'}(\mathbf{A}^+,\ \mathbf{n}')\left[(\mathbf{n}+\mathbf{n}',\ \mathbf{v}) - \left(1 - \frac{\omega}{ck}\right)v_0\right]\bar{\mathbf{v}} - 2e^2((\mathbf{v}_0,\ \mathbf{v}) - \bar{v}_0\,v_0)\mathbf{A}^+ -$$

$$\left. - (\bar{\mathbf{v}},\ \mathbf{A}^+)\mathbf{v} + (\mathbf{v},\ \mathbf{A}^+)\bar{\mathbf{v}} + \frac{2k^2}{\delta'}(\mathbf{A}^+\,\mathbf{n}')((\bar{\mathbf{v}},\ \mathbf{v}) - \bar{v}_0\,v_0)n\right\}. \qquad (3.14)$$

При рассеянии света мезоном возможны 18 различных процессов, соответствующих трем начальным и трем конечным поляризациям мезона и двум поляризациям падающего света.

Мы будем вычислять каждый из этих случаев отдельно.

Волновые функции в нашем случае будут:

$$\mathbf{t} = \alpha\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\exp\left[-i(k\mathbf{nr}+\omega t)\right]; \tag{3.15}$$

$$\psi = -\varkappa\mathbf{n}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\exp\left[-i(k\mathbf{nr}+\omega t)\right]; \tag{3.16}$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \alpha'\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\exp\left[i(k\mathbf{n}'\mathbf{r}+\omega t)\right]; \tag{3.17}$$

$$\bar{\psi} = -\varkappa\mathbf{n}'\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\exp\left[i(k\mathbf{n}'\mathbf{r}+\omega t)\right]. \tag{3.18}$$

Из (3.14) легко получить выражения токов перехода для переходов с различной поляризацией мезона и кванта. Зная последние по формуле (2.7), получаем соответствующие эффективные поперечники.

Однако полученные нами формулы довольно громоздки и в настоящее время вряд ли представляют интерес. Поэтому мы ограничимся только случаем больших энергий. В случае малых энергий наши формулы после суммирования по конечным поляризациям мезона переходят в формулу Томсона, что служит проверкой общего численного коэффициента.

Для больших энергий кванта ($k \gg \varkappa$) эффективный поперечник приобретает вид (после усреднения по поляризации света и суммирования по конечным поляризациям мезона, оставляя лишь члены, пропорциональные k^2).

1. Рассеяние на продольном мезоне:

$$d\sigma_e = \frac{5}{32}d\Omega\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2(1-\cos\vartheta)^2. \tag{3.19}$$

2. Рассеяние на мезоне, поляризованном в плоскости рассеяния:

$$d\sigma_{t_\parallel} = \frac{d\Omega}{32}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2(3+\cos^2\vartheta). \tag{3.20}$$

3. Рассеяние на мезоне, поляризованном перпендикулярно к плоскости рассеяния:

$$d\sigma_{t_\perp} = \frac{d\Omega}{32}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2(3+\cos^2\vartheta). \tag{3.21}$$

Полный эффективный поперечник получается усреднением по начальной поляризации и интегрированием по углам. Это дает для больших энергий:

$$\sigma = \frac{5\pi}{9}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2 \tag{3.22}$$

или в системе, где мезон в начале покоился,

$$\sigma = \frac{5\pi}{18}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\frac{E}{\mu c^2}. \tag{3.23}$$

Как видно из формулы (3.22), поперечник растет с увеличением энергии падающего кванта. Это соответствует тому, что теория возмущений, следовательно, и эти формулы перестают быть применимыми для слишком больших энергий.

Согласно Ландау [3], условие применимости всякой формулы для эффективного поперечника будет:

$$\lambda^2 \gg \sigma_l,$$

где λ — длина волны рассеиваемой частицы в системе координат, в которой центр инерции рассеиваемой частицы и рассеивателя покоится, а σ_l — эффективный поперечник рассеяния частиц с моментом l в этой системе.

Поэтому для того, чтобы выяснить границы применимости, необходимо вычислить эффективные поперечники для различной мультипольности рассеиваемого света. Это будет сделано в следующей работе.

Для грубой оценки мы можем считать, что

$$\sigma_e \sim \sigma \sim \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{(\mu c^2)^2},$$

где ε — энергия мезона, тогда условие Ландау дает:

$$\lambda^2 \gg \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{(\mu c^2)^2},$$

или в системе, где мезон покоится, полагая $2\varepsilon^2 = E\mu c^2$ (E — энергия кванта в этой системе),

$$\lambda_0^2 \gg \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2,$$

т. е. длина волны света должна быть больше, чем классический радиус мезона.

В заключение выражаю благодарность проф. Л. Д. Ландау за постоянный интерес к работе.

Литература

1. *Bhahba.* Proc. Roy. Soc., **A166**, 501, 1938.
2. *Klein O., Nishina I.* ZS. f. Phys, **52**, 853, 1929.
3. *Ландау Л. Д.* ЖЭТФ, **10**, 1940.
4. *Gordon W.* Zs. f. Phys, **40**, 117, 1927.

О рассеянии света мезотронами

Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский

1. Введение

При исследовании процессов, в которых участвуют мезотроны, мы наталкиваемся на трудность, не имеющую места в процессах с электронами. Эта трудность заключается в том, что эффективные поперечники рассеяния мезотронов, как известно, растут с увеличением энергии.

Как недавно было выяснено [1], рост поперечника с энергией связан с тем, что в то время как электрон в квантовой механике может рассматриваться как точечный, мезотрону необходимо приписать конечный радиус, равный для покоящегося мезотрона «классическому электромагнитному радиусу» $e^2/\mu c^2$ (μ — масса мезотрона). Это утверждение надо понимать в том смысле, что взаимодействие электрона, например с электромагнитным полем, имеет характер точечного для всех сколь угодно малых длин волн электромагнитного поля. Взаимодействие же мезотрона носит точечный характер и может быть описано волновым уравнением Прока только для длин волн бóльших, чем электромагнитный радиус мезотрона.

Для меньших длин волн существующая теория неприменима. Это видно из того, что эффективные поперечники в этой области столь велики, что число рассеянных частиц с заданным угловым моментом оказывается больше, чем их имеется в падающем потоке, что, конечно, бессмысленно.

Хотя точный вывод эффективных поперечников для очень больших энергий не представляется сейчас возможным, однако, пользуясь критерием, полученным в работе Ландау, можно дать оценку величины этих поперечников для сколь угодно больших энергий.

При этом, как и следовало ожидать, полученные поперечники уже не растут с энергией. В настоящей работе этот критерий применяется к процессам взаимодействия мезотронов с электромагнитным полем, не связанным с излучением света.

2. Комптон-эффект

Поперечник для комптон-эффекта был вычислен одним из авторов (Я. Смородинским) [2], а также Буссом и Вильсоном [3] и Кобаяси и Утиямой [4]. В системе координат, где мезотрон вначале покоился, и для энергии падающего кванта $\mu c^2 \ll E < 137\mu c^2$ этот поперечник равен

$$\frac{5\pi}{18}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 \frac{E}{\mu c^2}. \tag{2.1}$$

Для того чтобы найти границы применимости этой формулы и выяснить поведение поперечника для энергий, больших $137\mu c^2$, необходимо вычислить поперечники рассеяния фотонов с заданным угловым моментом. Максимальная величина, которую может иметь поперечник, в системе координат, где центр инерции фотона

и мезотрона покоится, равна

$$S_l = 4\pi(2l+1)\lambda^2. \tag{2.2}$$

Выражение для тока перехода в системе координат, где центр инерции фотона и мезотрона покоится, имеет вид [см. [2], формула (3.14)]:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_{IF} = e^2\Big\{ & \frac{ik}{\varkappa^2\delta'}(\mathbf{H}^+\overline{\mathbf{G}} - \mathbf{E}^+\overline{\mathbf{F}})[\mathbf{n}+\mathbf{n}', \mathbf{G}] + \frac{1}{\delta'}[[\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{H}^+], \mathbf{G}] + \frac{1}{\delta'}\bar{v}_0[\mathbf{E}^+, \mathbf{G}] + \\ & + \frac{1}{\delta'}(\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{E}^+)\mathbf{F} + \frac{2ik}{\delta'}(\mathbf{A}^+, \mathbf{n}')\big([\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{G}] + \bar{v}_0\mathbf{F}\big) - \frac{2ik}{\delta}\bar{v}_0\big([\mathbf{v}, \mathbf{H}^+] + v_0\mathbf{E}^+\big) + \\ & + \frac{2ik}{\varkappa^2\delta}\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{H}^+\mathbf{G} - \mathbf{E}^+\mathbf{F}) + \frac{1}{\delta}\big[[\mathbf{v}, \mathbf{H}^+], \overline{\mathbf{G}}\big] + \frac{1}{\delta}v_0\big[\mathbf{E}^+, \overline{\mathbf{G}}\big] + \frac{1}{\delta}(\mathbf{v}, \mathbf{E}^+)\overline{\mathbf{F}} - \\ & - \frac{ik}{\delta'}\mathbf{n}\big[(\mathbf{v}, [\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{H}^+]) + \bar{v}_0(\mathbf{E}^+, \mathbf{v})\big] + \frac{ik}{\delta'}\mathbf{n}v_0(\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{E}^+) + \\ & + \frac{ik}{\delta'}(\mathbf{v}, \mathbf{n}+\mathbf{n}')([\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{H}^+] + \bar{v}_0\mathbf{E}^+) + \frac{2k^2}{\delta'}(\mathbf{A}^+, \mathbf{n}')\big((\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) - \bar{v}_0 v_0\big)\mathbf{n} - \\ & - \frac{2k^2}{\delta'}(\mathbf{A}^+, \mathbf{n}')(\mathbf{v}, \mathbf{n}+\mathbf{n}')\overline{\mathbf{v}} - 2\big((\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) - \bar{v}_0 v_0\big)\mathbf{A}^+ + (\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{A}^+)\mathbf{v} + \\ & + (\mathbf{v}, \mathbf{A}^+)\overline{\mathbf{v}} + \text{комплексно сопряженные члены}\Big\},\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $k\mathbf{n}$ — волновой вектор падающего фотона, $k\mathbf{n}'$ — волновой вектор рассеянного фотона, $\mathbf{v}$, v_0, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ — волновые функции свободного мезотрона (один четырехмерный и два трехмерных вектора). Комплексно сопряженные функции относятся к конечному состоянию,

$$\delta = -4k^2, \quad \delta' = 2k^2\big(1 + (\mathbf{n}, \mathbf{n}')\big) = 2k^2(1+\cos\vartheta), \quad \varkappa = \frac{\mu c}{\hbar},$$

$\mathbf{A}$ — вектор-потенциал электромагнитного поля,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ e^{i(\mathbf{kr}-ckt)} + \mathbf{A}^- e^{-i(\mathbf{kr}-ckt)},$$

$$\mathbf{H}^+ = i[\mathbf{k}, \mathbf{A}^+], \quad \mathbf{E}^+ = ik\mathbf{A}^+.$$

Как мы видим, в этом выражении имеются члены двух типов. В членах, не содержащих δ', зависимость от угла рассеяния заключена только в числителе, в который входит синус или косинус этого угла. Такие члены соответствуют только малым значениям углового момента l (а именно, l равно 0 и 1), поэтому они для нас неинтересны и могут быть опущены. Оставшиеся члены содержат $1 + (\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ в знаменателе и при разложении на шаровые волны дают члены, соответствующие всем значениям l. Таким образом, если отбросить члены, содержащие только малые l, мы получим, при больших энергиях, следующие выражения для векторного произведения тока перехода на единичный вектор $\mathbf{n}'$ в направлении излученного кванта:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{A^+}[\mathbf{j}_{IF}, \mathbf{n}'].$$

I. Начальная и конечная поляризации мезотрона продольные:

$$\mathbf{B}^{L-L} = -\frac{e^2k}{2\mu c^2\varkappa}\frac{1}{1+(\mathbf{n}, \mathbf{n}')}(\mathbf{e}, \mathbf{n}')[\mathbf{n}, \mathbf{n}']; \tag{2.4}$$

$\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации света.

II. Начальная и конечная поляризации мезотрона поперечные:

$$\mathbf{B}^{T-T} = \frac{e^2k}{4\mu c^2\varkappa}\frac{1}{1+(\mathbf{n},\,\mathbf{n}')}(\alpha,\,\mathbf{n}')(\mathbf{e},\,\mathbf{n}')(\alpha',\,\mathbf{n})[\mathbf{n},\,\mathbf{n}'];\tag{2.5}$$

α и α' — единичные векторы начальной и конечной поляризации.

Переходам с изменением поляризации мезотронов отвечает меньшее значение эффективных поперечников, а потому соответствующими членами можно пренебречь.

Эта особенность переходов у мезотронов неоднократно отмечалась и соответствует тому, что матричные элементы первого порядка при больших энергиях мезотронов больше у процессов с изменением поляризации, чем у процессов, при которых поляризация остается неизменной. Так как комптон-эффект есть процесс второго порядка, то для него основную роль будут играть процессы с одной и той же поляризацией в начальном и конечном состояниях. Формула для дифференциального сечения имеет вид [см. [2], формула (2.7)]:

$$d\sigma = \frac{1}{2}B^2\,d\Omega.\tag{2.6}$$

Выражения (2.4) и (2.5) надо разлагать на шаровые волны. Однако такое разложение достаточно громоздко, а потому воспользуемся другим методом, вполне достаточным для нашей цели.

Легко видеть, что рассеяние из-за члена $1+\cos\vartheta$ в знаменателе происходит в основном в углах, близких к $\vartheta = \pi$. Но при таких углах шаровую функцию можно заменить плоской волной с волновым вектором, лежащим в плоскости, перпендикулярной волновому вектору кванта, рассеянному на угол π.

Действительно, шаровая функция Y_l^m удовлетворяет уравнению

$$\Delta^* Y_l^m = -l(l+1)Y_l^m,\tag{2.7}$$

где Δ^* — оператор Лапласа на сфере

$$\Delta^* = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Если $\vartheta = \pi - \theta$, где θ мало, то этот оператор можно записать в виде

$$\Delta = \frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Этот оператор тождествен с оператором Лапласа на плоскости, причем θ играет роль радиуса-вектора. Таким образом, уравнение (2.7) при больших l и малых θ переходит в волновое уравнение на плоскости, если еще заменить $l(l+1)$ на l^2.

Решение этого уравнения есть плоские волны с волновым вектором l. Абсолютная величина этого вектора равна индексу шаровой функции l, а различным значениям индекса m отвечают различные ориентации волнового вектора в плоскости.

Итак, разложение по шаровым функциям в нашем случае можно заменять разложением в двумерный интеграл Фурье.

Пусть, например, некоторый процесс рассеяния описывается волновой функцией $f(\theta,\varphi)$, имеющей максимум в направлении $\vartheta = \pi$.

Разложение $f(\theta,\varphi)$ будет

$$f(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\iint f_l e^{i\theta}\,dl_x\,dl_y;$$

$\theta = \theta_x,\ \theta_y$ — декартовы координаты, соответствующие полярным координатам $\theta,\ \varphi$. Интеграл от квадрата модуля этой функции равен

$$\iint |f(\theta,\varphi)|^2\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\iint |f_l|^2\,dl_x\,dl_y.$$

Вводя на плоскости переменных l_x и l_y полярные координаты и интегрируя по углу, получим

$$\iint |f(\theta,\varphi)|^2\,d\Omega = \int |f(l)|^2\,dl, \tag{2.8}$$

где

$$|f(l)|^2 = l|f_l|^2 \tag{2.9}$$

и будет определять рассеяние, отвечающее угловому моменту l. Случай векторной функции, который имеет место при рассеянии света, несколько отличается от случая скалярной функции. Но для больших значений углового момента можно не обращать внимания на это обстоятельство и разлагать каждую компоненту как скаляр [1)].

Для того чтобы разложить в интеграл векторы (2.4), (2.5), выберем систему координат следующим образом: ось Oz направим в сторону, противоположную вектору $\mathbf{n}$, а ось Ox — по вектору $\mathbf{l}$. Тогда компоненты вектора $\mathbf{B}^{L-L}$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} B_x^{L-L} &= \frac{e^2k}{2\mu c^2\varkappa}\frac{n'_xn'_y}{n'^2_x+n'^2_y},\\ B_y^{L-L} &= \frac{e^2k}{2\mu c^2\varkappa}\frac{n'^2_x}{n'^2_x+n'^2_y},\\ B_z^{L-L} &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

При этом мы воспользовались соотношением, верным при n'_z, близком к 1:

$$1-n'_z \cong \frac{1}{2}\left(n'^2_x+n'^2_y\right).$$

Компоненты Фурье-составляющих вектора $\mathbf{B}^{L-L}$ равны:

$$\begin{aligned} B_x^{L-L}(l) &= \frac{e^2k}{\mu c^2\varkappa}\int\frac{n'_xn'_y}{n'^2_x+n'^2_y}e^{i(n'_xl_x+n'_yl_y)}dn'_x\,dn'_y = \frac{e^2k}{\mu c^2\varkappa}\frac{4\pi}{l^4}l_xl_y,\\ B_y^{L-L}(l) &= -\frac{e^2k}{\mu c^2\varkappa}\int\frac{n'^2_x}{n'^2_x+n'^2_y}e^{i(n'_xl_x+n'_yl_y)}dn'_x\,dn'_y = -\frac{e^2k}{\mu c^2\varkappa}\frac{2\pi}{l^4}\left(l_x^2-l_y^2\right),\\ B_z^{L-L}(l) &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Квадрат вектора $B^{L-L}(l)$, соответствующего угловому моменту $\mathbf{l}$, равен:

$$l|B^{L-L}(l)|^2 = \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2\frac{4\pi^2}{l^3};$$

$\varepsilon = \hbar ck$ — энергия фотона.

Таким образом, эффективный поперечник для рассеяния фотона с угловым моментом l по формуле (2.6) равен

$$\sigma_l \sim \frac{1}{l^3}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2. \tag{2.12}$$

[1)] Например, электрическое мультипольное излучение с моментом l описывается не шаровой функцией с индексом l, а линейной комбинацией шаровых функций с индексами $l+1$ и $l-1$.

Как нетрудно показать, разложение вектора B^{T-T} дает $l\left|B^{T-T}(l)\right|^2$, пропорциональное $1/l^7$, а потому этими членами можно пренебречь.

Поэтому формула (2.12) определяет полный поперечник рассеяния.

Воспользуемся теперь критерием, полученным в работе Ландау. Согласно ему, формула верна до энергий, определяемых равенством (численные коэффициенты мы опускаем)

$$\frac{1}{l^3}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2 \sim l\lambda^2 \sim \frac{\hbar^2 c^2}{\varepsilon^2} l,$$

т. е. до энергии

$$\varepsilon \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2}}\, l. \tag{2.13}$$

Наоборот, для данной энергии (большей, чем $\sqrt{137}\mu c^2$) формула (2.12) дает правильную величину поперечника для всех l, удовлетворяющих неравенству

$$l < l_0 = \sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}\, \varepsilon. \tag{2.14}$$

Для меньших l нельзя получить значение поперечника. Однако можно утверждать, что оно во всяком случае удовлетворяет неравенству (опять с точностью до коэффициентов):

$$\sigma_l \leqslant l\frac{\hbar^2 c^2}{\varepsilon^2}. \tag{2.15}$$

Полный поперечник рассеяния складывается из двух частей: во-первых, интегрируя (2.12) по всем $l > l_0$, получим

$$\sigma \sim \frac{\hbar c}{e^2}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 = \frac{\hbar}{\mu c}\frac{e^2}{\mu c^2}. \tag{2.16}$$

Вторая часть во всяком случае не больше, чем интеграл от (2.2) по всем $l < l_0$, т. е. не больше, чем $\frac{\hbar}{\mu c}\frac{e^2}{\mu c^2}$; это выражение совпадает с (2.16), поэтому мы можем считать, что по порядку величины (2.16) дает правильное выражение для поперечника рассеяния.

Таким образом, для энергий кванта, меньших $\sqrt{137}\mu c^2$, рассеяние пропорционально квадрату энергии, а для больших энергий эффективный поперечник принимает постоянное значение.

Рассеяние, определяемое таким способом в системе центра инерции, происходит только в малом угле около направления $\vartheta = \pi$. Это следует из того, что в рассеянии принимают участие преимущественно волны с большими угловыми моментами. Из обычных соображений следует, что в этом случае амплитуды рассеянной волны (2.11) будут отличны от нуля только в угле, удовлетворяющем соотношению

$$l_0\,\theta_0 \sim 1,$$

где l_0 — наименьшая величина углового момента, участвующего в рассеянии.

При углах, близких к π, рассеяние определяется формулой

$$d\sigma(\vartheta) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2 d\theta \quad (\theta = \pi - \vartheta).$$

Интегрируя до угла

$$\theta_0 \sim \frac{1}{l_0} \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2}} \cdot \frac{\mu c^2}{\varepsilon}, \tag{2.17}$$

мы получаем не зависящий от энергии поперечник, что совпадает с нашей оценкой. Отсюда следует, что в угле, в котором рассеяние происходит, оно описывается обычной формулой, полученной методом теории возмущений.

Перейдем в систему, где мезотрон покоится. Энергия, которую фотон передает мезотрону в этой системе координат, равна:

$$\Delta E = \gamma p \cos^2\vartheta,$$

где ϑ — угол рассеяния в системе центра инерции, p — импульс в этой системе,

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}};$$

u — относительная скорость обеих систем.

При углах $\theta \sim \theta_0$ переданная энергия

$$\Delta E \sim E\left(1 - \frac{2\hbar c}{e^2}\frac{\mu c^2}{E}\right).$$

Таким образом, в этой системе фотон при рассеянии отдает мезотрону почти всю свою энергию. После рассеяния у фотона остается энергия, по порядку величины не большая, чем $137\mu c^2$.

Поэтому рассеяние происходит всегда так, что у фотона остается энергия меньшая, чем критическая, а так как при этом рассеяние описывается обычной формулой (в системе, где мезотрон вначале покоился):

$$d\sigma = \frac{1}{96}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2\left\{11 - 10\frac{\cos\theta + \frac{E}{\mu c^2}(1+\cos\theta)}{1 + \frac{E}{\mu c^2}(1+\cos\theta)} + \right.$$
$$\left. + 7\left(\frac{\cos\theta + \frac{E}{\mu c^2}(1+\cos\theta)}{1 + \frac{E}{\mu c^2}(1+\cos\theta)}\right)^2\right\}\frac{d\Omega}{\left[1 + \frac{E}{\mu c^2}(1+\cos\theta)\right]^2}, \tag{2.18}$$

то можно сформулировать наш критерий следующим образом: формула (2.18) правильно описывает рассеяние фотонов, и энергия хотя бы одного из фотонов (падающего или рассеянного) меньше, чем $137\mu c^2$.

3. Образование мезотронных пар двумя фотонами

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, могут быть применены к процессу образования мезотронной пары при столкновении двух фотонов. Поперечник для этого процесса в системе координат, где общий импульс фотонов равен нулю, определяется формулой [4]:

$$d\sigma = \frac{1}{32}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2\left(13 + \cos^2\theta\right)d\Omega, \tag{3.1}$$

где ε — энергия частиц ($\varepsilon \gg \mu c^2$).

Формула для этого процесса вычисляется как комптон-эффект на мезотроне в состоянии с отрицательной энергией с переходом мезотрона в состояние с положительной энергией.

Что это действительно так, видно из сравнения матричных элементов поглощения фотона и образования пары, которые оказываются одинаковыми с точностью до знака (см. [3], с. 90).

Принимая это во внимание, мы можем применить к этому процессу критерий, полученный для комптон-эффекта.

В системе координат, где мезотрон покоится, образование пар будет происходить только для длин волн одного из фотонов, меньших радиуса мезотрона.

Чтобы написать границы применимости в системе, где общий импульс фотонов равен нулю, воспользуемся тем обстоятельством, что скалярное произведение четырехмерных импульсов мезотрона и фотона есть инвариант. В исходной системе покоящегося мезотрона это четырехмерное произведение при максимальном значении энергии равно: $\mu c^2\hbar c/e^2$.

Приравнивая эту величину к тому же скалярному произведению в новой системе координат, получим условие, связывающее максимальную энергию фотона E_0 и максимальный угол между направлением фотонов и мезотронов θ_0:

$$\mu c^2\frac{\hbar c}{e^2} = E_0^2(\cos\theta_0 - 1). \tag{3.2}$$

Таким образом, при больших энергиях рассеяние происходит только в угле:

$$\theta_0 \sim \frac{\mu c^2}{E_0}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{e^2}}.$$

Интегрируя (3.1) по всем углам, меньшим θ_0, получим поперечник для больших энергий:

$$\sigma \sim \frac{\hbar c}{e^2}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 = \frac{\hbar}{\mu c}\frac{e^2}{\mu c^2}. \tag{3.3}$$

4. Рассеяние мезотронов в кулоновом поле

Рассеяние мезотронов в кулоновом поле не сводится к комптон-эффекту. Однако и в этом случае можно привести некоторые соображения по поводу границ применимости формул, полученных Месси и Корбеном [6].

Рассмотрим процесс рассеяния в системе координат, в которой мезотрон покоится. Поле налетающего протона или электрона в этой системе можно разложить в интеграл Фурье. Компонента такого разложения отличается от компоненты Фурье-поля в вакууме тем, что ее частота не равна ck. Ее иногда называют псевдофотоном. Процесс рассеяния состоит в том, что мезотрон поглощает одну из компонент Фурье и получает импульс, равный импульсу поглощенного псевдофотона.

Таким образом, мы здесь имеем дело с процессом, в котором участвует всего один псевдофотон. По аналогии с комптон-эффектом можно считать, что до тех пор, пока энергия псевдофотона меньше, чем $137\mu c^2$, формулы, полученные Месси и Корбеном, справедливы; если же энергия кванта больше, то мезотрон будет с ним взаимодействовать гораздо слабее и рассеяния почти не будет происходить.

В системе координат, где покоится рассеивающая частица, это соответствует тому, что мезотрон не может отдать энергию бóльшую, чем

$$E_c = \frac{\mu}{M_0}\cdot 137\mu c^2,$$

где M_0 — масса рассеивателя. В этой системе, если мезотрон имеет энергию меньше, чем E_c, то справедлива формула Месси и Корбена. При больших же энергиях рассеяние будет происходить только в угле:

$$\theta \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2}} \cdot \frac{\mu c^2}{E}.$$

В случае рассеяния от электронов эта критическая энергия

$$E_c \sim 2{,}8 \cdot 10^{12}\ \text{eV}.$$

При рассеянии от протонов $E_c \sim 1{,}4 \cdot 10^9$ eV. Из-за очень большой величины критической энергии для электронов изменения в формуле Месси и Корбена не существенны. Эти изменения существенны только при рассеянии от протонов.

При энергии мезотрона $> Mc^2$ (M — масса протона) поперечник рассеяния от протона равен:

$$S(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\left[1 - \frac{\varepsilon}{E} + \frac{\varepsilon^2}{2E^2}\right], \tag{4.1}$$

$$\varepsilon \gg \frac{\mu}{M}\mu c^2,$$

где ε — энергия, переданная при столкновении, и E — энергия мезотрона. При малых ε имеют место обычные потери по формуле Резерфорда.

Специфические для мезотронов потери по (4.1) равны:

$$\int_0^E \varepsilon S(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{4\pi}{9}\left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 E \quad \text{при} \quad E < \frac{\mu}{M}\cdot 137\mu c^2 = E_c \tag{4.2}$$

и равны

$$\int_0^{E_c} \varepsilon S(\varepsilon)\,d\varepsilon \sim \left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2 \cdot 137Mc^2 \quad \text{при} \quad E \gg E_c. \tag{4.3}$$

Интересно сравнить потери энергии при столкновении с протоном с ионизационными потерями на электроне $\frac{2\pi e^4}{mc^2}L$ (m — масса электрона, L — ионизационный логарифм, который мы, заведомо преуменьшая результат, можем считать порядка единицы).

Как видно из сравнения формул (4.1), (4.2) и (4.3), потери на протоне меньше, чем на электроне[2)].

Таким образом, рассеянием мезотронов от протонов при всех энергиях мезотронов можно пренебречь по сравнению с рассеянием от электронов[3)].

Литература

1. *Ландау Л.* ЖЭТФ, **10**, 718, 1940.
2. *Смородинский Я.* ЖЭТФ, **10**, 840, 1940.
3. *Booth F., Wilson A. H.* Proc. Roy. Soc., **A175**, 483, 1940.
4. *Kobayasi M., Utiyama R.* Sc. Pap. Inst. of Phys. Chem. Res., **37**, 221, 1940.
5. *Fröhlich H., Heitler W., Kahn B.* Proc. Roy. Soc., **A174**, 85, 1940.
6. *Massey H. S. and Corben H. C.* Proc. Cambr. Phil. Soc., **35**, 463, 1940.

[2)] Если бы формула Месси и Корбена была справедлива при любых энергиях, то эти потери сравнивались бы при энергиях мезотронов в $\mu/m \cdot \mu c^2$, принимая значение (4.2).

[3)] Речь идет только о рассеянии на кулоновом поле.

Тормозное излучение частиц со спином единица

Я. А. Смородинский

1. Введение

Тормозное излучение частиц со спином единица, а также образование пар фотоном в кулоновом поле исследовалось рядом авторов. Бусс и Вильсон [1], а также Кобаяси и Утияма [2] выводили эффективные сечения для этих процессов, пользуясь методом прицельных параметров, с помощью которого Вейцзеккер и Вильямс в свое время выводили эффективное сечение для тормозного излучения электронов. Их результаты, как будет показано в § 2, не верны, так как они неправильно применили этот метод к мезотронам. Как будет показано в этом же параграфе, с помощью верно примененного метода прицельных параметров можно с точностью до постоянного множителя получить верный результат. Для получения же численного коэффициента необходимо произвести вычисления точно.

В последнее время появились вычисления Кристи и Кусака [3], которые применили для этого метод Кеммера[1].

В настоящей работе эффективные сечения вычисляются методом запаздывающих потенциалов, так как этот метод приводит к цели сравнительно быстро.

Целью настоящей работы, кроме получения формул для сечений методом менее громоздким, чем метод Кеммера, является выяснение поведения полученных сечений в случае очень больших энергий. Очевидно, что полученные формулы, как и все формулы для мезотронов, не могут применяться до сколь угодно больших энергий.

Как будет видно, они остаются справедливыми только до тех пор, пока энергия мезотрона меньше, чем $\sqrt{1/\alpha}\,\mu c^2 \sim 10^9$ eV $(\alpha = e^2/\hbar c)$, где μ — масса мезотронов. Для бо́льших энергий можно получить формулы для сечений, верные только по порядку величины, аналогично тому, как это было сделано для комптон-эффекта в работе Ландау и автора.

В работах Кобаяси и Утияма и Кристи и Кусака также даны оценки границы применимости полученных формул.

Кобаяси и Утияма считают, что вычисления методом теории возмущений дают верный результат до тех пор, пока следующие приближения оказываются меньшими.

Отсюда они получают, что их формулы оказываются верными до энергий $E \sim 1/\alpha\,\mu c^2 \sim 10^{10}$ eV, т. е. в 10 раз больших, чем получается в настоящей работе.

Кобаяси и Утияма оценивают также величину поперечника, когда энергии делаются бо́льшими, чем 10^{10} eV. Для этого они в методе прицельных параметров обрезают слишком большие частоты и получают, что поперечник в этом случае растет с энергией логарифмически. Такой метод обрезания, очевидно, эквивалентен тому, что поперечник для комптон-эффекта обращается для больших энергий в нуль.

---

[1] Кроме того, грубая оценка сечения тормозного излучения имеется в работе Оппенгеймера, Снайдера и Сербера [4].

Это противоречит оценке величины этого поперечника, сделанной в работе Ландау и автора [5].

Приведенная в настоящей работе оценка показывает, что при энергиях бо́льших, чем 10^9 eV, поперечник становится пропорциональным квадрату логарифма энергии.

Кристи и Кусака получают ту же границу, что и мы.

2. О методе прицельных параметров

При выводе эффективных сечений методом прицельных параметров существенную роль играет минимальный параметр, т. е. минимальное расстояние между сталкивающимися частицами, при которых еще имеет место излучение. Вейцзеккер с помощью не очень убедительных аргументов показывает, что этот параметр должен быть равен комптоновской длине излучающей частицы [7]

$$r_{\min} \sim \frac{\hbar}{\mu c}. \tag{2.1}$$

При этом Вейцзеккер, как известно, получает правильное значение для эффективного сечения, задним числом оправдывая свой выбор минимального прицельного параметра. Однако то же значение $r_{\min}$ приводит в случае излучения мезотроном к неправильному результату. Именно, Бусс и Вильсон получают для сечения величину

$$\frac{15\pi}{18} Z\alpha r_0^2 \cdot \frac{E}{\mu c^2} \cdot \frac{\hbar}{\mu c \cdot r_{\min}}, \tag{2.2}$$

E — энергия мезотрона в системе, где рассеивающее ядро покоится, Ze — заряд ядра.

Если за $r_{\min}$ взять значение (2.1), как это делают Бусс и Вильсон и Кобаяси и Утияма, то получается, что сечение оказывается пропорциональным энергии мезотрона, в то время как правильные формулы дают сечение, пропорциональное квадрату энергии.

Этот результат получается потому, что рассеяние света на мезотроне происходит совсем иначе, чем на электроне. В то время как для электронов наиболее эффективными оказываются частоты порядка энергии покоя электрона, для мезотрона наиболее эффективными являются самые большие частоты, имеющиеся в спектре. Поэтому для электрона малые прицельные параметры, соответствующие большим частотам, вообще не играют роли, а потому точность определения минимального параметра не оказывает большого влияния на точность результата[2)]. Для мезотрона положение как раз обратное — основную роль играют именно малые параметры, а потому результат, как видно из (2.4), существенно зависит от выбора $r_{\min}$. С другой стороны, как раз при малых параметрах метод Вильямса и Вейцзеккера оказывается наиболее грубым. Поэтому формула для тормозного излучения электрона (в ней $r_{\min}$ входит под знаком логарифма) получается с большой точностью, а аналогичная формула для мезотрона получается по этому методу только приближенно.

Выясним теперь значение $r_{\min}$ для тормозного излучения мезотрона. Можно показать (см., например, [7]), что максимальная частота, которая имеется в спектре налетающего ядра (в системе, где мезотрон покоится), равна $c\xi/r$, где $\xi = E/mc^2$, а r — прицельный параметр. Так как при рассеянии на мезотроне максимальная частота является в то же время и наиболее эффективной, то можно считать, что

[2)] Это обстоятельство, в частности, приводит к тому, что при вычислении этим методом излучения электрона можно пользоваться как формулой Томсона, так и формулой Клейна — Нишины; в обоих случаях получается одинаковый по порядку величины результат.

каждому прицельному параметру соответствует одна частота, равная $c\xi/r$. Эта же величина определяет импульс, переданный ядру в этой системе координат. В системе же, где покоится ядро, импульс, переданный ему, равен [3)]

$$q \sim \frac{\hbar}{r}. \tag{2.3}$$

А так как максимально предельный импульс не может быть больше импульса самого мезотрона (точнее, удвоенного импульса):

$$\frac{\hbar}{r} \sim \frac{E}{c}, \tag{2.4}$$

то мы получаем, что

$$r > \frac{\hbar c}{E}, \tag{2.5}$$

т. е.

$$r_{\min} \sim \frac{\hbar c}{E}. \tag{2.6}$$

Если подставить это значение для минимального прицельного параметра в формулу (2.2), то мы получим эффективное сечение, совпадающее с точностью до численного коэффициента с сечением, вычисленным в настоящей работе с помощью точного метода[4)].

В связи с этим различием между электроном и мезотроном, влияние на тормозное излучение заряда ядра и переданного ему импульса оказывается также различным. Так как для электрона импульс, переданный ядру, порядка mc, где m — масса электрона, что много больше Mc, где M — масса протона, то отдачей можно всегда пренебречь. Эффективный прицельный параметр для электрона равен $\hbar/mc$, что больше, чем радиус ядра. Поэтому тормозное излучение для электрона (если не учитывать экранирование электронами) всегда будет пропорционально квадрату заряда ядра.

Иначе обстоит дело в случае мезотрона. Для него импульс, переданный ядру, порядка импульса мезотрона, т. е. может быть как угодно велик, а минимальный прицельный параметр может быть как угодно мал. Поэтому для мезотрона не всегда можно пренебречь отдачей ядра и его радиусом. Правда, из-за того, что эффективное сечение, полученное обычным методом, не применимо для больших энергий, отдача ядра и его радиус влияют все же не так сильно. Эти вопросы требуют более детального рассмотрения, что и будет сделано ниже.

Все сказанное выше в равной мере относится и ко второму из рассматриваемых процессов — образованию пар, для которого получаются те же формулы (отличающиеся только численным коэффициентом).

3. Метод

В настоящей работе все формулы будут выводиться в предположении, что энергии всех частиц, участвующих в процессе, значительно больше энергии покоя мезотрона, так как для малых энергий даже окончательные формулы оказываются очень громоздкими.

[3)] Так как электрическое и магнитное поля налетающего ядра из-за лоренцова сокращения лежат в основном в плоскости, перпендикулярной к направлению движения, то волновой вектор фотона, а следовательно, и переданный ядру импульс, направлены по движению.

[4)] Отметим, что подобные рассуждения для электрона не могут иметь места, так как для него уже нельзя считать, что играют роль только частоты $c\xi/r$. Как мы уже говорили, для электрона существенны частоты mc^r (в системе ядра), а потому и $r_{\min}$ для него порядка комптоновской длины волны.

2 Зак. 198

Для того, чтобы вывести формулы для эффективного сечения тормозного излучения и образования мезотронных пар в кулоновом поле, разложим это поле в интеграл Фурье и рассмотрим сначала процесс, при котором поглощается только одна компонента Фурье.

Эти компоненты Фурье, кроме множителя, зависящего от волнового вектора, будут отличаться от обычной плоской волны-фотона тем, что их частота не равна волновому вектору (умноженному на скорость света).

В частности, в системе координат, в которой ядро покоится (система ядра), все компоненты, независимо от волнового вектора, имеют частоту, равную нулю. Плоскую волну, описывающую электромагнитное поле, для которой не выполняется соотношение $\omega = ck$, обычно называют псевдофотоном. Волновой вектор и частоты псевдофотона суть не что иное, как (деленные на $\hbar$) импульс и энергия, переданные ядру при столкновении. Таким образом, мы будем рассматривать процессы, в которых участвует псевдофотон. Этот псевдофотон в системе ядра описывается следующим потенциалом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= 0, \\ \Phi_0 &= e^{(i/\hbar)\mathbf{q}_0\mathbf{r}} + e^{(-i/t)\mathbf{q}\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Во всякой другой системе, движущейся относительно системы ядра с некоторой скоростью $-\boldsymbol{\beta}$, этому псевдофотону соответствует волна:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{(i/\hbar)(\mathbf{q}\mathbf{r}-q_0 t)} + \text{компл. сопряж.}, \\ \Phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{(i/\hbar)(\mathbf{q}\mathbf{r}-q_0 t)} + \text{компл. сопряж.}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\mathbf{q}$ — волновой вектор в новой системе координат, а q_0 — частота, равная скалярному произведению $(\mathbf{q}\vec{\beta})$.

Если мы обозначим вероятность процесса, при котором поглощается псевдофотон (3.1), через $w(\mathbf{q}_0)$, то нетрудно показать, что полная вероятность получится умножением на квадрат соответствующего коэффициента Фурье и интегрированием по всем псевдофотонам

$$w = \int a(\mathbf{q}_0)^2 w(\mathbf{q}_0) \frac{(d\mathbf{q})}{(2\pi)^3}. \tag{3.3}$$

В дальнейшем нам придется преобразовать вероятность от одной системы координат к другой.

Выведем здесь формулу для такого преобразования.

Для этого составим какой-нибудь инвариант, в который входила бы эта вероятность.

Таким инвариантом, очевидно, является число квантов, излученных за время dt_0 в элементе объема dv_0 при поглощении псевдофотона (3.1)[5].

Таким образом, можно написать

$$w(\mathbf{q}_0)\rho_0\, dv_0\, dt_0 = w(\mathbf{q})\varphi\, dv\, dt, \tag{3.4}$$

где ρ_0 и ρ — плотность мезотронов в обеих системах. Так как $dvdt$ есть инвариант, то мы получаем:

$$w(\mathbf{q}_0) = \frac{\rho}{\rho_0} w(\mathbf{q}). \tag{3.5}$$

---

[5] Индексом «0» мы будем отмечать величины, относящиеся к системе координат, в которой покоится ядро, величины без индекса относятся к какой-либо другой системе.

Для мезотрона с очень большой энергией

$$w(\mathbf{q}) = \frac{1 - (\mathbf{n}\vec{\beta})}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении движения мезотрона.

Перед тем как приступить к вычислениям, выпишем еще выражение для $a(\mathbf{q}_0)$. Как известно (см., например, [9]), коэффициент Фурье для кулонова поля имеет вид:

$$a(\mathbf{q}_0) = \frac{4\pi e}{\mathbf{q}_0^2}. \tag{3.7}$$

Этот коэффициент нормирован так, что при интегрировании по всем $\mathbf{q}_0$ надо умножать еще на $1/8\pi^3$, как это сделано в (3.3).

4. Вычисление вероятности $w(q)$

Вычислим теперь интересующую нас величину $w(q)$. Наиболее удобно воспользоваться для этой цели системой, в которой сумма импульсов мезотрона и псевдофотона равна нулю.

Вообще говоря, не для всякого псевдофотона такая система существует, но нетрудно видеть, что для всех псевдофотонов, которые участвуют в интересующих нас процессах, ее всегда можно найти. Это сразу следует из того, что в конечном состоянии системы псевдофотонов нет, а потому в этом состоянии всегда можно найти систему центра инерции. Но в этой системе координат, очевидно, и в начальном состоянии полный импульс также равен нулю.

Таким образом, в процессе тормозного излучения (так же как в процессе образования мезотронных пар фотоном в поле ядра) участвуют не все псевдофотоны, а только те из них, для которых существует система центра инерции[6].

Из этого условия мы в дальнейшем и получим пределы интегрирования по импульсу псевдофотонов в интеграле (3.3).

Скорость системы центра инерции относительно системы ядра

$$-\beta = \frac{\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}_0}{k_0}, \tag{4.1}$$

$\mathbf{k}_0$ и ck_0 — импульс и энергия мезотрона.

В этой системе фотон будет описываться потенциалом (3.2), где β имеет значение (4.1).

С помощью градиентного преобразования можно избавиться от скалярного потенциала. Для этого вместо $\mathbf{A}_l$ введем вектор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий уравнению

$$\operatorname{grad}\Phi_l + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_l = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}, \tag{4.2}$$

т. е.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\vec{\beta} - \frac{\mathbf{q}}{q_0}\right)e^{(i/\hbar)(\mathbf{qr}-q_0t)} + \text{компл. сопряж.}, \tag{4.3}$$

тогда соответствующий скалярный потенциал, как легко убедиться, обращается в нуль.

[6] Так как в методе прицельных параметров рассеиваются настоящие фотоны, то там могут рассеиваться фотоны с любой энергией. Отсюда и вытекает необходимость искусственного обрезания малых прицельных параметров.

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы вычислить излучение мезотрона, находящегося в поле, описываемом потенциалом (4.3). Эта задача аналогична вычислению комптон-эффекта, с тем только различием, что здесь мы не можем считать $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$.

Энергия, излучаемая мезотроном в единицу времени в направлении $\mathbf{n}'$, равна[7]:

$$S = \frac{ck'^2}{4\pi}(\mathbf{j}_{\mathrm{I,II}} \times \mathbf{n}')\frac{1}{\Delta}, \tag{4.4}$$

где k' — импульс излученного кванта, $\mathbf{j}_{\mathrm{I,II}}$ — «ток перехода» мезотрона из состояния I в состояние II,

$$\Delta = 1 - \frac{(\mathbf{n}'\mathbf{k}')}{k'}, \tag{4.5}$$

в случае больших энергий Δ равна просто 2 в нашей системе координат. Из (4.4) получаем, что число квантов, излученных в направлении $\mathbf{n}'$, равно

$$\frac{k'}{8\pi h}(\mathbf{j}_{\mathrm{I,II}} \times \mathbf{n}'). \tag{4.6}$$

5. Вычисление тока перехода

Получим теперь выражение для тока перехода. Для этого вычислим в первом приближении функции мезотрона в поле, описываемом потенциалом (4.3). Уравнение для них имеет вид (см. [10], формула (1.5))[8]:

$$(-\pi_k\pi_k + 1)U_i + \frac{1}{2}ie\pi_i Y_{ki}F_{ki} - ieU_kF_{ki} = 0, \tag{5.1}$$

где

$$\pi_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - ie\,A_k,$$

U_i и Y_{ik} — волновые функции мезотрона, F_{ik} — тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = F_{ik}^+ + F_{ik}^- = iF_{ik}'e^{i(\mathbf{qr}-q_0t)} + \text{компл. сопряж.}$$

Полагая

$$U_i = v_i + \varphi_i^+ + \varphi_i^-, \tag{5.2}$$

где v_i — решение волнового уравнение без поля (плоская волна с волновым вектором k_i), и подставляя в уравнение (5.1), получим:

$$\begin{aligned}\varphi_i^+ &= \frac{e}{(q_l + k_l)^2 + 1}\left\{\frac{1}{2}(k_i + q_i)Y_{kl}\,F_{kl}^+ + iF_{ki}^+\,v_k + 2(A_k^+k_k)v_i + (A_kq_k)v_i\right\},\\ \varphi_i^- &= \frac{e}{(q_l - k_l)^2 + 1}\left\{\frac{1}{2}(k_i - q_i)Y_{kl}\,F_{kl}^+ + iF_{ki}^-\,v_k + 2(A_k^-k_k)v_i - (Ak_kq_k)v_i\right\}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

[7] В свое время В. Б. Берестецкий обратил мое внимание, что аналогичная формула в работе Клейна и Нишины не верна (в ней имеется лишний множитель в знаменателе), за что приношу ему свою благодарность.

[8] Во время вычислений мы будем пользоваться системой единиц, в которой μ, c, $\hbar = 1$.

Мезотронный ток перехода в электромагнитном поле имеет вид

$$j = -ie\left\{\overline{U}_k \frac{\partial}{\partial x_i} U_k - U_k \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{U}_k - \overline{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} U_i + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{U}_i - \right.$$

$$\left. - 2ie(U_k \overline{U}_k) A_i + ie(\overline{U}_k A_k) U_i + ie(U_k A_k) \overline{U}_i \right\}. \tag{5.4}$$

Если подставить в это выражение волновые функции (5.2), (5.3), то мы получим, кроме членов, не зависящих от поля, которые можно отбросить, члены четырех типов:

a) члены, пропорциональные $\exp i(-\mathbf{k}' - \mathbf{q} + \mathbf{k})$,
b) члены, пропорциональные $\exp i(-\mathbf{k}' + \mathbf{q} + \mathbf{k})$,
c) члены, сопряженные с a),
d) члены, сопряженные с b),

где $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ — импульсы мезотрона в начальном и конечном состоянии, а $\mathbf{q}$ — импульс псевдофотона.

Как и в случае комптон-эффекта, существенны только члены второго типа (и им сопряженные)[9], члены первого и третьего типов исчезают, так как не удовлетворяют закону сохранения импульса.

В члены второго типа волновая функция конечного состояния входит только сопряженной (причем входит только часть $v + \varphi^-$), а функция начального состояния входит несопряженной. Так как мы в дальнейшем будем выписывать только члены второго типа, то мы под φ^+ всегда будем понимать поправку к волновой функции начального состояния, а под φ^- — поправку к волновой функции конечного состояния.

Как мы уже упоминали, мы будем пользоваться системой, в которой

$$\mathbf{k} + \mathbf{q} = 0. \tag{5.5}$$

В нашем случае, в отличие от того, что имеет место при комптон-эффекте, энергии всех четырех участников процесса (мезотрон до и после рассеяния, фотон и псевдофотон) не равны друг другу.

Учитывая, что энергия мезотрона после излучения равна энергии излученного кванта, запишем закон сохранения энергии:

$$k + q_0 = 2k'. \tag{5.6}$$

Наконец, последнее замечание. Удобнее не выводить никаких общих формул для любых поляризаций мезотрона, а вести вычисления для различных случаев с самого начала отдельно. Так как основную роль играют только процессы без изменения поляризации (тормозное излучение есть процесс второго порядка), то и вычисления будут вестись только для этих случаев.

Как обычно, вместо волновой функции ($\mathbf{u}$ и u_0) вводим две векторные (трехмерные) функции $\mathbf{t}$ и $\vec{\psi}$ для поперечной и продольной поляризаций соответственно.

Для свободного мезотрона эти функции равны:

$$\mathbf{t} = \vec{\alpha}\sqrt{\frac{1}{2k}} \exp i(\mathbf{kr} - kt), \tag{5.7}$$

$$\vec{\psi} = \mathbf{n}\sqrt{\frac{1}{2k}} \exp i(\mathbf{kr} - kt), \tag{5.8}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, параллельный $\mathbf{k}$, а $\vec{\alpha}$ — единичный вектор, перпендикулярный $\mathbf{k}$.

---

[9] См., например, работу Клейна и Нишина [8].

Для поперечной поляризации функция $\mathbf{u}$ просто совпадает с $\mathbf{t}$ (u_0 в этом случае равно нулю). Для продольной поляризации функции $\mathbf{u}$ и u_0 связаны с ψ соотношениями:

$$\mathbf{u} = ik\vec{\psi}, \tag{5.9}$$

$$u_0 = ik|\vec{\psi}|. \tag{5.10}$$

Начнем со случая продольно поляризованного мезотрона. Как мы уже говорили, нам надо рассмотреть только процессы, при которых и в конечном состоянии мезотрон поляризован продольно. Так как для продольного мезотрона векторная волновая функция по (5.9) и (5.10) пропорциональна $k^{1/2}$, а тензорная пропорциональна $k^{-1/2}$, то легко видеть, что в выражении для тока перехода (5.4) останутся только следующие члены:

$$j_i(\mathrm{long}) = e\{i\bar{v}_k\nabla_i\varphi_k^+ - iv_k\nabla_i\bar{\varphi}_k^- - i\bar{v}_k\nabla_k\varphi_i^+ + iv_k\nabla_k\bar{\varphi}_i^- + \\ + 2e(\bar{v}_kv_k)A_i - e(\bar{v}_kA_k)v_i + e(v_kA_k)\bar{v}_i\}e^{i(-k'r-k't)}. \tag{5.11}$$

Операция ∇, примененная к φ^+, эквивалентна умножению на $i(k_i+q_i)$, а так как $\mathbf{k}+\mathbf{q}=0$, то в этом случае отлична от нуля только ∇_0, эквивалентная умножению на $-i(k+q_0)$.

Аналогично

$$\nabla_i\bar{\varphi}_k^- = i(q_i - k_i')\bar{\varphi}_k^-.$$

Заметим еще, что в окончательном выражении для тока несущественны члены, направленные по $\mathbf{n}'$ (направление волнового вектора мезотрона в конечном состоянии), так как в дальнейшем ток умножается векторно на $\mathbf{n}'$ (см. (4.6)), то эти члены могут быть сразу отброшены.

Таким образом, получаем:

$$j_i(\mathrm{long}) = e\{q_iv_k\bar{\varphi}_k^- - \bar{v}_0(k_0+q_0)\varphi_i^+ - (q_k-k_k')v_k\bar{\varphi}_i^- + 2e(\bar{v}_kv_k)A_i - e(\bar{v}_kA_k)v_i\}e^{i(-k'r-k't)}. \tag{5.12}$$

Рассмотрим сначала члены, содержащие $\bar{\varphi}^-$, т. е. члены

$$e\{q_iv_k\bar{\varphi}_k^- - (q_k-k_k')v_k\bar{\varphi}_i^-\}. \tag{5.13}$$

Подставляя выражение для $\bar{\varphi}_k^-$ из (5.3), в котором еще надо учесть, что мы пользуемся системой центра инерции, получим:

$$\frac{e^2}{2(kk')^{1/2}(1+\mathbf{nn}')}\{q_i[2(A_ik_i')\bar{v}_kv_k + (k_kA_k)v_kv_k - iF_{kr}\bar{v}_kv_r] + (q_k-k_k')v_kF_{ri}\bar{v}_r\}. \tag{5.14}$$

Наконец, переходя к трехмерным обозначениям, пользуясь (5.9) и (5.10), получим[10)]

$$\frac{(kk')^{1/2}}{2}e^2\left\{-\frac{1}{2(1+\mathbf{nn}')}[(\mathbf{nn}')(\mathbf{An}') - (\mathbf{An})]\mathbf{n} - \frac{1}{2}\left[(\mathbf{nn}') + \frac{q_0}{k}\right]\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mathbf{An}')\mathbf{n}\right\}. \tag{5.15}$$

Аналогично член φ^+ после преобразований перейдет в

$$\frac{(kk')^{1/2}}{2}\cdot e^2\mathbf{A}, \tag{5.16}$$

[10)] Опуская для краткости экспоненты.

наконец, последние два члена в (5.12) дадут:

$$\frac{(kk')^{1/2}}{2}\cdot e^2\left[2(\mathbf{n}\mathbf{n}'-1)\mathbf{A}-(\mathbf{n}'\mathbf{A})\mathbf{n}\right]. \tag{5.17}$$

Суммируя (5.15), (5.16) и (5.17), получим окончательно:

$$j(\text{long})=\frac{(kk')^{1/2}}{2}e^2\left\{-\frac{\mathbf{n}}{1+\mathbf{n}\mathbf{n}'}\left[(\mathbf{n}\mathbf{n}')(\mathbf{A}\mathbf{n}')-(\mathbf{A}\mathbf{n})\right]+\frac{3}{2}(\mathbf{n}\mathbf{n}')\mathbf{A}-\frac{1}{2}\frac{q_0}{k}\mathbf{A}-\mathbf{A}-\frac{1}{2}(\mathbf{n}'\mathbf{A})\mathbf{n}\right\}. \tag{5.18}$$

Если в эту формулу подставить $\mathbf{A}=\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{k}$, то мы должны получить формулу для комптон-эффекта. Это служит проверкой наших вычислений.

В (5.18) мы, вместо $\mathbf{A}$, должны подставить его значение (4.3):

$$\mathbf{A}=\vec{\beta}+\frac{k}{q_0}\mathbf{n}. \tag{5.19}$$

Удобно разбить $\mathbf{A}$ на два вектора так, чтобы один лежал в плоскости рассеяния $(\mathbf{n},\mathbf{n}')$, а другой был бы перпендикулярен к ней:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2, \tag{5.20}$$

где

$$\mathbf{A}_1=\vec{\beta}_\perp, \tag{5.21}$$

$$\mathbf{A}_2=\vec{\beta}_\parallel+\frac{k}{q_0}\mathbf{n}. \tag{5.22}$$

Соответственно этому ток (5.18) разобьем на две части:

$$j_1=\frac{(kk')^{1/2}}{2}e^2\left[\frac{3}{2}(\mathbf{n}\mathbf{n}')-\left(1+\frac{q_0}{2k}\right)\right]\beta_\perp, \tag{5.23}$$

$$j_2=\frac{(kk')^{1/2}}{2}e^2\left[\frac{\mathbf{n}}{1+\mathbf{n}\mathbf{n}'}\left[(\mathbf{A}_2\mathbf{n})-(\mathbf{n}\mathbf{n}')(\mathbf{A}_2\mathbf{n}')\right]+\frac{3}{2}(\mathbf{n}\mathbf{n}')\mathbf{A}_2-\frac{1}{2}\frac{q_0}{k}\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_2-\frac{1}{2}(\mathbf{n}'\mathbf{A}_2)\mathbf{n}\right]. \tag{5.24}$$

Введем следующие обозначения. Угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ (угол рассеяния) обозначим через ϑ. Угол $(\mathbf{n},\vec{\beta})$ — через φ; угол $(\mathbf{n},\beta_\parallel)$ — через φ' и угол между плоскостью $(\mathbf{n},\vec{\beta})$ и $(\mathbf{n},\mathbf{n}')$ — через α. Тогда

$$\begin{aligned}\beta_\perp&=\beta\sin\varphi\sin\alpha,\\ \beta_\parallel&=\beta\left(1-\sin^2\varphi\sin^2\alpha\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{5.25}$$

так как

$$q_0=(q\vec{\beta})=-(k\vec{\beta}), \tag{5.26}$$

то

$$\cos\varphi=-\frac{q_0}{k\beta},\qquad \cos\varphi'=-\frac{q_0}{k\beta_\parallel}.$$

Умножая (5.23) и (5.24) векторно на $\mathbf{k}'$ (т. е. беря rot) и используя (5.26), получим:

$$|\mathbf{j}_2\times\mathbf{k}'|=\frac{k'}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{(kk')^{1/2}}{4}\cdot e^2\left[-\frac{q_0\beta_\parallel}{k}\cos\vartheta\sin\varphi'+\left(1-\frac{q_0^2}{k^2}\right)\sin\vartheta+\beta_\parallel\sin\varphi\right], \tag{5.27}$$

$$|\mathbf{j}_1\times\mathbf{k}'|=\frac{\beta_\perp k'}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{(kk')^{1/2}}{4}\cdot e^2\left(1+\frac{q_0}{2k}-\frac{3}{2}\cos\vartheta\right). \tag{5.28}$$

Подставляя значения для $\beta_{\|}$ и $\beta_{\perp}$, возводя в квадрат и интегрируя по α и ϑ, получим по формуле (4.6) искомую вероятность $w(\mathbf{q})$ для продольного мезотрона:

$$\frac{1}{16}\cdot e^2\cdot kk^{1,2}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\left[\left(\beta^2-\frac{q_0^2}{k^2}\right)\left(4+2\frac{q_0}{k}+\frac{2}{3}\frac{q_0^2}{k^2}\right)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{q_0^2}{k^2}\right)^2\right]. \tag{5.29}$$

Аналогично получается $w(\mathbf{q})$ для поперечно поляризованного мезотрона:

$$\frac{1}{32}\cdot e^2\cdot kk^{1,2}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\left[\left(\beta^2-\frac{q_0^2}{k^2}\right)\left(\frac{22}{3}-2\frac{q_0}{k}+\frac{4}{3}\frac{q_0^2}{k^2}\right)+\frac{4}{3}\left(1-\frac{q_0^2}{k^2}\right)^2\right]. \tag{5.30}$$

Складывая (5.29) с удвоенным (5.30) и деля на 3, получаем $w(\mathbf{q})$, усредненную по поляризациям:

$$\frac{1}{48}\cdot e^2\cdot kk^{1,2}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\left[\left(\beta^2-\frac{q_0^2}{k^2}\right)\left(\frac{34}{3}+2\frac{q_0^2}{k^2}\right)+2\left(1-\frac{q_0^2}{k^2}\right)^2\right]. \tag{5.31}$$

6. Вычисление поперечника

Перейдем теперь к исходной системе координат, в которой покоится ядро. Для этого выпишем формулы преобразования. Обозначим

$$|\mathbf{q}_0|=\xi|\mathbf{k}_0|=\xi E,\qquad x=\cos(\mathbf{q}_0,\mathbf{k}_0), \tag{6.1}$$

тогда

$$\beta=-\frac{\mathbf{q}_0+\mathbf{k}_0}{k_0},\quad 1-\beta^2=-2\xi x-\xi^2, \tag{6.2}$$

получим

$$kk'=-\frac{\xi x}{2}E^2,\qquad k'=\sqrt{1-\beta^2}\frac{E}{2},\qquad \frac{q_0}{k}=1+\frac{\xi}{x}. \tag{6.3}$$

Учитывая еще, что

$$\rho=\rho'\frac{\xi x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{6.4}$$

по формуле (3.6), и умножая на $\frac{16\pi^2}{q^4}\,\frac{2\pi q^2dq}{8\pi^3}$, получим для подинтегрального выражения в (3.3) (переходя к обычным единицам):

$$\frac{1}{144}r_0^2\left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2\left[\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)(34x^2+6\xi^2+12\xi x+6x^2)-\frac{12\xi x+6\xi^2}{x^2}\right]d\xi\,dx. \tag{6.5}$$

Полная вероятность получается интегрированием (6.5) по ξ и x. Пределы интегрирования определяются из условия, что

$$0<\beta^2<1,$$

т. е. условия существования системы центра инерции. Из значения (6.2) для β получаем

$$0 \leqslant \xi \leqslant 2,$$
$$-1 \leqslant x \leqslant \frac{\xi}{2}. \tag{6.6}$$

Интегрируя (6.5) в пределах (6.6), мы получим окончательно для поперечника тормозного излучения мезотрона в кулоновском поле следующую формулу

$$\sigma = \frac{1}{6}\alpha v_0^2 \left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2. \tag{6.7}$$

7. Граница применимости и поперечник для больших энергий

Полученная формула (6.7) не может иметь место для сколь угодно больших энергий, так как она дает слишком большой рост поперечника. Такое же положение, как известно, было и в случае комптон-эффекта. Для этого процесса показано, что формула, полученная методом теории возмущений, остается верной до тех пор, пока энергия рассеянного кванта в системе координат, где мезотрон вначале покоился, не достигает величины $\frac{1}{\alpha}\mu c^2$. После этого рассеяние практически прекращается.

В инвариантном виде это можно формулировать так, что рассеяние происходит только до тех пор, пока четырехмерное произведение начального импульса мезотрона на импульс рассеянного фотона удовлетворяет неравенству

$$-k_{0i}k_i' \ll \frac{1}{\alpha}\left(\mu c^2\right) = \left(Mc\right)^2, \tag{7.1}$$

где $M = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\,\mu$.

Так как в такую формулировку не входит импульс падающего фотона, то она остается в силе и для нашего процесса, когда в начальном состоянии имеется псевдофотон.

Таким образом, для применимости формулы (6.7) получаем неравенство

$$-kk'(1 + \cos\vartheta) \ll \left(Mc^2\right)^2. \tag{7.2}$$

Переходя к системе ядра и отбрасывая численные коэффициенты, получим

$$\theta^2 \ll -\frac{\left(Mc^2\right)^2}{\xi x} \cdot \frac{1}{E^2}, \tag{7.3}$$

где $\theta = \pi - \vartheta$. Отсюда видно, что, когда

$$E \ll Mc^2, \tag{7.4}$$

рассеяние происходит во всех углах и потому описывается формулой (6.7).

Таким образом, неравенство (7.4) и определяет границу применимости наших вычислений.

Если энергия мезотрона так велика, что неравенство (7.4) не выполняется, то рассеяние в системе центра инерции будет происходить только в углах, удовлетворяющих неравенству (7.3).

Это обстоятельство приводит к тому, что выражение (6.5) в области, где

$$\xi|x| \gg \frac{(Mc^2)^2}{E^2}, \tag{7.5}$$

надо еще умножить на

$$\frac{(Mc^2)^2}{E^2}\frac{1}{\xi|x|}. \tag{7.6}$$

Действительно, как видно из (5.27), рассеяние происходит почти изотропно, а потому интегрирование по всем ϑ приводит к появлению только численных коэффициентов.

В случае же больших энергий малые углы обрезаются, и потому появляется фактор (7.6).

Таким образом, когда энергия мезотрона

$$E \gg Mc^2, \tag{7.7}$$

мы должны разбить область интегрирования на две части:

$$\xi|x| \gg \frac{(Mc^2)^2}{E^2} \tag{7.8}$$

и

$$\xi|x| \ll \frac{(Mc^2)^2}{E^2}. \tag{7.9}$$

Для переменных ξ и x получаем следующие области:

$$0 < \xi < \frac{M^2c^4}{E^2} \qquad \frac{\xi}{2} < |x| < 1 \qquad \xi|x| < \frac{(Mc^2)^2}{E^2}, \tag{7.10}$$

$$\frac{(Mc^2)^2}{E^2} < \xi < \frac{Mc^2}{E} \qquad \frac{\xi}{2} < |x| < \frac{(Mc^2)^2}{E^2}\cdot\frac{1}{\xi} \qquad \xi|x| < \frac{(Mc^2)^2}{E^2}, \tag{7.11}$$

$$\frac{(Mc^2)^2}{E^2} < \xi < \frac{Mc^2}{E} \qquad \frac{(Mc^2)^2}{E^2}\cdot\frac{1}{\xi} < x < 1 \qquad \xi|x| > \frac{(Mc^2)^2}{E^2}, \tag{7.12}$$

$$\frac{Mc^2}{E} < \xi < 2 \qquad \frac{\xi}{2} < |x| < 1 \qquad \xi|x| > \frac{(Mc^2)^2}{E^2}. \tag{7.13}$$

В областях (7.10) и (7.11) рассеяние описывается формулой (6.5), а в областях (7.12) и (7.13) ею же, умноженной на (7.6).

В областях (7.10) и (7.11) $\xi \ll 1$, а потому для них в формуле (6.5) можно пренебречь членами, содержащими ξ.

Интегрируя по x, получаем в области (7.10)

$$\frac{5}{27}r_0\left(\frac{E}{Mc^2}\right)^2 d\xi, \tag{7.14}$$

в области (7.11)

$$r_0^2\left(\frac{E}{Mc^2}\right)^2\frac{d\xi}{\xi}. \tag{7.15}$$

В области (7.12) и (7.13), по (6.5) и (7.6), оставляя только главные члены, получим:

$$\sim r_0^2\frac{d\xi\, dx}{\xi x}. \tag{7.16}$$

Интегрируя в указанных пределах, получим, что главную роль играют области (7.12) и (7.13), которые и дают для полного сечения следующий результат:

$$\sigma \sim r_0^2 \ln 2 \frac{E}{Mc^2}. \tag{7.17}$$

(Область (7.11) дает член, пропорциональный первой степени логарифма, область (7.10) — член, не зависящий от энергий.)

Таким образом, для энергий мезотрона

$$E \gg Mc^2 \tag{7.18}$$

сечение оказывается пропорциональным квадрату логарифма энергии.

Этот результат может быть также получен и методом прицельных параметров[11]. Для этого мы должны брать для частот, меньших, чем $\frac{1}{\alpha}\mu c^2$, сечение для комптон-эффекта $r_0^2 \cdot \frac{E}{\mu c^2}$, а для больших энергий — сечение $\frac{1}{\alpha} r_0^2$ (см. [5]).

За верхний предел частот мы должны, согласно сказанному в § 2, брать $\frac{E}{\hbar} \cdot \frac{E}{\mu c^2}$ (последний множитель появляется при переходе в систему координат, в которой покоится мезотрон). Соответственно этому мы получим поперечник как сумму двух интегралов:

$$\alpha \cdot r_0^2 \int_0^{\frac{1}{\alpha}\frac{\mu c^2}{\hbar}} \frac{\hbar\omega}{\mu c^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \ln \frac{E^2}{mc^2 \cdot \hbar\omega} \sim r_0^2 \ln \frac{E}{Mc^2}, \tag{7.19}$$

$$r_0^2 \int_{\frac{1}{\alpha}\mu c^2}^{\frac{E^2}{mc^2\hbar}} \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{E^2}{mc^2\hbar\omega} \sim r_0^2 \ln 2 \frac{E}{Mc^2}. \tag{7.20}$$

8. Учет отдачи и радиуса ядра

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии на сечение конечности размеров ядра (т. е. зависимость сечения от Z) и влияние отдачи (переданного ядру импульса).

Как известно, сечение оказывается пропорциональным Z, если излучение происходит на расстоянии меньшем, чем размеры ядра. В случае мезотрона, как мы говорили, излучение происходит на расстоянии $\frac{\hbar c}{E}$. При $E \gg \mu c^2$ $\frac{\hbar c}{E} \ll R$, а потому все полученные сечения пропорциональны Z.

В связи с этим нам придется ниже рассмотреть еще отдельно влияние больших прицельных параметров, которые хотя и дают сечение с более слабой зависимостью от энергий, но зато пропорциональное Z^2. Как мы увидим, это приведет к тому, что большие параметры играют основную роль в полном сечении.

Отдача ядра при поглощении псевдофотона равна его импульсу. В случае, когда энергия $E < Mc^2$, максимальный импульс фотона также меньше Mc, а потому отдачей можно пренебречь[12].

Для больших энергий разберем каждую из четырех областей (7.10–7.13) отдельно.

В области (7.10) максимальный импульс псевдофотона $E\xi$ равен также Mc, то же самое имеет место и в областях (7.11), (7.12). В области же (7.13) участвуют

---

[11] Однако метод прицельных параметров не позволяет выяснить роль отдачи (см. ниже).

[12] M, примерно, равно массе протона.

псевдофотоны со сколь угодно большим импульсом (вплоть до импульса самого мезотрона). Поэтому отдачу надо учитывать только в области (7.13). Но мы видим, что интеграл по этой области имеет тот же порядок величины, что и интеграл по области (7.12), в которой отдачу учитывать не надо. Поэтому, если только отдача не увеличивает сечения, мы ею можем вовсе пренебречь. Это предположение, по всей вероятности, оправдывается, так как известно, что частицы со спином $1/2$ в процессах рассеяния получают импульс только порядка Mc.

Рассмотрим теперь большие параметры столкновений. Так как в этом случае ξ заведомо мало, то можно для этой цели пользоваться формулой (7.14) (или просто методом прицельных параметров). Интегрируя ее по ξ от 0 до $\frac{\hbar c}{ER}$, получаем для сечения

$$\sigma \sim Z^2\alpha \cdot r_0^2 \frac{E}{Mc^2} \cdot \frac{\hbar}{McR}, \tag{8.1}$$

т. е. сечение получается прямо пропорциональным первой степени энергии и квадрату заряда ядра.

Пределы применимости определяются, как мы видели, тем, что ξ должно быть меньше $\frac{M^2c^4}{E^2}$, а так как ξ, с другой стороны, меньше $\frac{\hbar c}{ER}$, то мы получим

$$\frac{\hbar c}{ER} \ll \frac{M^2c^4}{E^2},$$

т. е. формула (8.1) справедлива тогда, когда энергия мезотрона

$$E \ll \frac{M^2c^3R}{\hbar}. \tag{8.2}$$

Заметим, что так как $\frac{\hbar}{Mc} < R$, то это неравенство слабее, чем (7.7).

Для того, чтобы оценить численный коэффициент и показать, что он равен по порядку величины единице, вычислим сечение (8.1) точно для заданного распределения плотности заряда по объему ядра. Для этого мы должны при вычислении, вместо компоненты Фурье (3.7) поля точечного заряда, пользоваться компонентой Фурье поля, созданного зарядом с плотностью $ze\rho$. Легко видеть, что это сводится к умножению (3.7) на компоненту Фурье от плотности ρ, а следовательно, к умножению (6.14) на ρ. Переходя в (6.14) обратно от ξ к $\mathbf{q}$

$$\frac{5}{27} \cdot \frac{r_0^2}{\mu c^2} \cdot \frac{E}{\mu c^2} \cdot \rho_{\mathbf{q}}\, d\mathbf{q}, \tag{8.3}$$

но $\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{4\pi}(E_{\mathbf{q}} q) = \frac{1}{4\pi} E_{\mathbf{q}}$, где $E_{\mathbf{q}}$ — электрическое поле, которое, как известно, направлено по $\mathbf{q}$. Следовательно, (8.3) переходит в

$$\frac{1}{16\pi^2} \cdot \frac{5}{27} \cdot \frac{r_0^2}{\mu c^2} \cdot \frac{E}{\mu c^2} E_{\mathbf{q}}^2 q^2\, dq, \tag{8.4}$$

но последний интеграл можно перевести в интеграл по объему:

$$\int E_{\mathbf{q}}^2 q^2\, dq = 2\pi^2 \int E^2\, dv = 16\pi^3 W, \tag{8.5}$$

где W — электростатическая энергия ядра. Таким образом, получаем

$$\sigma \sim \frac{5\pi}{27} r_0^2 \frac{E}{Mc^2} \cdot \frac{W}{Mc^2}, \tag{8.6}$$

для равномерно заряженного ядра имеем $E = \frac{2}{5}\frac{Z^2e^2}{R}$ и

$$\sigma \sim \frac{2\pi}{27} \cdot Z^2 \cdot r_0^2 \cdot \frac{E}{Mc^2} \cdot \frac{\hbar}{McR}; \tag{8.7}$$

таким образом, коэффициент оказывается действительно порядка единицы. Перейдем теперь к случаю больших энергий

$$E \gg \frac{M^2c^3R}{\hbar}. \tag{8.8}$$

Для этих энергий получаем путем тех же операций, что и выше,

$$\sigma \sim Z^2 \cdot r_0^2 \cdot \ln^2\frac{E}{Mc^2}. \tag{8.9}$$

Кристи и Кусака обращают внимание на следующее обстоятельство. При вычислении, считая $E \gg Mc^2$, откидываются все члены, кроме одного, в который энергия входит в наивысшей степени. Для поперечника рассеяния на точечном заряде (пропорциональном E^2) это законно. Однако для рассеяния на ядре конечного радиуса (которое пропорционально E) следующие члены разложения из-за численных коэффициентов могут оказаться столь же большими, как и главный член, пропорциональный энергии.

Это видно из того, что коэффициент при энергии в поперечнике для комптон-эффекта равен $5\pi/18$, а коэффициент при члене, не зависящем от энергии, во всяком случае не меньше, чем $8\pi/3$ (коэффициент в формуле Томсона), т. е., по меньшей мере, в девять раз больше.

Чтобы оценить дальнейшие члены разложения, Кристи и Кусака вычисляют сечения тормозного излучения методом прицельных параметров, пользуясь точной формулой для комптон-эффекта. Минимальный прицельный параметр они выбирают так, чтобы коэффициент при члене, пропорциональном энергии, совпал с вычисленным точным методом.

В результате они получают в дифференциальном сечении дополнительные члены, пропорциональные $\ln^2 E$, $\ln E$, и члены, не зависящие от энергии.

Однако точность такой оценки весьма мала по следующим причинам:

a) метод прицельных параметров есть разложение по степеням $\frac{1}{E}$, а потому непоследовательно при пользовании им брать несколько членов в получающемся сечении;

b) как нетрудно видеть, в сечении для потери энергии (формула (3) в работе Кристи и Кусака) четвертый член разложения играет даже большую роль, чем второй и третий; нет никаких оснований надеяться, что этот метод может дать четыре члена;

c) для проверки метода с его помощью из поперечника для комптон-эффекта частицы со спином 0 можно вычислить дифференциальное сечение тормозного излучения с точностью до второго члена.

При этом оказывается, что метод прицельных параметров дает уже значительную погрешность даже во втором члене.

Из этого приходится сделать вывод, что такая оценка не может быть сколько-нибудь точной, хотя сам факт, что последующие члены разложения не малы, по-видимому, справедлив.

Значение же их может быть получено только тогда, когда это будет сделано более точным методом.

Поэтому мы все же оставляем в сечении только первый член и считаем, что при этом получается несколько (до двух раз) преуменьшенное сечение.

9. Результаты

Таким образом, мы получаем окончательные выражения сечений для трех областей в зависимости от энергии падающего мезотрона:

$$\mu c^2 \ll E \ll Mc^2$$

$$\sigma = Zr_0^2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{E}{Mc^2}\right)^2 + \alpha Z\frac{E}{Mc^2}\cdot\frac{\hbar}{McR}\right], \tag{9.1}$$

$$Mc^2 \ll E \ll Mc^2\frac{McR}{\hbar}$$

$$\sigma = Zr_0^2\left[b\ln 2\frac{E}{Mc^2} + \alpha Z\frac{E}{Mc^2}\cdot\frac{\hbar}{McR}\right], \tag{9.2}$$

$$Mc^2\cdot\frac{McR}{\hbar} \ll E$$

$$\sigma = Z\cdot r_0^2\cdot b\left[\ln 2\frac{E}{Mc^2} + Z\ln 2\frac{E}{Mc^2}\frac{\hbar}{McR}\right], \tag{9.3}$$

где a, b — постоянные порядка единицы (a для ядра с равномерно распределенной плотностью равно $2\pi/27$).

Мы видим из этих формул, что уже для Z порядка 10 (для воздуха) с точностью до коэффициента можно пренебрегать первыми членами в этих формулах. Так как рассеяние в совсем легких элементах — в водороде, гелии — не представляет интереса, то можно пользоваться упрощенными формулами

$$E \ll Mc^2\frac{McR}{\hbar}$$

$$\sigma \sim a\cdot r_0^2 Z^2\frac{E}{Mc^2}\frac{\hbar}{McR}, \tag{9.4}$$

$$E \gg Mc^2\frac{McR}{\hbar}$$

$$\sigma \sim b\cdot r_0^2 Z^2\ln 2\frac{E}{Mc^2}\frac{\hbar}{McR}. \tag{9.5}$$

Таким образом, мы получаем, что эффективный поперечник растет сначала несколько сильнее, чем Z (как Z^2/R), а потом становится пропорциональным Z^2.

Можно еще для $E \ll Mc^2\frac{McR}{\hbar}$ получить выражение для распределения излученных квантов по энергиям.

Вычисления упрощаются тем, что в этом случае можно считать $\xi \ll 1$.

Аналогично выражению (8.3), получим для нашего случая

$$\frac{1}{72}\cdot\frac{r_0^2}{Mc^2}\cdot\frac{E}{Mc^2}\left(11 - \cos\vartheta + 7\cos^2\vartheta\right)\sin\vartheta\, d\vartheta\rho_q\, dq, \tag{9.6}$$

где ρ_q — компонента Фурье от плотности заряда. Подставляя $1 - \cos\vartheta = 2\varepsilon$, где ε — энергия излученного кванта (в единицах $E/(Mc^2)$), и интегрируя по q, придем к выражению

$$a'Z^2\cdot v_0^2\cdot\frac{E}{Mc^2}\cdot\frac{\hbar}{McR}\cdot\left(2 - 2\varepsilon + 7\varepsilon^2\right)d\varepsilon, \tag{9.7}$$

где a' для равномерно заряженного ядра $\pi/45$.

Для полной потери энергии получим

$$\frac{5\pi}{108}\cdot Z^2\cdot r_0^2\cdot\frac{E}{Mc^2}\cdot\frac{\hbar}{McR}. \tag{9.8}$$

В формуле (9.7) существенно то, что распределение по энергиям полученного кванта не зависит от распределения заряда по объему ядра, так как от этого зависит только коэффициент.

10. Образование мезотронных пар в поле ядра

Как известно, поперечник для образования мезотронных пар γ-квантом в поле ядра может быть получен из дифференциального поперечника для возможного измерения. Не приводя вычислений, которые можно найти, например, в упомянутой работе Кристи и Кусака, приводим окончательный результат.

Как и в случае тормозного излучения, образование пар, оказывается, происходит в основном на больших расстояниях от ядра и описывается теми же формулами (9.4) и (9.5), где только под E надо понимать энергию кванта ($E \gg \mu c^2$), а постоянные a и b имеют другое значение (a для случая равномерно заряженного ядра равно $2\pi/9$, b — порядка единицы).

Для дифференциального поперечника при $E \ll Mc\cdot\frac{McR}{\hbar}$ получается

$$\sigma \sim \frac{3}{10}a\cdot Z^2\cdot r_0^2\cdot\frac{E}{Mc^2}\cdot\frac{\hbar}{McR}\cdot\frac{7E_+^2+12E_+E_-+7E_-^2}{(E_++E_-)^2\mu c^2}dE_+, \tag{10.1}$$

где a имеет значение, указанное выше[13].

Мне бы хотелось выразить мою искреннюю благодарность проф. Л. Ландау и И. Померанчуку за постоянный интерес к работе и многочисленные дискуссии.

Литература

1. *Booth F., Wilson A. H.* Proc. Roy. Soc., **A175**, 483, 1940.
2. *Kobayasi M., Utiyama R.* Sc. Pap. Inst. of Phys. Chem. Res., **37**, 221, 1940; Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 22, 882, 1940.
3. *Christy R. F., Kusaka S.* Phys. Rev., **59**, 405, 1941.
4. *Oppenheimer J. R., Snyder H., Serber R.* Phys. Rev., **57**, 75, 1940.
5. *Ландау Л., Смородинский Я.* ЖЭТФ, **11**, 55, 1941.
6. *Massey H. S., Corben H. C.* Proc. Cambr. Phil. Soc., **35**, 463, 1940.
7. *Weizsäcker C. F.* Zs. f. Phys., **88**, 612, 1934.
8. *Klein O., Nishina I.* Zs. f. Phys., **52**, 853, 1929.
9. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теория поля. 1941.
10. *Смородинский Я.* ЖЭТФ, **10**, 840, 1940.

[13] При этом надо учесть, что при усреднении по поляризациям фотона надо делить на 2, а при усреднении по поляризациям мезотрона при вычислении поперечника тормозного излучения — на 3. Это не учитывают Бусс и Вильсон.

О волновых уравнениях для частиц с переменным спином

В. Л. Гинзбург, Я. А. Смородинский

В последнее время, в связи с рядом задач теории, были построены релятивистские волновые уравнения для частиц $(i—j)$ с переменным спином и массой покоя [1, 2, 3, 4].

При этом под частицей $(i—j)$ понимается частица, могущая находиться в состоянии со спинами i и j и различными значениями массы покоя. При отсутствии поля совокупность решений уравнения для частицы $(i—j)$, отвечающих заданному значению импульса, состоит из решений, которым соответствует спин i, и решений, которым соответствует значение спина, равное j; кроме того, имеются решения, отличающиеся знаком энергии (в случае полуцелых спинов) и знаком заряда (в случае целых спинов). При наличии поля между всеми упомянутыми состояниями возможны переходы. Поэтому при наличии взаимодействия уравнения для частиц с переменным спином, вообще говоря, не распадаются. При этом под распадением уравнения для частицы $(i—j)$ понимается, очевидно, возможность путем некоторого преобразования волновых функций привести эти уравнения к системе независимых друг от друга уравнений для частицы со спином i и частицы со спином j. При отсутствии поля распадение уравнений может иметь место, и цель настоящей заметки как раз и состоит в том, чтобы осветить этот вопрос. Посмотрим поэтому, распадаются ли при отсутствии поля упомянутые выше уравнения.

Уравнения для частицы (0—1) при отсутствии поля таковы [1]:

$$\begin{aligned} -aU_\nu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} G_{\mu\nu} - a\chi_\nu = 0, \\ -b\varphi + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi_\mu + a\frac{\partial}{\partial x_\mu}U_\mu = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \chi_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \quad \text{и} \quad \nu, \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Легко видеть, что если ввести новую функцию

$$V_\nu = U_\nu + \frac{\alpha}{a}\chi_\nu, \tag{2}$$

то уравнения (1) приобретают вид

$$\begin{aligned} -aV_\nu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} G'_{\mu\nu} = 0, \quad \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \\ G'_{\mu\nu} = \frac{\partial V_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\nu}, \\ -\frac{ab}{a-\alpha^2}\varphi + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi_\mu = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

т. е. распадаются. Поскольку функция Лагранжа, выбранная в [1], является наиболее общей для частицы (0—1), сделанный вывод о распадении уравнений для этого случая также носит общий характер.

Введение взаимодействия с электромагнитным полем путем замены в использованной в [1] функции Лагранжа $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ на $\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu$ (A_μ — потенциал поля) эквивалентно введению в функцию Лагранжа, выраженную через V_ν и χ_ν, помимо этой замены, также члена, пропорционального ($G'_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\varphi^*$ — компл. сопряж.), где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженностей поля. Форма теории частицы (0—1), в которой без поля уравнения распадаются, удобнее использованной в [1]. При этом и результаты [1] в значительной мере упрощаются.

Можно показать, что уравнения для частицы $(\frac{1}{2}—\frac{1}{2})$ [2] при отсутствии поля всегда (т. е. при любых значениях коэффициентов) распадаются. То же имеет место в случае взаимодействия с электромагнитным полем, вводимым путем замены $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ на $\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu$. Если взаимодействие носит другой характер, например в случае электромагнитного поля содержит $F_{\mu\nu}$, распадение места не имеет. Уравнения для частицы (0—0) также всегда распадаются (задача в этом случае сводится просто к одновременному приведению двух квадратичных форм к сумме квадратов).

Распадаются, далее, при отсутствии поля уравнения для частицы (1—2), которые в результате ряда преобразований имеют вид

$$\begin{gathered}\varkappa^2 A_{\mu\nu} - \Box A_{\nu\mu} = -a\frac{\varkappa^2 - q^2}{2\varkappa^2}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}\right),\\ \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = -\frac{a^2 q^2}{2\varkappa^2}U_\mu,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{4} A_{\nu\nu} = 0,\\ q^2 U_\nu - \Box U_\nu = 0, \quad \frac{\partial U_\nu}{\partial x_\nu} = 0.\end{gathered}$$

Эти уравнения приводятся к системе независимых уравнений для частиц со спином 1 и со спином 2 в результате замены волновых функций

$$B_{\nu\mu} = A_{\nu\mu} + \frac{\alpha}{2\varkappa^2}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}\right). \tag{5}$$

В случае частиц со спином $3/2$, 2 и выше введение поля связано с рядом особенностей [3, 4]. Поэтому в этих случаях распадение уравнений при отсутствии поля не приводит непосредственно к распадению функции Лагранжа и упрощениям теории взаимодействия частиц с полем.

Для частицы $(\frac{1}{2}—\frac{3}{2})$ нам, впрочем, не удалось разделить уравнения и при отсутствии поля. Уравнения в этом случае имеют вид [3, 4]

$$\begin{aligned}&\gamma^\nu\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \varkappa A^\mu + \frac{ig}{\hbar c}\gamma^\mu\Psi - i\alpha a\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} = 0,\\ &\gamma^\nu\frac{\partial\Psi}{\partial x_\nu} + b\Psi = 0,\\ &\gamma^\mu A^\mu = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

По аналогии с предыдущими случаями распадение нужно пытаться получить в результате замены функций

$$B^{\mu} = A^{\mu} + \xi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \eta \gamma^{\mu} \Psi, \tag{7}$$

где ξ и η — постоянные, которые нужно определить как раз из условия распадения. Несмотря на то, что преобразование (7) является наиболее общим, так как члены типа $\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\frac{\partial \Psi}{\partial \chi_{\nu}}$ и $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\nu}}$ сводятся к членам, использованным в формуле (7), распадения таким образом добиться нельзя.

Распадение тех или иных уравнений при отсутствии поля не является, разумеется, их недостатком и не препятствует их использованию. Общий вопрос о том, когда уравнения для частиц с переменным спином распадаются и когда это не имеет места, еще не ясен.

Литература

1. *Гинзбург В.* ДАН, **31**, 857, 1941.
2. *Гинзбург В., Немировский П.* ЖЭТФ, **12**, 1942.
3. *Гинзбург В.* ДАН, **37**, 191, 1942.
4. *Гинзбург В.* ЖЭТФ, **13**, № 1–2, 1943.
5. *Firz M. P., Pauli W.* Proc. Roy. Soc., **173**, 221, 1939.

О комптон-эффекте и теории дырок

Я. А. Смородинский

В недавно появившейся работе Баба и Базу [1] авторы вычисляют эффективное сечение комптон-эффекта методом теории дырок (т. е. принимая во внимание, что все уровни отрицательной энергии заняты электронами). При этом, в противоречии с обычно принятым мнением, авторы находят для сечения значение, не совпадающее с формулой Клейна—Нишины (вычисленной с помощью обычной теории Дирака, как это, например, сделано в книге Гайтлера [2]). Отсюда Баба и Базу делают далеко идущие выводы о возможной несостоятельности теории Дирака. Однако, как будет показано, вывод Баба и Базу содержит ошибку. Правильно проведенные вычисления приводят к формуле Клейна—Нишины независимо от того, каким методом их проводить. Поэтому утверждение Баба и Базу о внутренней противоречивости теории Дирака целиком ошибочно.

Вывод Баба и Базу состоит в следующем. Рассмотрим, например, процесс, при котором, по обычной схеме, электрон вначале излучает квант и переходит в состояние с отрицательной энергией, а затем поглощает первоначальный квант и переходит в конечное состояние. Матричный элемент, соответствующий этому процессу, равен (с точностью до несущественного для нас множителя)

$$\frac{(\bar{u}_E \alpha u_{-E'})(\bar{u}_{-E'} \alpha u_m)}{m + k_0 + E'}, \tag{1}$$

где u_m, $u_{-E'}$, u_E — волновые функции (спинорные их части) начального, промежуточного и конечного состояний электрона с энергиями m, $-E'$ и E соответственно, а k_0 — энергия рассеиваемого кванта.

Если теперь рассматривать комптон-эффект по теории дырок, то этому процессу будет соответствовать следующий:

I. Электрон вакуума с отрицательной энергией и волновым вектором k_0 излучает квант и переходит в состояние с положительной энергией.

II. Первичный электрон, поглощая рассеиваемый квант, переходит в состояние с отрицательной энергией, освобожденное в предыдущем акте.

В формуле (1) первый множитель в числителе можно рассматривать как матричный элемент первого порядка, соответствующий переходу электрона с отрицательного уровня $-E'$ на уровень с энергией E, т. е. соответствующий акту I. Точно так же второй множитель можно рассматривать как матричный элемент, соответствующий акту II. Поэтому Баба и Базу считают, что числитель матричного элемента в данном случае оказывается тот же самый, что и при обычном вычислении. Что же касается знаменателя, то нетрудно видеть, что он совпадает со знаменателем в (1) только с точностью до знака.

Действительно, разность энергий в начальном и промежуточном состояниях для такого процесса равна

$$-E' - k - E \tag{2}$$

(так как с одной стороны исчез один электрон с энергией $-E'$, а с другой появились квант с энергией k и электрон с энергией EI).

Принимая теперь во внимание, что

$$m + k_0 = k + E, \tag{3}$$

мы получим выражение, обратное по знаку знаменателю в (1).

Тот же самый результат получается для процесса, при котором (по обычной схеме) электрон сначала поглощает квант и переходит в состояние с отрицательной энергией.

В то же время для процессов, при которых в промежуточном состоянии энергия остается положительной, обе теории (вернее, оба способа вычисления) приводят к одинаковым матричным элементам. А так как в формулу для сечения входит сумма матричных элементов всех процессов, то естественным образом мы приходим к выводу Баба и Базу.

Ошибка, которая делается при таком выводе, заключается в отождествлении матричных элементов в числителе (1) с матричными элементами теории дырок. Такое отождествление эквивалентно тому, что за волновую функцию системы из двух электронов, участвующих в процессе (одного с отрицательной, другого с положительной энергией), берется произведение волновых функций этих электронов. Такая операция незаконна, так как при этом не учитывается тождественность электронов и принцип Паули, на котором построена сама теория дырок.

Если вместо этого за волновую функцию взять, как это принято, антисимметричную комбинацию

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_m^{(1)} u_{-E'}^{(2)} - u_m^{(2)} u_{-E'}^{(1)}\right], \tag{4}$$

где индексы (1), (2) различают электроны, то при этом вычисления приведут нас не к формуле Баба и Базу, а к формуле Клейна—Нишины.

В заключение приношу искреннюю благодарность проф. Л. Ландау за интерес к работе.

Литература

1. *Bhahba H. J. and Basu G.* Proc. Ind. Acad., **15**, 105, 1940.
2. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. М.—Л., 1940.

Рассеяние протонов протонами

Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский

1. Введение

Для изучения ядерных сил большую роль играет исследование рассеяния элементарных частиц протонов и нейтронов. Этому вопросу посвящено значительное количество экспериментальных и теоретических работ. Большая часть этих последних основывается на заранее делаемых предположениях о функции $U(r)$ — энергии между двумя частицами, обычно зависящей от двух параметров (прямоугольная яма или кривая ошибок Гаусса). Однако такого рода предположения, конечно, ни на чем не основаны, и остается совершенно неясным — что же в действительности не является произвольным допущением, а следует из экспериментальных данных.

Бете и Пайерлс [1] обратили внимание, что в случае рассеяния протонов нейтронами можно воспользоваться тем, что энергии частиц, с которыми имеют дело в экспериментах, малы по сравнению с энергиями взаимодействия, а соответствующие длины волн значительно больше радиуса действия ядерных сил. Поэтому точное знание вида функции $U(r)$ не существенно, и влияние ядерных сил в таком случае можно учесть изменением граничных условий, налагаемых на волновую функцию в начале координат. При этом в эффективное сечение входит некоторая постоянная, которая должна быть определена из эксперимента.

Рассеяние протонов протонами подвергалось значительно более тщательному исследованию, чем рассеяние протонов нейтронами. В то же время существующая теория такого рассеяния не является вполне удовлетворительной.

Теоретическому исследованию этой задачи посвящен ряд работ Брейта [2] и его сотрудников [1]. Однако во всех этих работах вычисления основаны на предположениях о конкретном виде взаимодействия. На применении прямоугольной ямы основан и фундаментальный вывод о приблизительном равенстве специфических сил, действующих между протоном и нейтроном, с одной стороны, и протоном и протоном — с другой.

В действительности можно показать, что основные результаты указанных работ могут быть получены без этих ненужных предположений, основываясь на идеях, аналогичных развитым в упомянутой работе Бете и Пайерлса. При этом оказывается, что все экспериментальные данные могут быть описаны формулой, зависящей от двух параметров. Отсюда, в частности, следует полная безнадежность попыток определения формы кривой $U(r)$, как это делает Брейт. С другой стороны, этого оказывается вполне достаточно для выяснения ряда вопросов, в частности вопроса о сравнении сил протон—протон и протон—нейтрон.

Аналогичные исследования могут быть проведены и для рассеяния дейтонов и α-частиц. Но в этих случаях недостаток экспериментальных данных, а также участие в рассеянии высших моментов делают пока результаты этих исследований мало плодотворными.

---

[1] Обзор теоретических и экспериментальных работ по рассеянию протонов протонами дан в докладе Брейта [3]. Там же имеется и библиография по этому вопросу.

2. Метод

Волновая функция протона в кулоновом поле удовлетворяет уравнению (в системе центра инерции)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{M}\Delta + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi = \frac{E}{2}\psi \tag{2.1}$$

(Z — заряд ядра; в случае рассеяния протоном $Z = 1$; M — масса протона; E — энергия рассеиваемых протонов в лабораторной системе координат).

Если никаких других сил, кроме кулоновских, нет и уравнение (2.1) справедливо во всем пространстве, то функция ψ должна удовлетворять граничному условию

$$\psi(0) \neq \infty. \tag{2.2}$$

Если же вблизи начала координат существует какое-то поле сил, отличных от кулоновских, то волновая функция в этой области оказывается отличной от (2.1). Однако, так как мы ничего не можем сказать о потенциале этих сил, уравнение для правильной функции даже не может быть написано.

Если энергия рассеиваемой частицы значительно меньше энергии взаимодействия, можно считать, что решение этого волнового уравнения будет лишь в слабой степени зависеть от энергии протонов. Тогда вместо решения уравнения в области вблизи начала координат, мы можем считать, что новая волновая функция также удовлетворяет (2.1), а присутствие ядерных сил сказывается в том, что вместо условия (2.2) волновая функция должна удовлетворять некоторому другому условию, а именно: граничное условие в начале координат мы запишем в форме Бете и Пайерлса

$$\left(\frac{f'}{f}\right)_{r=0} = c, \tag{2.3}$$

где $f = r\psi$.

Рассмотрим теперь задачу о рассеянии протонов протонами, ограничиваясь пока только случаем $l = 0$ (S-рассеяние). Случай $l > 0$ будет разобран ниже (раздел 5).

Вводя вместо функции ψ функцию $f = r\psi$, перепишем уравнение (2.1) в виде:

$$\frac{\hbar^2}{M}\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{E}{2} - \frac{Ze^2}{r}\right)f = 0. \tag{2.4}$$

Введем обозначения

$$\rho = rk, \quad k = \frac{Mv}{2\hbar}, \quad \eta = \frac{1}{ka}, \qquad a = \frac{2\hbar}{ZMe^2} = \frac{5{,}47\cdot 10^{-12}}{Z}\ \text{см}. \tag{2.5}$$

В этих обозначениях (2.1) переходит в

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho}\right)f = 0. \tag{2.6}$$

Уравнению (2.6) удовлетворяют функции Уиттекера $W_{i\eta,1/2}(2i\rho)$ и $W_{-i\eta,1/2}(-2i\rho)$ [4].

При помощи линейной комбинации этих функций можно получить два решения, которые на больших расстояниях имеют вид [5]

$$F \sim \sin(\rho - \eta \lg 2\rho + \sigma_0), \tag{2.7}$$

$$G \sim \cos(\rho - \eta \lg 2\rho + \sigma_0), \tag{2.8}$$

где

$$\sigma_0 = \arg\Gamma(1 + i\eta). \tag{2.9}$$

На малых расстояниях эти функции могут быть разложены в ряд:

$$F = Ce^{-i\rho}\rho\left\{1 + \frac{1 - i\eta}{1!\,2!}2i\rho + \frac{(1 - i\eta)(2 - i\eta)}{1!\,2!\,3!}(2i\rho)^2 + \ldots\right\}, \tag{2.10}$$

$$G = \frac{1}{C}\cos\rho + \frac{2\eta}{C}\left[\ln 2\rho + 2\gamma + \operatorname{Re}\frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)}\right]\frac{F}{C} -$$

$$-\frac{2\eta}{C}\operatorname{Re} e^{-i\rho}\rho\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1 + s - i\eta)(2i\rho)^s}{(1 + s)!s!\Gamma(1 - i\eta)}\sum_{t=1}^{s}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t - i\eta}\right). \tag{2.11}$$

Здесь

$$C^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}; \quad \gamma = 0{,}5777\ldots .$$

(Во избежание недоразумений отметим, что в выражение для F мнимость входит только кажущимся образом. Если заменить экспоненту ее разложением и перемножить оба ряда, то произведение окажется вещественным.)

Функция F, как это видно из (2.6), обращается в начале координат в нуль. Функция же G из-за наличия члена с $\lg\rho$ имеет в нуле особенность.

В случае рассеянии в чисто кулоновом поле граничным условиям удовлетворяет только функция F. В нашем же случае, после того как граничные условия изменились, поведение функции в нуле становится несущественным, и условиям задачи удовлетворяет уже линейная комбинация обоих решений. Обозначая постоянную, входящую в эту новую функцию, через $\operatorname{ctg} K_0$, получаем для решения

$$f = \operatorname{ctg} K_0 F + G. \tag{2.12}$$

Такой выбор сделан для того, чтобы асимптотическое выражение волновой функции отличалось от волновой функции в отсутствие ядерных сил только постоянной фазой K_0, как это обычно делается в теории рассеяния

$$f \sim \sin(\rho - \eta\ln 2\rho + \sigma_0 + K_0). \tag{2.13}$$

В формулах (2.12) и (2.13) мы опускаем постоянные множители (разные в обоих случаях), которые определяются нормировкой волновой функции и не существенны для наших целей.

Для того чтобы найти связь между K_0 и постоянной c, подставим в граничное условие (2.3) выражение для функции (2.12). При этом будем считать это условие отнесенным не к нулю, а к точке, сколь угодно близкой к нему, но все же находящейся на некотором заданном конечном расстоянии от начала координат (это приходится делать из-за того, что функция расходится в нуле)[2].

Ограничиваясь первыми членами разложений, получим:

$$\frac{f'}{f} = k\left[C^2\operatorname{ctg} K_0 + 2\eta\left(1 + 2\gamma + \ln 2\rho + \operatorname{Re}\frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)}\right)\right] = c. \tag{2.14}$$

Напомним, что слева производная берется по r, а не по переменной $\rho = rk$; отсюда и множитель k. Так как произведение $k\eta = 1/a$ не зависит от энергии, то

[2] При рассеянии протонов нейтронами два соответствующих решения были $\sin kr$ и $\cos kr$. Оба они регулярны в нуле, а потому в этом случае такая операция излишня, и можно было бы прямо относить граничное условие к нулю.

выражение в скобках содержит ряд постоянных членов. Мы можем, изменив обозначения, включить их в постоянную c. То же самое можно сделать и с членом $\ln 2r/a$[3]. Получающуюся в этом случае постоянную обозначим через a α_{pp}, после чего можем во всех остальных членах уже считать $r = 0$. Путем простых преобразований мы придем тогда к окончательной формуле, связывающей фазу K_0 с постоянной a_{pp}:

$$\operatorname{ctg} K_0 = \frac{1}{\pi}\left(e^{2\pi\eta} - 1\right)\left[\ln\eta - \operatorname{Re}\frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} + \frac{a}{2}\alpha_{pp}\right]. \tag{2.15}$$

3. Анализ экспериментальных данных

Наиболее тщательные исследования углового распределения рассеянных протонов были проведены Хербом, Керстом, Паркинсоном и Пляйном [7] для различных энергий протонов в интервале от 860 до 2392 keV, а также Гейденбургом, Хафстадом и Тювом [8] для протонов с энергиями 670, 776 и 867 keV.

На основании этих данных Брейтом, Такстоном и Эйзенбудом [9] были вычислены соответствующие фазы. Кроме того, Раганом, Канне и Ташеком [10] были изучены протоны с энергиями в 250 и 300 keV. Вычисление фаз для этого случая проведено нами.

Одним из основных результатов этого анализа было то, что Брейт, Такстон и Эйзенбуд установили, что в рассеянии протонов протонами при всех исследованных энергиях участвует только волна с $l = 0$[4] (речь, конечно, идет только о дополнительном рассеянии, происходящем от наличия ядерных сил, рассеяние же в кулоновом поле содержит волны со всеми значениями углового момента). Что же касается волн с большими значениями углового момента, то соответствующие фазы настолько малы, что определению их мешает неточность самих экспериментов, а потому ими можно пренебречь.

В том случае, когда мы пренебрегаем всеми фазами, кроме K_0, угловое распределение протонов протонами в лабораторной системе координат описывается формулой [12]

$$\sigma = 4\cos\frac{\theta}{2}P, \tag{3.1}$$

где

$$P = \left(\frac{e^2}{Mv^2}\right)^2\left\{\sin^{-4}\frac{\theta}{2} + \cos^{-4}\frac{\theta}{2} - \cos\left(2\eta\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\sin^{-2}\frac{\theta}{2}\cos^{-2}\frac{\theta}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{\eta}\left[\cos\left(K_0 + 2\eta\lg\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin^{-2}\frac{\theta}{2} + \cos\left(K_0 + 2\eta\lg\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos^{-2}\frac{\theta}{2}\right]\sin K_0 + \frac{4}{\eta^2}\sin^2 K_0\right\}. \tag{3.2}$$

Наоборот, по этой формуле, зная угловое распределение, можно вычислить K_0, как это и было сделано[5]. Вычисленные фазы приведены в табл. 1.

В этой же таблице приведены значения функции $\operatorname{ctg} K_0$, входящей в формулу (2.12). О последней строке будет сказано ниже.

[3] Получающимся из $\ln 2\rho = -\ln\eta + \ln 2r/a$.

[4] См. также работу Крейца [11].

[5] Вычисления упрощаются, если пользоваться таблицами, имеющимися в [9] и [12]. Дополнения к этим таблицам для больших энергий даны в [13].

Таблица 1

Значение фазы K_0

E, keV	250	300	670	776	860	867	1200	1390	1830	2105	2392
K_0 (эксп.)	9°	10°	24°8′	27°4′	29°3′	29°4′	35°9′	38°8′	44°	46°1′	48°1′
ctg K_0...	6,	5,	2,16	1,93	1,78	1,78	1,38	1,25	1,03	0,96	0,90
ctg K_0 (теор.)	6,23	5,15	2,24	1,92	1,78	1,78	1,38	1,25	1,03	0,95	0,90

Таблица 2

Значение постоянной $\frac{2}{a}\alpha_{pp}$

E, keV	250	300	670	776	860	867	1200	1390	1830	2105	2392
$\frac{2}{a}\alpha_{pp}\ldots$	3,8	3,8	4,0	4,16	4,19	4,19	4,34	4,45	4,61	4,74	4,85

По определенным таким образом фазам мы можем вычислить постоянную α. Проведем это вычисление для каждой энергии отдельно и сравним полученные значения. Результат вычислений приведен в табл. 2.

Мы видим, что $(2/a)\alpha_{pp}$ не остается в действительности строго постоянной, а несколько растет с энергией. Такое изменение не является неожиданным. Ведь значение α_{pp}, соответствующее $E = 0$, есть $1{,}33 \cdot 10^{12}$ см$^{-1}$, между тем оценка примерного значения α_{pp} по величине ядерных сил дает $\alpha \sim \sqrt{MU}/\hbar$, где U — энергия ядерного взаимодействия порядка 15 MeV, т. е. $\alpha_{pp} \sim 6 \cdot 10^{12}$. Отсюда видно, что значения α_{pp} аномально малы по сравнению с ожидаемыми, что как и в случае взаимодействия протона—нейтрона, соответствует резкому резонансу.

С другой стороны, мы считали α_{pp} постоянной, допуская, что в ряде по степеням отношения энергии падающей частицы к энергии ядерного взаимодействия можно ограничиться первым членом. Но в этом разложении нельзя ограничиться одним членом, так как вблизи резонанса первый член ряда мал и поэтому второй его член оказывается сравнимым с первым.

Действительно, все полученные значения постоянной $(a/2)\alpha_{pp}$ ложатся на прямую:

$$\frac{a}{2}\alpha_{pp} = 3,82 + 0{,}43E \text{ (MeV)}, \tag{3.3}$$

где E — энергия протона в лабораторной системе координат, выраженная в MeV.

Для дальнейшего нам удобно будет также иметь значение этой постоянной в см$^{-1}$:

$$\alpha_{pp} = [1{,}40 + 0{,}15E\,(\text{MeV})]10^{12} \text{ см}^{-1}. \tag{3.4}$$

Для проверки вычислений можно при помощи значений α_{pp}, полученных из (3.3), вычислить соответствующие фазы. Результат этих вычислений приведен в табл. 1, в последней строке.

Из сказанного выше совершенно ясно, что из всего экспериментального материала, существующего в настоящее время, можно определить только две постоянные — два коэффициента в разложении (3.3) и (3.4). Понятно, что если *a priori* выбрать какую-либо форму потенциала, зависящую как раз от двух параметров, то их и можно определить.

5 Зак. 198

Однако в действительности, если таких предположений заранее не делать, то получить какие-либо количественные выводы о функции $U(r)$ из существующих экспериментальных данных невозможно.

Дальнейшего повышения точности можно ожидать только от результатов изучения рассеяния более быстрых протонов. При этом надо иметь в виду, что с увеличением энергии должна стать существенной фаза K_1 (а при дальнейшем увеличении энергии и K_2, и т. д.), что приведет к появлению дополнительных постоянных. Поэтому такие исследования должны сами по себе обладать высокой степенью точности.

Во второй части нашей работы будет показано, что аналогичное поведение соответствующей постоянной α_{pn} имеет место и для рассеяния протонов нейтронами. В случае рассеяния, при котором спины частиц антипараллельны, эта постоянная оказывается равной:

$$\alpha_{pn} = [0{,}43 + 0{,}10\,(\mathrm{MeV})] \cdot 10^{12}\ \text{см}^{-1}. \tag{3.5}$$

Из сравнения (3.4) и (3.5) мы видим, что вторые члены этих выражений оказываются весьма близкими друг другу. Это показывает, что ядерные силы между протоном и нейтроном, с одной стороны, и двумя протонами, с другой, имеют примерно одинаковую величину. То, что первые члены (3.4) и (3.5) отличаются друг от друга, не противоречит этому положению. Действительно, мы видели, что члены эти аномально малы, а потому сравнивать имеет смысл не их абсолютные величины, а разности между ними и их нормальными значениями, которые, как мы видели, должны быть порядка $6 \cdot 10^{12}$ см$^{-1}$. Подробное обсуждение этих вопросов будет дано в следующей работе.

4. Вопрос о существовании стабильного уровня дипротона

На основании полученных данных можно выяснить вопрос о том, существует у системы, состоящей из двух протонов, стабильный уровень или нет. Эта задача должна быть сформулирована следующим образом.

Наличие уровня у системы означает, что существует такое состояние этой системы, волновая функция которого, при некотором отрицательном значении энергии (собственное значение), экспоненциально затухает на бесконечности. Соответствующая энергия будет тогда энергией связи этого состояния. Может случиться, что такого решения не существует. Это, однако, не означает, что в таком случае не могут иметь место резонансные явления. Система может не иметь действительного уровня, а резонанс при этом может существовать, как это и происходит, например, в случаях рассеяния протонов нейтронами с антипараллельными спинами. Резонанс при этом означает, что уже малые изменения параметров системы могут привести к появлению действительного уровня (изменению знака у постоянной α_{pn} и несколько более сложному условию для постоянной α_{pp}).

Решение волнового уравнения, соответствующее отрицательному значению энергии $E = -\varepsilon$, можно получить из выписанных нами решений для положительной энергии (2.10) и (2.11), если в них положить $k = i\varkappa$ (для того чтобы $k^2 < 0$). Асимптотические разложения полученных таким образом функций будут

$$F \sim \sin(i\varkappa r + \ldots), \tag{4.1}$$

$$G \sim \cos(i\varkappa r + \ldots). \tag{4.2}$$

Для того чтобы получить функцию, ведущую себя на бесконечности как экспонента, очевидно, надо взять линейную комбинацию

$$iF + G \sim \exp(-\varkappa r + \ldots). \tag{4.3}$$

Для упрощения расчетов обратим внимание на то, что (4.3) получается из соответствующей функции, использованной нами в задаче о рассеянии $\operatorname{ctg}\xi F + G$, формальной заменой

$$\operatorname{ctg}\xi \to i, \quad k \to i\varkappa. \tag{4.4}$$

Далее мы должны удовлетворить тем же граничным условиям, что и в задаче о рассеянии, так как мы выводили их в предположении, что оно слабо зависит от энергии. Так как все эти действия совпадают с теми, которые проводились нами в задаче о рассеянии, то и окончательный результат можно получить из (2.15) заменой (4.4). Тогда мы получаем уравнение для определения $\varkappa$ [6]

$$\zeta(x) = \frac{i\pi}{e^{-2\pi i x} - 1} - \ln x + i\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'(-x)}{\Gamma(-x)} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right] = \frac{a}{2}\alpha_{pp}. \tag{4.5}$$

Здесь мы для краткости ввели обозначение

$$x = \frac{1}{\varkappa a}. \tag{4.6}$$

Очевидно, что вопрос об уровне решается знаком корня уравнения (4.5). Если бы он оказался положительным, то, как это видно из (4.3), решение на бесконечности затухало бы, и, согласно сказанному выше, это значение $\varkappa$ соответствовало бы реальному уровню. В действительности же это уравнение не может иметь положительных корней, что и доказывает отсутствие реального уровня у дипротона.

Покажем теперь, что (4.5) действительно не имеет положительных корней.

Преобразуем сначала уравнение (4.5). Легко видеть, что

$$\frac{i\pi}{e^{-2\pi i x} - 1} = -\frac{i\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi x = -\frac{i\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(x\sin\pi x) + \frac{1}{2x}. \tag{4.7}$$

Далее воспользуемся известным соотношением:

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\sin\pi x}. \tag{4.8}$$

Тогда

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\lg(x\sin\pi x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(-x)}{\Gamma(-x)}\right]. \tag{4.9}$$

Подставляя в (4.5), получим окончательно

$$\zeta(x) = -\lg x + \frac{1}{2x} + \psi(x) = \frac{a}{2}\alpha_{pp}, \tag{4.10}$$

где $\psi(x)$ — логарифмическая производная Г-функции.

Легко видеть, что левая часть (4.10) при всех положительных значениях x отрицательна.

Действительно, при больших значениях x

$$\psi(x) \sim \ln x - \frac{1}{2x}. \tag{4.11}$$

Отсюда

$$\zeta(\infty) = 0. \tag{4.12}$$

---

[6] Для этого заметим, что выражение $\operatorname{Re}\frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)}$ заменяло в старых формулах сумму $\frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} + \frac{\Gamma'(i\eta)}{\Gamma(i\eta)}\right]$, которая равна предыдущему только при вещественных η. При мнимых η надо воспользоваться последним выражением.

При малых x $\psi(x)$ ведет себя как $-1/x$, что видно из

$$\psi(x) = \psi(x+1) - \frac{1}{x}. \tag{4.13}$$

Поэтому

$$\zeta(0) = -\infty. \tag{4.14}$$

Можно показать (например графически), что $\zeta(x)$ есть монотонная функция. Поэтому

$$\zeta(x) < 0 \quad \text{при} \quad x > 0. \tag{4.15}$$

Замечая теперь, что в правой части (4.10) стоит положительная величина, получаем, что равенство это не может иметь места ни при каких положительных x, что и требовалось доказать[7].

Более строго неравенство (4.15) может быть доказано следующим образом.

В теории Г-функций (см. [4]) выводится соотношение

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \ln x - \frac{1}{2x} - 2\int\limits_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+x^2)(e^{2\pi t}-1)}. \tag{4.16}$$

Подставляя это выражение в (4.10), получаем

$$\zeta(x) = -2\int\limits_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+x^2)(e^{2\pi t}-1)}. \tag{4.17}$$

Отсюда находим искомое неравенство.

5. Случай $l > 0$

Все сказанное выше относилось к задаче о рассеянии протонов с моментом $l = 0$ (S-рассеяние).

При исследовании рассеяния более тяжелых частиц в рассеянии могут участвовать и состояния с угловыми моментами, отличными от нуля. Поэтому выведем формулу, аналогичную (3.12), справедливую для любого l[8].

При $l \neq 0$ к волновому уравнению для функции $f_l = \psi_l r$ добавляется член $l(l+1)/r^2$. В обозначениях пункта 3 это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 f_l}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) f_l = 0. \tag{5.1}$$

Этому уравнению удовлетворяют функции $W_{-i\eta,l+1/2}(2i\rho)$ и $W_{i\eta,l+1/2}(-2i\rho)$.

Аналогично предыдущему мы можем составить из них линейные комбинации, имеющие на бесконечности вид

$$F_l \sim \sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2} - \eta\ln\rho + \sigma_l\right), \tag{5.2}$$

$$G_l \sim \cos\left(\rho - \frac{l\pi}{2} - \eta\ln\rho + \sigma_l\right), \tag{5.3}$$

---

[7] Легко видеть, что из-за того, что a_{pp} сравнительно слабо зависит от энергии, наш вывод не изменится, если для него взять выражение (3.3), в котором надо положить $E/2 = -\varepsilon$.

[8] Нужные для этого функции также приведены в работе Иоста, Уиллера и Брейта [5].

где

$$\sigma_l = \arg\Gamma(l+1-i\eta). \tag{5.4}$$

На малых расстояниях эти функции могут быть разложены в ряд:

$$F_l = C_l e^{-i\rho}\rho^{l+1}\left\{1+\frac{l+1-i\eta}{1!(2l+2)!}(2i\rho)+\frac{(l+1-i\eta)(l+2-i\eta)}{(2l+1)(2l+3)}\frac{(2i\rho)^2}{2!}+\ldots\right\}, \tag{5.5}$$

$$G_l = \frac{1}{C_l(2l+1)}\operatorname{Re} e^{-i\rho}\rho^{-l}\left\{1+\frac{l+i\eta}{(2l)!}\frac{2i\rho}{1!}+\ldots+\frac{(l+i\eta)\ldots(-l+1+i\eta)}{(2l)!}\frac{(2i\rho)^{2l}}{(2l)!}\right\}+$$
$$+\frac{e^{2\pi\eta}-1}{\pi}\left[\ln 2\rho+2\gamma-\sum_1^{2l+1}s^{-1}+\sum_1^{l}\frac{s}{s^2+\eta^2}+\operatorname{Re}\frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)}\right]F_l-\frac{e^{\pi\eta}-1}{\pi}C_l\operatorname{Re} e^{-i\rho}\times$$
$$\times\rho^{l+1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(2l+1)\Gamma(l+1+s-i\eta)(2i\rho)^s}{(2l+1+s)!s!\Gamma(l+1-i\eta)}\sum_{t=1}^{s}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2l+1+t}-\frac{1}{l+t-i\eta}\right), \tag{5.6}$$

где

$$C_l^2=\frac{2^{2l}}{(2l+1)!}(l^2+\eta^2)\left[(l-1)^2+\eta^2\right]\ldots(1+\eta^2)\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}. \tag{5.7}$$

Так же как и выше, составим выражение f'/f. В этом случае такое выражение оказывается бесконечным в начале координат. Поэтому следует приравнивать постоянной не f'/f, а выражение $(r^l f)'/(r^l f)$, что, конечно, не нарушает в остальном всех рассуждений.

$$\frac{(r^l f)'}{r^l f}=c_l. \tag{5.8}$$

Легко видеть также, что последний член при $r=0$ обращается в нуль, так как он не имеет особенности ни при каких значениях η. Это видно из того, что так как $\Gamma(l+1+s-i\eta)=(l+1-i\eta)(l+2-i\eta)\ldots(l+s-i\eta)\,\Gamma(l+1-i\eta)$, то члены во второй сумме, содержащие η в знаменателе, обязательно сокращаются с одним из слагаемых первой суммы.

Включая все не зависящие от η члены в постоянную c_l (в том числе и член с $\lg r$) и опять полагая после этого $r=0$, получим после простых преобразований окончательную формулу, представляющую обобщение (2.15) на случай любого l:

$$\operatorname{ctg} K_l=\frac{1}{\pi}(e^{2\pi\eta}-1)\left[\ln\eta-\operatorname{Re}\frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)}-\sum_{s=1}^{l}\frac{s}{s^2+\eta^2}+\alpha_{pp}^l\prod_{p=1}^{l}\left(1+\frac{p^2}{\eta^2}\right)^{-1}\right]. \tag{5.9}$$

6. Рассеяние легких ядер

Можно было сделать попытку произвести анализ, аналогичный анализу рассеяния протонов протонами, и для случая рассеяния легких ядер. Метод исследования должен остаться старым. По данным по угловому распределению надо получить фазы K_l. При этом для каждого состояния с разными значениями полного момента J существует своя фаза K_{lJ}. После этого по формуле (5.9) мы должны определить соответствующую постоянную (или функцию от E).

Таким образом мы исключим влияние кулонова поля и сведем задачу к простой величине α_J.

Однако здесь, из-за того, что данные по угловому распределению значительно менее полны, а с другой стороны, количество постоянных больше (так как в рассеянии принимает участие и P-состояние), а также из-за большого спина в случае

рассеяния дейтонов, нам не удалось получить таких результатов, как в первом случае. Поэтому мы лишь кратко сообщим те выводы, которые можно было все же сделать.

А. Рассеяние протонов дейтонами

Экспериментальное исследование этого случая было проведено Тювом, Гейденбургом и Хафстадом [14] для энергии протонов 0,83 MeV. Однако, как уже указывалось [15], их данные, особенно для больших углов, по-видимому, ошибочны, так как они получены для отношения сечения рассеяния к резерфордовскому −2275 (для угла рассеяния в 126° в лабораторной системе). Такая величина никак не может быть получена, если считать, что в рассеянии участвует только несколько первых моментов.

Рассеяние протонов с энергиями от 200 до 300 keV исследовалось Ташеком [16]. Предположив сначала, что в рассеянии участвует S-состояние, можно было попытаться описать рассеяние при помощи двух постоянных (соответствующих общему спину системы, равному $1/2$ и $3/2$). Однако этого оказывается недостаточно. С другой стороны, вводя в рассмотрение еще и P-состояние, мы тем самым вводим еще пять постоянных (соответственно числу различных значений, которые может принимать квантовая сумма трех векторов, равных по величине 1, 1 и $1/2$). Однако по имеющимся данным нельзя сколько-нибудь точно определить все семь постоянных. Не исключена, однако, и возможность, что в рассеянии участвуют лишь волны с моментом, равным нулю, а определению фаз мешает недостаточная точность экспериментов.

Б. Рассеяние нейтронов и протонов α-частицами

Штауб и Татель [17] изучали рассеяние нейтронов с энергиями вблизи 1 MeV α-частицами, измеряя полное число α-частиц отдачи в телесном угле $\pm 12°$. Анализируя свои данные, они приходят к заключению, что в рассеянии принимает участие P-состояние, причем у системы имеется два близко лежащих уровня $P_{1/2}$ и $P_{3/2}$ с маленькой разницей в энергии (0,3 MeV).

С другой стороны, Уиллер и Баршалл [18] показали, что для энергии нейтронов в 2,5 MeV фазы, соответствующие волнам $P_{1/2}$ и $P_{3/2}$, отличаются примерно на 60°.

Аналогичные результаты получены нами и для рассеяния протонов α-частицами по данным Гейденбурга и Рамзея [19].

В этом случае также оказалось, что для описания рассеяния необходимо учесть три состояния: S_0, $P_{1/2}$ и $P_{3/2}$, причем фазы последних также сильно отличаются по величине.

Эти данные показывают, что вывод Штауба и Тателя о существовании узкого дублета неверен и связан с переоценкой ими точности своих вычислений. Существование такого узкого дублета было бы даже неожиданным, принимая во внимание тот факт, что взаимодействие спина с орбитой у ядерных частиц не мало (это следует из наличия относительно большого квадрупольного момента у дейтона).

Надо при этом отметить, что формула Блоха, которой пользуются Штауб и Татель, верна лишь для небольшого интервала энергии, так как при ее выводе предполагалось, что ширина нейтронного уровня не зависит от энергии, что в действительности не имеет места.

После получения фаз K_0, $K_{1/2}$ и $K_{3/2}$ как функций энергии, можно было по формуле (5.9) получить значения соответствующих α_J.

Однако вычисление показало, что при этом точки не ложатся на плавную кривую, что связано, по-видимому, с тем, что измерения производились через большие интервалы энергии (через 0,5 MeV). В то же время, чем больше заряд и масса ядра, тем меньшие интервалы энергий необходимо брать, так как с увеличением числа частиц, входящих в состав ядра, увеличивается и количество и плотность уровней.

Литература

1. *Bethe H.*, *Peierls R.* Proc. Roy. Soc., **A148**, 146, 1935.
2. *Бете Г.*, *Бечер Р.* Физика ядра. Харьков, 1938. Ч. I. Гл. III.
3. Nuclear Physics. Pensilvania, 1941.
4. *Уиттекер Е.*, *Ватсон Г.* Курс современного анализа. **2**. М.—Л., 1934. С. 139.
5. *Yost F.*, *Wheeler J.*, *Breit O.* Phys. Rev., **49**, 174, 1936.
6. *Момт Н.*, *Месси Х.* Теория атомных столкновений. М.—Л., 1936. Гл. 2.
7. *Herb R.*, *Kerst D.*, *Parkinson D.*, *Plain G.* Phys. Rev., **55**, 998, 1939.
8. *Heidenburg N.*, *Hafstad L.*, *Tuve M.* Phys. Rev., **56**, 1078, 1939.
9. *Breit G.*, *Thaxtona H.*, *Eisenbud L.* Phys. Rev., **55**, 1018, 1939.
10. *Ragan G.*, *Kanne*, *Tashek R.* Phys. Rev., **60**, 628, 1941.
11. *Creutz E.* Phys. Rev., **56**, 893, 1939.
12. *Breit G.*, *Condon E.*, *Present R.* Phys. Rev., **50**, 825, 1936.
13. *Thaxton H.*, *Horsington L.* Phys. Rev., **56**, 1194, 1939.
14. *Tuve M.*, *Heidenburg N.*, *Hafstad L.* Phys. Rev., **50**, 806, 1936.
15. *Primakoff H.* Phys. Rev., **52**, 1000, 1937.
16. *Taschek R.* Phys. Rev., **61**, 13, 1942.
17. *Staub H.*, *Tatel H.* Phys. Rev., **58**, 820,1940.
18. *John Wheeler A.*, *Barshall H.* Phys. Rev., **58**, 682, 1940.
19. *Heidenburg N.*, *Ramsey N.* Phys. Rev., **60**, 42, 1941.
20. *Bloch F.* Phys. Rev., **58**, 829, 1940.

К теории рассеяния нейтронов протонами

Я. А. Смородинский

1. Эффективное сечение

Рассеяние нейтронов протонами обычно описывается формулой Вигнера [1]

$$\sigma = \frac{\pi\hbar^2}{M}\left[\frac{3}{\varepsilon_0 + E/2} + \frac{3}{\varepsilon_1 + E/2}\right], \qquad (1.1)$$

где ε_0 — энергия связи дейтонов, а ε_1 — энергия так называемого виртуального уровня, и E — энергия нейтрона.

Однако, как известно, при сравнении этой формулы с экспериментальными данными выясняется, что для согласования с опытом необходимо внести в нее дополнительные постоянные.

Такие постоянные обычно определяют, заменяя потенциальную функцию прямоугольной ямой радиуса r_0 (одинакового для реального и виртуального состояния дейтона), принимаемого равным $2{,}80 \cdot 10^{-13}$ (без достаточных к тому оснований).

При этом, если не пренебрегать первой степенью r_0, то вместо (1.1) можно получить другую формулу [2], которую обычно и сравнивают с экспериментом, а именно [1)]

$$\sigma = \frac{\pi\hbar^2}{M}\left\{3\frac{1+\alpha_0 r_0}{\varepsilon_0 + E/2} + \frac{1-\alpha_1 r_0}{\varepsilon_1 + E/2}\right\}, \qquad (1.2)$$

где $\alpha_0 = (M\varepsilon_0)^{1/2}/\hbar$; $\alpha_0 = (M\varepsilon_1)^{1/2}/\hbar$.

Таким образом, при выводе (1.2) теряется основное преимущество теории дейтона — независимость вывода от конкретных предположений о ядерных силах.

В действительности, однако, исправление формулы (1.1) может быть сделано, оставаясь в рамках этой теории.

В работе Ландау и автора [3] было выяснено, что постоянная α_{pp}, описывающая рассеяние протонов протонами и аналогичная постоянным α_0 и α_1, в действительности является не постоянной, а линейной функцией энергии.

Как было указано, такое поведение постоянной вызвано тем, что вблизи резонанса первый член разложения по степеням энергии аномально мал, а поэтому в разложении существенным оказывается и следующий член — пропорциональный первой степени энергии.

В случае рассеяния нейтронов также можно ожидать, что α_0 и α_1 не являются строго постоянными, а должны зависеть от энергии.

Положим [2)]

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -A_0 + B_0 E, \\ \alpha_1 &= A_1 + B_1 E \end{aligned} \qquad (1.3)$$

и определим 4 постоянные из экспериментальных данных.

[1)] Надо обратить внимание на то, что во втором члене этой формулы числитель имеет вид $1 - \alpha_1 r_0$; вместо этого часто пишут $1 + \alpha_1 r_0$ (см., например, [2, 7, 10]), что является ошибочным.

[2)] Разные знаки у A_0 и A_1 отвечают тому, что один уровень дейтона — действительный, а другой — виртуальный.

Эффективное сечение при этом должно иметь вид

$$\sigma = \frac{\pi\hbar^2}{M} \frac{3}{(A_0 - B_0E)^2 + E/2} + \frac{1}{(A_1 + B_1E)^2 + E/2}. \tag{1.4}$$

Нетрудно видеть, что если в знаменателе обоих членов можно пренебречь членами с квадратом энергии и положить $A^2/(1-4AB) = \varepsilon$ и $1/(1 \pm 4AB) = 1 \mp \alpha r_0$, то эта формула переходит в (1.2). Этими соотношениями можно пользоваться для оценки радиуса действия ядерных сил и глубины потенциальной ямы непосредственно из наших результатов. В частности, что будет нам важно в дальнейшем, так как $4AB$, вообще говоря, не очень велико, то из этих выражений видно, что постоянная B довольно точно равна радиусу (умноженному на $4M^{1/2}/\hbar$).

Для того чтобы выразить энергию связи дейтона через эти новые выражения для постоянных, напомним, что волновая функция стабильного состояния дейтона имеет вид

$$f_D = r\psi_D = \exp\left[-\frac{(M\varepsilon_0)^{1/2}}{\hbar}\right], \tag{1.5}$$

где постоянная ε_0 (энергия связи) находится из того же самого граничного условия

$$\left(\frac{f'}{f}\right)_{r=0} = \alpha_0 = -A_0 + B_0E, \tag{1.6}$$

что и для задачи о рассеянии.

В условие (1.6) мы должны только подставить $E = -2\varepsilon_0$ (коэффициент 2 появляется из-за того, что E есть энергия в лабораторной системе отсчета, а ε_0 — энергия в системе центра инерции). Сравнивая полученное выражение с (1.4), мы видим, что энергия связи есть то значение $E = -2\varepsilon_0$, при котором знаменатель в (1.4) обращается в нуль. Это и есть искомое соотношение.

2. Определение постоянных

Для определения постоянных в формуле (1.4) мы можем использовать следующие экспериментальные данные.

1. *Энергия связи дейтона.* Пользуясь значениями для масс, приведенными в последнем обзоре Флюгге и Маттауха [4], мы примем для этой величины значение $(2{,}18 \pm 0{,}03)$ MeV.

Непосредственные измерения Майерса и Ван Атта [5] дали для этой величины значение $(2{,}183 \pm 0{,}012)$ MeV.

2. *Рассеяние тепловых нейтронов.* Основной трудностью в интерпретации этих данных было то, что на рассеяние таких нейтронов влияет химическая связь, а потому экспериментальные данные не относятся непосредственно к рассеянию свободными протонами, а требуют теоретического пересчета, что вводит заметную неоднозначность в интерпретации экспериментов.

Эта трудность была преодолена в работах Козна, Гольдсмита и Швингера [6] и Ханштейна [7], изучавших рассеяние нейтронов с энергией 1–10 eV.

Так как эта энергия заметно больше энергии связи протонов ($\sim$0,3 eV), то полученное ими значение $[(20 \pm 2) \cdot 10^{-24}$ и $(21 \pm 1) \cdot 10^{-24}$ соответственно$]$ непосредственно дает величину поперечника для рассеяния медленных нейтронов на свободных протонах.

3. *Рассеяние* (D—D) *нейтронов с энергией* 2,88 MeV. Сечение рассеяния для таких нейтронов измерялось неоднократно [8–12], причем у разных авторов энергия нейтронов была несколько различна. Мы используем результаты Цинна,

Силли и Коэна [12], которые получили для 2,88 MeV нейтронов сечение, равное $(2{,}36 \pm 0{,}12) \cdot 10^{-24}$ см^2.

4. *Рассеяние* (D—Be) *нейтронов, имеющих энергию* 4,1 MeV. Агено, Амальди, Боччиарелли и Трабаччи [13] получили для сечения значение $(1{,}73 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-24}$ см^2.

5. *Рассеяние* (D—Li) *нейтронов, имеющих энергию* 14 MeV. Сечение, измеренное теми же авторами, равно $(0{,}69 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-24}$ см. В этом случае необходимо выделить P-рассеяние и внести соответствующую поправку в величину сечения.

Исправленное таким образом сечение (см. § 3) оказывается лишь немногим меньше, а именно, равным $0{,}68 \cdot 10^{-24}$ см^2.

Измеренное в той же работе сечение для (D—Be) нейтронов энергии 12,5 MeV имеет, в пределах ошибок опыта, ту же величину $(0{,}63 \pm 0{,}11) \cdot 10^{-24}$.

Таким образом для определения 4 постоянных в (1.4) мы имеем 5 экспериментальных точек.

Измерения с нейтронами энергии 0,10–0,40 MeV привели у разных авторов к разным результатам. Поэтому мы оставим пока эти данные в стороне.

Строго говоря, из имеющихся экспериментов можно было бы определить все 4 постоянные. Однако, как оказывается, формула (1.4) мало чувствительна к выбору постоянной B_1. Эту постоянную можно было бы определить из экспериментов с нейтронами малых энергий (меньше 0,5 MeV). Однако достаточно точных экспериментов в настоящее время не существует, а определить постоянную из данных по рассеянию нейтронов с большой энергией нельзя из-за сравнительно малой точности последних.

Поэтому, хотя определение этой постоянной и должно быть сделано в дальнейшем, сейчас мы вынуждены ввести некоторое допущение.

Именно, мы будем считать, что постоянная B_1 просто равна постоянной B_0, входящей в первый член. Это предположение соответствует тому, что мы принимаем радиус взаимодействия примерно[3] одинаковым в обоих членах.

Такое предположение делается и в существующей теории при выводе (1.2). Однако оно не имеет глубокого смысла, хотя и нет оснований предполагать, что эти радиусы могут сильно отличаться друг от друга.

При таком предположении мы можем определить остающиеся коэффициенты и получаем следующую формулу для сечения рассеяния нейтронов на протоне[4]

$$\sigma = 1{,}30 \cdot 10^{-24} \left[\frac{3}{(1{,}22 - 0{,}06E)^2 + E/2} + \frac{3}{(0{,}29 + 0{,}06E)^2 + E/2} \right]. \tag{2.1}$$

Сравнение этой формулы с экспериментальными данными дано в таблице:

E (MeV)	$\sigma_{эксп} \times 10^{24}$	$\sigma_{эксп} \times 10^{24}$
~0	20 ± 2	18
2,88	2,36 ± 0,12	2,33
4,1	1,73 ± 0,06	1,85
14	1,68 ± 0,03	0,70

[3] Мы говорим примерно, а не точно, так как, строго говоря, радиус еще зависит, хотя и слабо, от значений постоянных A, заведомо различных.

[4] Такой выбор постоянных соответствует радиусу взаимодействия порядка $(1{,}6 - 1{,}7) \cdot 10^{-13}$ см, что меньше, чем обычно принимаемое значение $2{,}8 \cdot 10^{-13}$ см. При этом мы получаем для глубины ямы величину порядка 30 MeV. Значение для постоянной B, равное 0,05, также возможно (что связано со сравнительно большой погрешностью в определении поперечника для 2,88 MeV нейтронов), однако это значение, по-видимому, слишком мало.

В первом члене (2.1) знаменатель обращается в нуль при $-\varepsilon_0 = E/2 = -2{,}18$ MeV (энергия связи дейтона).

Во втором члене знаменатель обращается в нуль при $-\varepsilon_0 = E/2 = -0{,}09$ MeV; это и есть так называемая энергия связи виртуального уровня.

Нетрудно видеть, что вместо формулы теории Бете—Пайерлса

$$\operatorname{ctg} K_0 = \frac{\alpha_0}{k} = \frac{\text{const}}{E^{1/2}} \tag{2.2}$$

для фаз мы будем теперь иметь следующие выражения (выражая все величины через энергию)

$$\operatorname{ctg} K_{03} = \left(\frac{2}{E}\right)^{1/2} (-1{,}22 + 0{,}06E), \tag{2.3}$$

$$\operatorname{ctg} K_{01} = \left(\frac{2}{E}\right)^{1/2} (0{,}29 + 0{,}06E), \tag{2.4}$$

где K_{03} — фаза, соответствующая рассеянию при параллельных спинах протона и нейтрона (триплетное состояние), а K_{01} — фаза рассеяния при антипараллельных спинах (синглетное состояние).

Интересно отметить, что формула (2.1) имеет вид обычной резонансной формулы для ядерных реакций и первый член, например, соответствует в терминах этой формулы уровню компаунд-ядра $E_0 \sim 10$ MeV[5].

Вернемся к экспериментам с нейтронами с энергией около 0,1 MeV.

Формула (2.1) дает для энергий 0,1–0,4 MeV значение $\sigma = 12 - 6{,}7 \times 10^{-24}$ см^2 соответственно.

Лейпунский, Розенкевич и Тимощук [14] для (γ RaC, Be) нейтронов с энергией 0,1 MeV получили $\sigma = 8 \cdot 10^{-24}$ см^2, что находится в довольно хорошем согласии с теорией.

Голобородько [15] для нейтронов 0,1 и 0,3 MeV (γ RaC, Be) нашел $\sigma = 9 \pm 0{,}8$ и $8{,}5 \pm 0{,}6 \cdot 10^{-24}$ см^2 соответственно, что также находится в согласии с формулой.

С другой стороны ряд авторов: тот же Голобородько [15] (для энергий 0,2–0,4 MeV), Гольдгабер [16], Амальди и другие [17], Тюв и Хафстад [18] получают для сечения значительно меньшие значения[6]. Возможно, что эти последние работы содержат экспериментальные погрешности, и этим расхождениям с теорией не следует придавать глубокого значения (как это делает, например, Голобородько).

3. Отклонение рассеяния от сферической симметрии

Выше мы отмечали, что при рассеянии 14 MeV нейтронов в рассеянии принимает участие P-волна.

Амальди и другие [19] нашли, что для таких нейтронов рассеяние не является сферически симметричным. Отношение интенсивностей рассеянных нейтронов

---

[5] При $E = 2E_0$ (коэффициент 2 — из-за перехода в систему центра инерции) выражение $1{,}22 - 0{,}06E$ обращается в нуль. Необходимо иметь в виду, что под термином уровень понимаются, вообще говоря, различные вещи, и уровень компаунд-ядра не имеет ничего общего с уровнем дейтона — значением энергии (отрицательным!), при котором обращается в нуль не скобка, а весь знаменатель.

[6] Именно, Гольдгабер $3 \cdot 10^{-24}$, Амальди и другие $3{,}3 \cdot 10^{-24}$, Голобородько 3,0 и $3{,}2 \cdot 10^{-24}$ и Тюв и Хафстад $3{,}7$–$4{,}7 \cdot 10^{-24}$ см^2.

(в системе центра инерции) на угол π и на угол $\pi/2$ оказалось равным 0,71 для 12,5 MeV нейтронов и 0,52 для 14 MeV нейтронов[7].

Из этих данных можно определить поперечное сечение для P-рассеяния.

Нетрудно получить формулу, представляющую обобщение формулы Бете и Пайерлса на случай не равного нулю орбитального момента.

Уравнение для радиальной функции ($f_l = r\psi_l$) для свободной частицы с угловым моментом l имеет, как известно, вид

$$\frac{d^2 f_l}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) f_l = 0, \tag{3.1}$$

где k — волновой вектор частицы.

На малых расстояниях решениями этого уравнения будут

$$\begin{aligned} f_l^{(1)} &= (kr)^{l+1}, \\ f_l^{(2)} &= (kr)^{-l}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Искомая волновая функция есть линейная комбинация этих решений

$$f = (kr)^{l+1} \operatorname{ctg} K_l + (kr)^{-l}, \tag{3.3}$$

где $\operatorname{ctg} K_l$ — постоянная, которую мы должны определить из граничных условий при $r = 0$.

Таким условием будет

$$r^{-2l} \frac{(r^l f_l)'}{r^l f_l}\bigg|_{r=0} = \text{const}. \tag{3.4}$$

Множитель r^l входит в граничное условие из-за того, что $\frac{f'}{f}$ обращается при $r = 0$ в бесконечность; const — некоторая постоянная, характеризующая рассеяние.

По (3.3) и (3.4) получим

$$\operatorname{ctg} K_l = \left(\frac{\alpha_l}{k}\right)^{2l+1}, \tag{3.5}$$

где α_l — новая постоянная.

Применим полученные формулы к случаю P-рассеяния нейтронов.

Подобно тому как при S-рассеянии существуют две фазы K_{01} и K_{03}, P-рассеяние будет описываться 4 фазами: K_{131}, K_{132}, K_{133} соответствующими параллельным спинам протона и нейтрона и полному угловому моменту $j = 0$, 1 и 2 соответственно, и фазой K_{111}, соответствующей P-рассеянию при антипараллельных спинах. Кроме этого, если мы учитываем таким образом взаимодействие спина с орбитой, то мы должны принять во внимание и возможность процессов, соответствующих изменению полного спина, что приведет к появлению еще одной постоянной (соответствующей переходу ${}^3P_1 \to {}^1P_1$). Однако при том небольшом числе экспериментальных данных, которыми мы располагаем, все эти

[7] В недавно пришедшей в СССР работе [20] Чемпион и Поуэлл сообщают об исследовании асимметрии для нейтронов с энергией 8,8 и 14 MeV (получающихся при помощи реакции $B^{11}(dn)C^{12}$). Для отношения интенсивностей при углах рассеяния π и $\pi/2$ для большой энергии нейтронов они получили значение $0{,}67 \pm 0{,}20$. Для второй группы нейтронов асимметрии не было замечено. Эти данные подтверждают опыты Амальди и других и указывают на монотонное возрастание асимметрии с возрастанием энергии. Из-за сравнительно большой статистической ошибки в опытах Чемпиона и Поуэлла мы не будем использовать их результаты при анализе.

постоянные нельзя определить. Поэтому мы пренебрежем различием между тремя P-фазами и процессом, сопровождающимся переворачиванием спина, и будем считать, что P-рассеяние описывается только одной фазой K_1. Более точное определение этих постоянных приходится оставить до появления новых экспериментов[8].

Пользуясь точной теорией рассеяния и вводя, как сказано выше, одну P-фазу K_1, легко получить сечение рассеяния:

$$\sigma(\theta) = \frac{\pi}{4k^2}\{3\sin^2 K_{03} + 3\sin^2 K_{01} + 6[3\cos(K_{03} - K_1)\sin K_{03} + \\ + \cos(K_{01} - K_1)\sin K_{01}]\sin K_1 \cos\theta + 36\sin^2 K_1 \cos^2\theta\}. \quad (3.6)$$

Фазы K_{01} и K_{03} можно вычислить по формулам (2.3) и (2.4). Тогда, используя измеренное отношение $\frac{\sigma(\pi)}{\sigma(\pi/2)}$ при 12,5 и 14 MeV, можно вычислить фазу K_1, а вместе с тем и постоянную ε_1 в формуле, получающейся из (3.5) при $l = 1$:

$$\operatorname{ctg} K_1 = \left(\frac{\varepsilon_1}{E}\right)^{3/2}. \quad (3.7)$$

Эта постоянная в обоих случаях оказывается несколько различной (что указывает на грубость сделанных нами упрощений) и равной примерно 65 MeV.

Интегрируя (3.6) по углу, найдем для полного P-сечения[9]

$$\sigma_P = \frac{12\pi}{k^2}\sin^2 K_1. \quad (3.8)$$

Подставляя значение K_1, получим

$$\sigma_P = 0{,}2 \cdot 10^{-24}\ \text{см}^2, \quad E = 12{,}5\ \text{MeV},$$
$$\sigma_P = 0{,}014 \cdot 10^{-24}\ \text{см}^2, \quad E = 14\ \text{MeV}.$$

Эти значения и были нами использованы для получения S-сечения 14 MeV нейтронов из измеренного полного сечения.

4. Сравнение с рассеянием протонов протонами

Принцип Паули показывает, что только протоны с антипараллельными спинами участвуют в S-рассеянии. Поэтому при сравнении результатов с рассеянием нейтронов мы должны рассматривать фазу K_{01}.

Для этой фазы мы получили следующую формулу:

$$\operatorname{ctg} K_{01} = \left(\frac{2}{E}\right)^{1/2}(0{,}29 + 0{,}06E) = \left(\frac{2}{E}\right)^{1/2}\alpha_{p_n}. \quad (4.1)$$

В работе Ландау и автора [3] мы получили для аналогичной величины α_{pp}, описывающей рассеяние протонов протонами, выражение

$$\alpha_{pp} = (1{,}40 + 0{,}15E) \cdot 10^{12}\ \text{см}^{-1}. \quad (4.2)$$

---

[8] Амальди, Боччиарелли и Трабаччи [21] изучали угловое распределение 14 MeV нейтронов. Из этих опытов можно было бы определить большее число постоянных; однако работа этих авторов не получена в СССР.

[9] Так как в угловое распределение $\sin K_1$ входит в первой степени, а соответствующий член в полном P-сечении исчезает при интегрировании, то асимметрия рассеяния может быть заметной по величине даже тогда, когда P-сечение мало.

Так как в формуле (4.1) величина α_{p_n} выражена не в см$^{-1}$, а в единицах $(\mathrm{MeV})^{1/2}$, то запишем в этих единицах[10] и величину α_{pp}:

$$\alpha_{pp} = (0{,}90 + 0{,}10E)\ \ (\mathrm{MeV})^{1/2}. \tag{4.3}$$

Прежде всего обратим внимание на то, что коэффициенты при E в обоих выражениях очень близки друг к другу. Сравнивая (4.1) и (4.3), прежде всего заметим, что в обоих случаях имеет место близость к резонансу. Это видно из того, что в отсутствие резонанса первый член в этих формулах должен был бы быть по порядку величины равным квадратному корню из глубины ямы (в MeV), т. е. быть примерно равным 4–5. В обоих случаях эта постоянная значительно меньше, что и соответствует резонансу. Отклонения от нормального значения в обоих случаях отличаются на 10–15%, что и указывает на близость сил протон—протон к силам протон—нейтрон. Небольшое смещение резонанса связано с наличием кулонова поля.

Коэффициенты перед E также близки друг к другу, что также указывает на сходство сил.

Правда, этот коэффициент в выражении (4.1) не мог быть определен непосредственно из опыта, мы считали его равным такому же коэффициенту в члене, соответствующем рассеянию нейтронов со спином, параллельным спину протона, однако и точное его определение вряд ли даст для него заметно отличную величину.

Более точно мы можем сказать, что из анализа рассеяния, не прибегая к помощи прямоугольной ямы, можно заключить лишь о близости к резонансу (и отсутствии реальных уровней) в обоих случаях.

Что же касается равенства радиусов взаимодействия, то о нем можно сейчас сделать заключение только с довольно малой точностью.

Этот вывод совпадает с выводом Брейта [22], сделанным им на основе предположения о том, что функция ядерных взаимодействий имеет вид прямоугольной ямы (хотя Брейт и сильно переоценивает его точность). Заключение же Брейта о точном равенстве радиусов взаимодействия не имеет оснований; это, например, видно из того, что при малой величине уровня (реального или виртуального, как это имеет место в нашем случае) произведение глубины ямы на квадрат ее радиуса зависит от энергии уровня. (Эта величина равна просто $\pi\hbar^2/(4M)$.) В связи с этим сейчас представляется невозможным определить радиус взаимодействия более или менее точно. (Не следует, однако, забывать, что само понятие о таком радиусе носит качественный характер.) Сравнение радиусов действия обоих видов сил может быть сделано только после появления экспериментов с нейтронами малых энергий. То же самое справедливо и по отношению к глубине ямы (энергии взаимодействия).

Предварительные результаты настоящей работы указывают, что величина радиуса действия меньше, а глубина ямы больше, чем значения, принимаемые Брейтом ($r_0 = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ см и $U \sim 11$ MeV).

В заключение считаю своим долгом поблагодарить проф. Л. Д. Ландау за постоянный интерес к работе и многочисленные дискуссии.

[10] Так как E измеряется в MeV, то переводной множитель для перехода от единиц см$^{-1}$ к этим единицам будет:

$$\frac{\hbar}{(M \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6})^{1/2}} = \frac{1}{1{,}55} \cdot 10^{12}.$$

Литература

1. *Bethe H.*, *Bacher R.* Rev. Mod. Phys., **8**, 82, 1936.
2. *Schwinger J.*, *Teller E.* Phys. Rev., **52**, 286, 1937.
3. *Ландау Л.*, *Смородинский Я.* ЖЭТФ, **14**, 269, 1944.
4. *Flügge S.*, *Mattauch J.* Phys. ZS., 44, 81, 1943.
5. *Myersa F.*, *Van Atta L.* Phys. Rev., **61**, 19, 1942; см. также *Rogers P. (jr.)*, *Rogers M.* Phys. Rev., **55**, 106, 1939.
6. *Cohen V.*, *Goldsmit H.*, *Schwinger J.* Phys. Rev., **55**, 106, 1939.
7. *Hanstein H.* Phys. Rev., **57**, 1045, 1940.
8. *Booth E.*, *Hurst C.* Proc. Roy. Soc., **A161**, 248, 1937.
9. *Ladenburga R.*, *Kanner M.* Phys. Rev., **52**, 911, 1937.
10. *Kikuchi S.*, *Aoki H.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **21**, 75, 1939; Phys. Rev., **55**, 108, 1939.
11. *Aoki H.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan., **21**, 232, 1939.
12. *Zinn W.*, *Seely S.*, *Cohen V.* Phys. Rev., **56**, 260, 1939.
13. *Ageno M.*, *Amaldi E.*, *Bocchiarelli D.*, *Trabacchi G.* Naturwiss., **21**, 231, 1943; Nuovo Cim., **1**, 253, 1943.
14. *Leipunsky A.*, *Rosenkewitsch L.*, *Timoschuk D.* Sow. Phys., **10**, 625, 1936.
15. *Голобородько Т.* ЖЭТФ, **14**, 247, 1944.
16. *Goldhaber M.* Nature, **137**, 824, 1936.
17. *Amaldi E.*, *Bocchiarelli D.*, *Rasetti F.*, *Trabacchi G.* Phys. Rev., **55**, 881, 1939.
18. *Tuve H.*, *Hafstad L.* Phys. Rev., **50**, 400. 1936.
19. *Amaldi E.*, *Bocchiarelli D.*, *Ferretti B.*, *Trabacchi O.* Naturwiss., **30**, 582, 1942 (цитировано по Chem. Zentralbl., 237, 1943).
20. *Champion P.*, *Powell C.* Proc. Roy. Soc., **183**, 64, 1944.
21. *Amaldi E.*, *Bocchiarelli D.*, *Trabacchi Q.* Ric. Scient, **12**, 820, 1940 (цитировано по Phys. Ber., **23**, 898, 1942).
22. *Breit G.*, *Thaxton H.*, *Eisenbud L.* Phys. Rev., **55**, 1018, 1939.

К теории рассеяния нейтронов протонами

Я. А. Смородинский

В предыдущей работе ([1], цитируется ниже как I) было показано, что обычная формула Вигнера для эффективного сечения рассеяния нейтронов на протоне должна быть исправлена. Постоянные, входящие в эту формулу, в действительности зависят линейным образом от энергии нейтронов. В результате в формуле вместо двух постоянных оказывается четыре.

Для определения значений этих постоянных мы использовали величину энергии связи дейтрона и измеренные значения эффективного сечения рассеяния для разных энергий. Однако вследствие скудности экспериментальных данных и их малой точности, полученные значения постоянных, вообще говоря, могли оказаться очень грубыми.

Недавно были опубликованы две работы по изучению рассеяния нейтронов протонами в широком интервале энергии [2, 3]. В опытах Бейлея и др. [2] энергия нейтронов менялась от 350 keV до 6 MeV. Фриш [3] исследовал дополнительно рассеяние нейтронов с энергиями 35, 95, 165 и 490 keV.

Полученные данные позволяют проверить выведенную формулу и получить более точное значение постоянных. Оказалось, что формула даже при старых значениях постоянных очень хорошо согласуется с экспериментальными данными. Только при малых энергиях экспериментальные точки в этом случае оказываются лежащими несколько выше вычисленных. Это расхождение объясняется тем, что мы не могли использовать данных, соответствующих малым энергиям нейтронов (кроме случая тепловых нейтронов, ср. I).

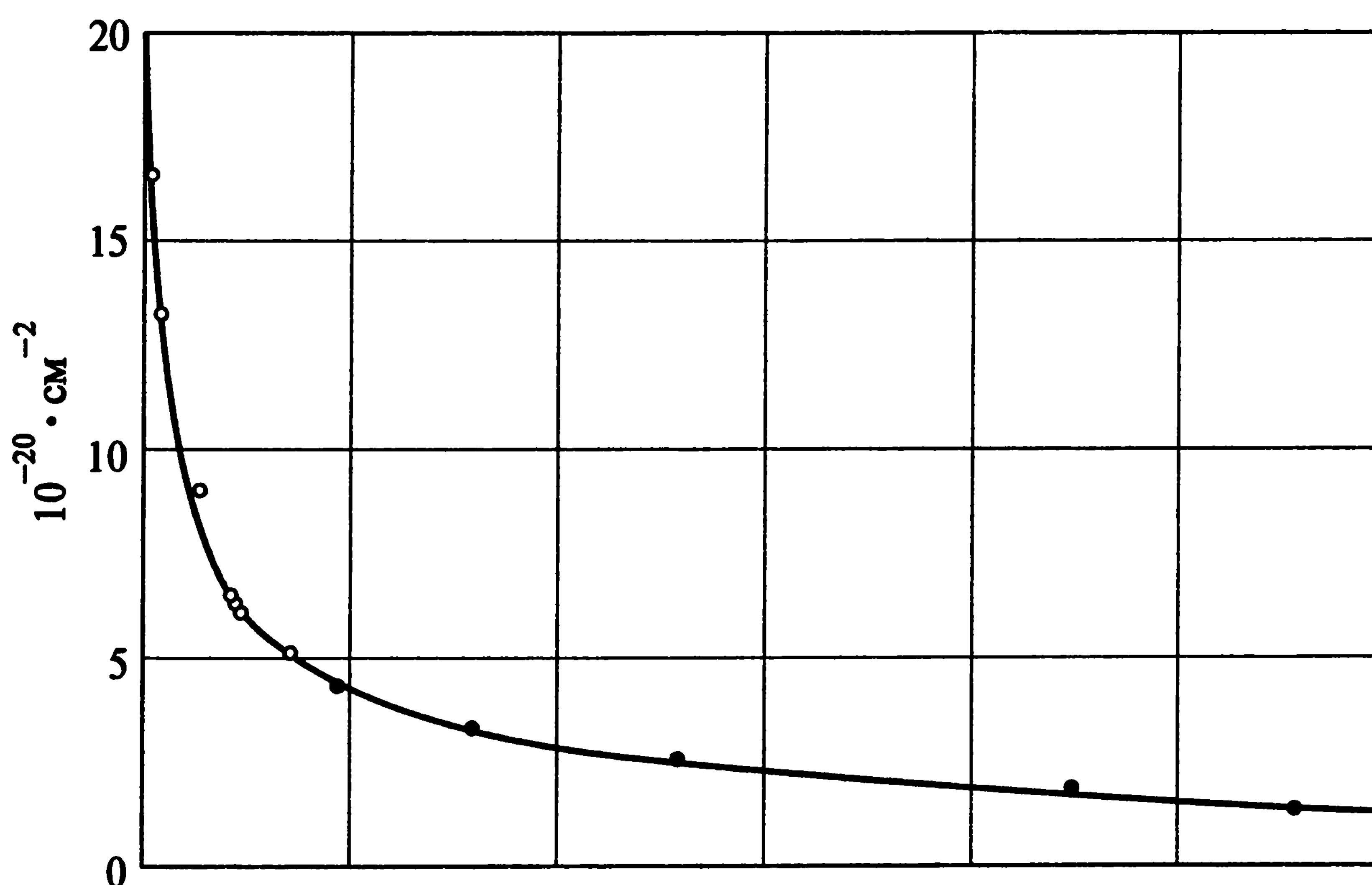


Рис. 1. ○ — Фриш, ● — Бейлей и др., сплошная линия — результат вычисления

Для того чтобы сделать согласие еще лучшим, достаточно, оказывается, лишь немного изменить значение одного коэффициента. Именно, вместо постоянной 0,29 во втором члене, мы должны пользоваться значением 0,27. Окончательно формула для эффективного сечения приобретает вид

$$\sigma = 1{,}30 \cdot 10^{-24} \left[\frac{3}{(1{,}22 - 0{,}006E)^2 + E/2} + \frac{1}{(0{,}27 + 0{,}006E)^2 + E/2} \right] \text{см}^2, \qquad (1)$$

где E измеряется в MeV (в лабораторной системе координат). Формула (1) оказывается в прекрасном согласии с экспериментальными данными (рис. 1).

Как было показано в 1, корень знаменателя второго члена равен $-2\varepsilon_1$, где ε_1 — энергия виртуального (синглетного) уровня дейтрона. Пользуясь новыми значениями постоянных, получим для этой энергии значение

$$\varepsilon_1 = 0{,}069 \qquad (2)$$

вместо значения 0,09, данного в I. Величина ε_1 имеет точность около 10 %. Необходимо заметить, что формула (1) очень слабо чувствительна ко второму коэффициенту в знаменателе второго члена. Поэтому в действительности из данных по рассеянию определяются только две постоянных (третья постоянная определяется энергией связи дейтрона).

Полученное совпадение между двухпараметрической формулой и экспериментальными данными подтверждает нашу точку зрения, что из существующих данных нельзя получить никаких сведений о форме потенциальной ямы, кроме значения каких-либо двух параметров (или, в лучшем случае, трех), характеризующих взаимодействие протона и нейтрона в двух состояниях (синглетном и триплетном).

Представляет интерес применить формулу (1) к случаю нейтронов с энергией в 25 MeV, исследованных Шерром [4]. Шерр получил для сечения значение $0{,}39 \cdot 10^{-24}$ см^2. По формуле (1) получается в этом случае величина $0{,}40 \cdot 10^{-24}$ см^2. Мы должны принять при этом во внимание p-рассеяние, сечение для которого при этих энергиях должно быть около $0{,}01 \cdot 10^{-24}$ см^2 (ср. I); поэтому вычисленное значение сечения будет примерно $0{,}41 \cdot 10^{-24}$ см^2, что находится также в хорошем согласии с экспериментом. (Напомним, что при 14 MeV также получалось хорошее согласие, отмеченное в I).

Таким образом формула (1) дает значения сечения рассеяния в очень широком интервале энергии нейтронов.

Литература

1. *Смородинский Я.* ЖЭТФ, **15**, 89, 1945.
2. *Bailey C. L. et al.* Phys. Rev., **70**, 583. 1946.
3. *Frisch D. H.* Phys. Rev., **70**, 589, 1946.
4. *Sherr R.* Phys. Rev., **68**, 240, 1945.

О формуле для изотопического смещения

Я. А. Смородинский

Формула для величины изотопического смещения в спектрах тяжелых атомов была получена ранее Розенталем и Брейтом [1] и Рака [2]. Однако сами эти авторы отмечают нестрогость своего метода. Хотя полученные ими формулы и дают правильную оценку эффекта, представляется интересным дать очень простой и строгий вывод этой формулы.

Вычисления Брейта основаны на следующей схеме. Поле ядра заменяется потенциалом

$$\begin{aligned} V &= -\frac{Ze^2}{r}, \quad r > r_0, \\ V &= -\frac{Ze^2}{r_0}, \quad r < r_0, \end{aligned} \tag{1}$$

т. е. внутри ядра потенциал считается постоянным.

Это соответствует введению понятия эффективного радиуса — радиуса поверхностно заряженной сферы, внешнее поле которой совпадает с полем ядра.

Уровни электрона в таком поле находятся методом теории возмущений. Возмущение будет

$$u = -Ze^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right). \tag{2}$$

При $r = 0$ возмущение становится бесконечным, и мы, вообще говоря, не можем уже пользоваться обычной теорией возмущений. В частности, мы не можем считать изменение энергии пропорциональным

$$\int u^2\psi^2\,dV.$$

Это сразу ясно, если мы заметим, что V отлично от нуля лишь при $r < r_0$, а как раз в этой области ψ сильно отличается от невозмущенной функции.

Эта трудность может быть преодолена, если мы воспользуемся методом возмущения граничных условий, аналогичным методу, предложенному Фрелихом для уравнения Шредингера.

Рассмотрим задачу вне ядра. В этой области, очевидно, поле невозмущенной задачи совпадает с реальным полем. Единственное отличие состоит в том, что при $r = r_0$ волновая функция должна совпасть с функцией, соответствующей прямоугольной яме, в то время как в реальной задаче она остается кулоновской вплоть до $r = 0$. Поэтому можно считать, что в такой «внешней» задаче возмущаются только граничные условия при $r = r_0$.

Мы покажем, что изменение энергии может быть выражено через значения возмущенной и невозмущенной волновых функций на поверхности сферы $r = r_0$.

Уравнения Дирака для волновых функций $\varphi_1^0 = \psi_1^0 r$ и $\varphi_2^0 = \psi_2^0 r$ имеют вид[1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1^0}{dy} + \frac{\varphi_1^0}{y} &= \frac{1}{2a}\left[1 - \frac{E-V}{\mu}\right]\varphi_2^0, \\ \frac{d\varphi_2^0}{dy} - \frac{\varphi_2^0}{y} &= \frac{1}{2a}\left[1 + \frac{E-V}{\mu}\right]\varphi_1^0. \end{aligned} \tag{3}$$

Соответствующие уравнения для возмущенных функций φ_1 и φ_2 будут

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{\varphi_1}{y} &= \frac{1}{2a}\left[1 - \frac{E-V}{\mu}\right]\varphi_2 - \frac{\varepsilon}{2\mu a}\varphi_2, \\ \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{\varphi_2}{y} &= \frac{1}{2a}\left[1 + \frac{E-V}{\mu}\right]\varphi_1 + \frac{\varepsilon}{2\mu a}\varphi_1, \end{aligned} \tag{4}$$

где μ — масса электрона, $y = (2\mu Ze^2/\hbar^2)r = 2Zr/a_{\text{H}}$, $a_{\text{H}} = \hbar^2/\mu e^2$, $a = Ze^2/\hbar c$ и ε — изменение энергии.

Умножая четыре уравнения (3) и (4) соответственно на φ_2, $-\varphi_1$, $-\varphi_2^0$ и φ_1^0 и складывая, легко получим

$$\frac{d}{dr}\left(\varphi_2\varphi_1^0 - \varphi_2^0\varphi_1\right) + \frac{\varepsilon}{2\mu c^2 a}\left(\varphi_2^0\varphi_2 + \varphi_1^0\varphi_1\right) = 0 \tag{5}$$

или, возвращаясь к переменной r,

$$\frac{d}{dr}\left(\varphi_2\varphi_1^0 - \varphi_2^0\varphi_1\right) + \frac{Z}{a_{\text{H}}}\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\left(\varphi_2^0\varphi_2 + \varphi_1^0\varphi_1\right) = 0. \tag{6}$$

Считая, что возмущенная волновая функция на бесконечности совпадает с невозмущенной (чего всегда можно достигнуть нормировкой), мы можем, интегрируя (6) от r_0 до ∞, заменить во втором члене φ_1 и φ_2 на φ_1^0 и φ_2^0 и заменить нижний предел при интегрировании этого члена на нуль. В силу нормировки

$$4\pi\int_0^\infty\left(\varphi_1^0\bar\varphi_1^0 + \varphi_2^0\bar\varphi_2^0\right)dr = 1, \tag{7}$$

и из (6) получаем:

$$\varepsilon = 4\pi a_{\text{H}} a \mu c^2\left[\varphi_2(r_0)\varphi_1^0(r_0) - \varphi_2^0(r_0)\varphi_1(r_0)\right]. \tag{8}$$

Значения функций при $r = r_0$ вычислены в работе Брейта и Розенталя:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1^0}{a} &= C_0 J_{2\rho}\left(2y^{1/2}\right); \\ \varphi_2^0 &= -C_0(1+\rho)J_{2\rho}\left(2y^{1/2}\right); \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1}{a} &= \frac{C}{C_0}\frac{\varphi_1^0}{a} + C_- J_{-2\rho}\left(2y^{1/2}\right); \\ \varphi_2 &= \frac{C}{C_0}\varphi_2^0 + C_-(1-\rho)J_{-2\rho}\left(2y^{1/2}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

[1] Мы пользуемся обозначениями Брейта и Розенталя [1].

где $\rho^3 = 1 - (Ze^2/\hbar c)^2$, $J_{2\rho}$ — функция Бесселя, а постоянные C и C_- определяются условиями непрерывности при $r = r_0$. C_0 находится из нормировки (7):

$$C_0 = \psi(0)\frac{a_H}{2Z}, \tag{11}$$

где $\psi(0)$ — значение нерелятивистской водородной функции в нуле.

Подставляя (9) и (10) в (8) и разлагая функции Бесселя в ряд, мы получаем, ограничиваясь первым членом разложения:

$$\varepsilon = 8\pi Ze^2C_0^2\frac{\rho y_0^{2\rho}}{[\Gamma(2\rho+1)]^2}\frac{\zeta(r_0)(1+\rho)+1}{(1-\rho)\zeta(r_0)+1}. \tag{12}$$

Отсюда для разности термов двух изотопов:

$$\delta\varepsilon = 4\pi Ze^2C_0^2(2\rho)^2\frac{y_0^{2\rho}}{[\Gamma(2\rho+1)]^2}\frac{\zeta(\rho_0)(1+\rho)+1}{\zeta(\rho_0)(1-\rho)+1}\frac{\delta r_0}{r_0}, \tag{13}$$

где

$$y_0 = \frac{2Zr_0}{a_H}, \quad \zeta(r_0) = \left(\frac{V}{V(r_0)-2mc^2}\right)^{1/2}\frac{1}{a}\frac{J_{3/2}(qr_0)}{J_{1/2}(qr_0)}, \quad q = \frac{1}{\hbar c}V^{1/2}\left[V-2mc^2\right]^{1/2}. \tag{14}$$

Можно считать, что

$$\zeta(r_0) \approx -\frac{1}{a}\frac{J_{3/2}(a)}{J_{1/2}(a)} \approx -\frac{1}{3}. \tag{15}$$

Окончательно получаем (в см$^{-1}$):

$$\delta\varepsilon = \frac{8\pi Ra_H^3}{Z}\psi_0^2\frac{1}{[\Gamma(2\rho+1)]^2}\frac{2-\rho}{2+\rho}y_0^{2\rho}\frac{\delta r_0}{r_0}, \tag{16}$$

где R — постоянная Ридберга $3{,}658 \cdot 10^{-6}$ см$^{-1}$.

Формула Рака имеет вид[2)]

$$\delta\varepsilon_R = \frac{4\pi Ra_H^3}{Z}\psi_0^2\frac{1}{[\Gamma(2\rho+1)]^2}\frac{1+\rho}{1+2\rho}y_0^{2\rho}\frac{\delta r_0}{r_0}. \tag{17}$$

Таким образом, правильное выражение отличается от старого на множитель

$$\xi = \frac{\delta\varepsilon}{\delta\varepsilon_R} = \frac{2\rho^2(2-\rho)(1+2\rho)}{(1+\rho)(2+\rho)}. \tag{18}$$

При $\rho \to 1$, $\xi \to 1$, т. е. для легких ядер, обе формулы совпадают. Для ртути $\xi = 0{,}8$.

Я благодарен акад. Л. Ландау, который обратил мое внимание на эту задачу.

Литература

1. *Breit, Rosental.* Phys. Rev., **41**, 451, 1932.
2. *Racah G.* Nature, **129**, 723, 1932.

[2)] В формулу Брейта, благодаря специальному выбору потенциала, входит еще множитель $(1 + 2\rho)$ (ср. сноску 9 в [1]).

Нормировка волновой функции дейтрона

Я. А. Смородинский

При вычислении различных процессов, в которых участвует дейтрон, обычно используется приближенная волновая функция дейтрона

$$\psi_d \sim \frac{1}{r} e^{-\alpha r}, \tag{1}$$

введенная Бете и Пейерльсом. При этом для ее нормировки обычно пользуются моделью дейтрона с взаимодействием в виде прямоугольной ямы ([1], § 12), что представляется крайне непоследовательным, так как основным достоинством теории дейтрона как раз и является ее независимость от конкретного вида потенциала взаимодействия. Эта непоследовательность может быть, однако, легко устранена, если воспользоваться уточненной теорией, предложенной в работах автора [2, 3].

Для того чтобы пронормировать волновую функцию дейтрона, необходимо вычислить интеграл

$$\int_0^\infty f^2\, dr, \tag{2}$$

где $f = \psi_d r$.

При вычислении этого интеграла мы сталкиваемся с той трудностью, что благодаря экспоненциальному характеру волновой функции (1) существенную роль в интеграле имеет область вблизи начала координат, а именно в этой области приближенная волновая функция наиболее сильно отличается от точной.

Эта трудность может быть преодолена, если использовать уточненные граничные условия, данные в [2], с экспериментально полученными значениями коэффициентов.

Если не накладывать на волновую функцию никаких условий на бесконечности, то волновое уравнение будет иметь решение при любом значении параметра E_0 (который в этом случае уже не будет энергией системы). Продифференцируем это волновое уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{M}\frac{d^2 f}{dr^2} + U(r) f = E_0 f \tag{3}$$

по E_0 и умножим результат на E. Получим, считая теперь f функцией координат и энергии,

$$-\frac{\hbar^2}{M} f \frac{\partial}{\partial E_0}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + fU\frac{\partial f}{\partial E} = f^2 + E_0 f \frac{\partial f}{\partial E_0}. \tag{4}$$

Используя само уравнение (3), приведем это выражение к виду

$$-\frac{\hbar^2}{M}\left(f\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{\partial f}{\partial E_0} - \frac{\partial f}{\partial E_0}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) = f^2. \tag{5}$$

Интегрируя от 0 до некоторого (большого) значения R и принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial}{\partial E_0}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{f^2}\left[f\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial E_0} - \frac{\partial f}{\partial E_0}\frac{\partial f}{\partial r}\right], \tag{6}$$

получим

$$\int_0^R f^2\,dr = -\frac{\hbar^2}{M}\left[f^2\frac{\partial}{\partial E_0}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right]. \qquad (7)$$

Будем теперь считать, что нормировочный множитель у приближенной функции выбран так, чтобы на больших расстояниях от начала координат эта функция совпадала с точной, и вычислим интеграл (7) сначала с помощью точной функции f, а потом с помощью приближенной f_a.

Если теперь подставить в (7) точную волновую функцию, которая, очевидно, обращается в нуль в начале координат, то правая часть (7) также обращается на нижнем пределе в нуль. Если же пользоваться приближенной волновой функцией, то в силу уточненного граничного условия, которое мы запишем, меняя обозначения, принятые в [2], в виде

$$\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\right)_0 = \frac{\sqrt{Mc^2}}{\hbar c}(A_1 + 2B_1E_0), \qquad (8)$$

где E_0 — энергия в системе центра инерции, получим:

$$\frac{\partial}{\partial E_0}\left(\frac{1}{f_a}\frac{\partial f_a}{\partial r}\right) = 2B_1. \qquad (9)$$

На верхнем пределе значение правой части (7) одно и то же как для точной, так и для приближенной функции, т. е. обе функции на больших расстояниях от начала координат совпадают. Поэтому мы можем написать

$$\int_0^\infty f^2\,dr - \int_0^\infty f_a^2\,dr = -2B_1\frac{\sqrt{M}}{\hbar}, \qquad (10)$$

пользуясь выражением для приближенной волновой функции (1):

$$\int_0^\infty f^2\,dr = \frac{1}{2\alpha}\left[1 - 4\varepsilon^{1/2}B_1\right]. \qquad (11)$$

Постоянные A_1 и B_1 в граничном условии были определены из экспериментальных данных [3].

Если энергии измеряются в MeV, то $A = 1{,}22$ и $B = 0{,}06$. Пользуясь еще значением $\varepsilon = 2{,}18$, получим

$$\int_0^\infty f^2\,dr = \frac{1}{1{,}23\sqrt{2\alpha}}. \qquad (12)$$

Поэтому нормированная волновая функция дейтрона имеет вид

$$f = 1{,}23\sqrt{2\alpha}\,e^{-\alpha r} \approx \sqrt{3\alpha}\,e^{-\alpha r}. \qquad (13)$$

Автор выражает свою благодарность акад. Л. Д. Ландау за интерес к работе.

Литература

1. *Бете Г. А., Бечер Р. Ф.* Физика ядра. Харьков, 1938. Ч. 1.
2. *Смородинский Я.* ЖЭТФ, **15**, 89, 1945.
3. *Смородинский Я.* ЖЭТФ, **17**, 941, 1947.

О гидротехнической лаборатории, профессоре Смородинском и рассеянии нуклонов нуклонами

Р. М. Рындин

...Вас молнией заживо
Испепелял талант...

А. Вознесенский
«Мастера»

Яков Абрамович Смородинский. Память уводит меня в далекие времена нашей первой встречи в марте 1952 г. Познакомились мы в Гидротехнической лаборатории АН СССР[1)], куда я был направлен на работу после окончания физического факультета ЛГУ. И Яков Абрамович, уже маститый в те времена профессор, был всего лишь на одиннадцать лет старше меня, начинающего физика. Почти ровесники, — сказал бы я сейчас. Мы как-то сразу приглянулись друг другу, и в результате проработали восемнадцать лет, можно сказать бок о бок, до моего возвращения в Питер. Многому научился я у Якова Абрамовича за эти годы; стремление и умение дарить знания окружающим было его внутренней потребностью, характерной чертой его таланта.

ГТЛ была первоклассно оборудованной лабораторией с сильным коллективом. Основой ее экспериментальной базы являлся синхроциклотрон, ускорявший протоны до энергии 480 МэВ, что было максимальной энергией, достигнутой в то время на ускорителях мира. В общем, лаборатория, расположенная вблизи тихого тогда, укромного поселка, выросшего на месте деревни Ново-Иваньково, была прекрасным местом для работы, этаким идеальным островком научного сообщества. Правда, не следует забывать, что рядом находился и остров другого архипелага — гулаговский лагерь. Заключенные, конвоируемые колонны которых проходили по улицам, были заняты строительными работами. И первым кладбищем городка стало кладбище заключенных, расположившееся на укрытом зарослями кустов лугу, на берегу реки Дубны. Мы набрели на него случайно во время прогулки. Не знаю, сохранилось ли оно до сих пор. Конечно, ново-иваньковский симбиоз института и лагеря отнюдь не был единственным.

[1)] ГТЛ, у которой по соображениям секретности было еще и другое название — ПЯ 1326, через пару лет превратилась в Институт ядерных проблем АН СССР, а еще через два года вошла в состав ОИЯИ под именем Лаборатории ядерных проблем.

Физика элементарных частиц знала в те времена лишь нуклоны, изотопический триплет π-мезонов и лептоны ($e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$, ν и $\bar{\nu}$), а высокие энергии, как уже отмечалось, были ограничены несколькими сотнями МэВ. В упругих столкновениях протонов с протонами при не слишком высоких энергиях наблюдалась в пределах ошибок опыта изотропия рассеяния (за исключением, естественно, кулоновской области), причем величина дифференциального сечения превышала λ^2 — максимально возможное сечение для волны с нулевым моментом. Отсюда следовало, что, кроме $^1S_0$-состояния pp-системы, в рассеянии участвует и $^3P_0$-состояние, тоже приводящее к изотропии рассеяния. В рассеянии π^+p наблюдался $(\Delta 1232)P_{33}$ резонанс. Это были первые результаты исследования процессов рассеяния, будоражившие воображение как экспериментаторов, так и теоретиков. Такова была физическая атмосфера к началу изучения процессов NN- и πN-столкновений в ГТЛ. Во главе экспериментальных исследований стояли тогда М. Г. Мещеряков, В. П. Джелепов, М. С. Козодаев и Б. М. Понтекорво. Теоретическим сектором на общественных началах заведовал И. Я. Померанчук, который вместе с Я. А. Смородинским, Б. Т. Гейликманом и А. Б. Мигдалом приезжал каждую субботу на семинар и обсуждения. Иногда вместе с ними появлялся и Л. Д. Ландау. Трудно переоценить значение встреч и обсуждений с этими людьми для молодых теоретиков и экспериментаторов. Эти встречи продолжались довольно долго. Но рано или поздно все хорошее кончается, кончилась и эта идиллия. Внезапно перестал ездить Померанчук. На наши недоуменные вопросы Борис Товиевич Гейликман, ставший временно исполняющим обязанности заведующего сектором, отвечал слегка уклончиво, что решается вопрос о новом начальнике теоретиков. Потом в разговорах о грядущих переменах стало фигурировать имя Я. П. Терлецкого. Вскоре в роли нового начальника появился и он сам. Человека, более далекого от роли эксперта в физике высоких энергий или физике элементарных частиц, было трудно придумать. Как и в каких инстанциях возникла эта кандидатура, я точно не знаю и могу только догадываться. Скажу лишь, что в результате этого назначения лаборатория понесла несомненный урон. В общем, Чука выжили. Теоретическая «квадрига» исчезла, ездить продолжал лишь Яков Абрамович. Его роль и ответственность в этих условиях сильно возросла. Именно он стал не формальным, а фактическим преемником Чука в лаборатории. И выбор пал на Смородинского не случайно. Его поразительная физическая интуиция, умение каким-то шестым чувством видеть еще не оформившееся новое, его опыт феноменологического анализа процессов столкновений — все это было незаменимо как при обсуждении программы работ на ускорителе, так и при осмысливании результатов экспериментов. Огромный вклад Якова Абрамовича в наступивший впоследствии «звездный час» лаборатории несомненен. Вокруг него сгруппировались Л. И. Лапидус, С. М. Биленький и я. Вскоре появилась в ГТЛ группа Смородинского. Справедливости ради надо сказать, что в нашу деятельность Терлецкий почти не вмешивался.

Исследование сильного взаимодействия между нуклонами представляло тогда одну из важнейших задач ядерной физики и физики высоких энергий. Основным источником сведений об этом взаимодействии являлись опыты по изучению простейших ядерных реакций с участием нуклонов и, в первую очередь, опыты по рассеянию нуклонов нуклонами. При отсутствии последовательной теории сильных взаимодействий феноменологический анализ процессов столкновений приобретал доминирующую роль.

Не что иное, как рассеяние нуклонов нуклонами, стало первой любовью Якова Абрамовича в физике, именно любовью, а не мимолетным увлечением. И любовь эта, начавшаяся еще в военные времена, не угасала на протяжении по меньшей мере пятнадцати лет. Первым ее проявлением стал замечательный цикл работ Я. А. [1–4], в котором для описания низкоэнергетического рассеяния нуклонов нуклонами было

впервые введено понятие эффективного радиуса сильных взаимодействий, модифицировавшее приближение нулевого радиуса Бете—Пайерлса [5]. Начало этому циклу положила изящная совместная работа Я. А. и Л. Д. Ландау о феноменологическом учете ядерных сил в рассеянии протонов протонами, где постоянная в граничном условии рассматривалась как линейная функция энергии. Это позволило описать сильные взаимодействия с помощью двух постоянных — длины рассеяния и эффективного радиуса.

Рассмотрим чуть более подробно рассеяние нейтронов протонами при малых энергиях, когда радиус сильного взаимодействия ρ много меньше длины волны нейтронов ($\rho/\lambda = \rho k \ll 1$), а потенциальная энергия сильного взаимодействия $V(r)$ значительно больше энергии столкновения (или энергии связи дейтрона ε). В этих условиях форма потенциала $V(r)$ не существенна (the shape-independent approximation), а влияние сильных взаимодействий можно учесть изменением граничных условий, накладываемых на волновую функцию s-состояния $u(r) = r\,\psi(r)$ при $r = 0$ (состояния $^1S_0$ и $^3S_1$ системы np, примесью $^3D_1$-волны к $^3S_1$-состоянию пренебрегается), приравнивая логарифмическую производную $u(r)$ линейной функции энергии или квадрата волнового вектора k нейтрона:

$$\left.\frac{u'(r)}{u(r)}\right|_{r=0} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\,r_0k^2. \qquad (1)$$

Буквами a и r_0 обозначены длина рассеяния и эффективный радиус. Подставляя в (1) асимптотические выражения волновых функций для случая рассеяния $u \sim \sin\,(kr+\delta)$ и связанного состояния $u \sim \exp\,[-\alpha r]$ (для связанного состояния с отрицательной энергией $E = -\varepsilon = -\hbar^2\alpha^2/M$ и $k = i\alpha$), находим:

$$k\cot\delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\,r_0k^2, \qquad (2)$$

$$\alpha = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\,r_0\alpha^2, \qquad (3)$$

а амплитуда s-рассеяния f принимает вид:

$$f = \frac{1}{k\cot\delta - ik} = \frac{1}{-\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0k^2 - ik}. \qquad (4)$$

Соотношение (3) представляет собой условие обращения в нуль знаменателя амплитуды (4), т. е. определяет положение полюса f при отрицательных энергиях.

Пренебрегая членом r_0, получим приближение нулевого радиуса Бете—Пайерлса. В случае $a > 0$ (это условие существования связанного состояния, оно выполняется в $^3S_1$-состоянии) длина рассеяния определяет как сечение триплетного np-рассеяния, так и размеры дейтрона $\alpha = 1/a$ или энергию связи ε. Полюс амплитуды лежит в этом случае на физическом листе плоскости комплексной энергии

$$f = \frac{1}{-\alpha - ik} = -\frac{\hbar^2}{M}\,2\alpha\,\frac{1}{E+\varepsilon}. \qquad (5)$$

В случае $a < 0$ связанного состояния не существует, и говорят о виртуальном уровне. Это имеет место для $^1S_0$-состояния. Полюс расположен на отрицательной оси второго листа плоскости комплексной энергии.

Как и в случае Бете—Пайерлса, амплитуда (4) имеет полюс на физическом листе для $a > 0$ (как было показано Я. А., r_0 всегда больше нуля, см. [10]) и на втором листе для $a < 0$. Энергия связи и энергия виртуального уровня находятся из условия (3).

Сечение рассеяния как в $^1S_0$, так и в $^3S_1$-состоянии имеет вид:

$$\sigma = \frac{4\pi}{\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0k^2\right)^2 + k^2}, \tag{6}$$

а усредненное по спинам сечение равно $\frac{1}{4}\sigma_S + \frac{3}{4}\sigma_T$.

Асимптотическое выражение дейтронной волновой функции (см. [4]) следует нормировать следующим образом:

$$u(r) = \sqrt{\frac{2\alpha}{1-\alpha r_0}}\, e^{-\alpha r}\,. \tag{7}$$

Эта нормировка называлась и называется нормировкой дейтронной волновой функции по Смородинскому.

Квадрат этого нормировочного множителя определяет и вычет в полюсе амплитуды f (см. второе выражение амплитуды в (5), там нормировочный множитель соответствует $r_0 = 0$).

Эти формулы давно вошли в учебники, и их можно там найти. Я привел их здесь для справок, чтобы читатель мог без труда отождествить современные обозначения с обозначениями Я. А., которые отличаются от приведенных здесь множителями $\hbar/M^{1/2}$ или $M^{1/2}/\hbar$. Кроме того, при сопоставлении числовых величин следует помнить, что в формулы Я. А. входит энергия нейтрона в л. с., а здесь вдвое меньшая энергия относительного движения в с. ц. и.

Вот сравнительно современные значения [6, 7] a и r_0: np-рассеяние:

$$a_s = -23{,}68 \pm 0{,}03 \text{ fm}, \qquad r_s = 2{,}67 \pm 0{,}02 \text{ fm},$$
$$a_t = 5{,}41 \pm 0{,}01 \text{ fm}, \qquad r_t = 1{,}75 \pm 0{,}015 \text{ fm};$$

эти цифры соответствуют $\varepsilon_s = 67$ кэВ и $\varepsilon_t = 2{,}23$ МэВ; pp-рассеяние:

$$a_s = -7{,}694 \pm 0{,}012 \text{ fm}, \quad r = 2{,}656 \pm 0{,}017 \text{ fm},$$
$$(a_s)\text{ экв} = -17{,}01 \text{ fm},$$

где (a_s)экв — вычисленная эквивалентная длина при отсутствии кулоновских сил. Эффективные радиусы в np- и pp-рассеянии в $^1S_0$-состоянии с хорошей точностью совпадают, как того требует изотопическая инвариантность, длины же рассеяния заметно различаются.

Коэффициенты, используемые Я. А. при описании np-рассеяния (см. [2, 3]) и вычисленные на основании приведенных выше данных, равны:

$$A_t = 1{,}19;\ 1{,}22, \qquad B_t = 0{,}068;\ 0{,}06,$$
$$A_s = 0{,}27;\ 0{,}27, \qquad B_s = 0{,}104;\ 0{,}06.$$

Для сравнения после точки с запятой приведены цифры, вычисленные Я. А. Наибольшие изменения в B_s обусловлены уточненными с тех пор данными при малых энергиях.

Работы этого цикла уже стали классическими, и сейчас их знает каждый грамотный студент-физик, изучивший квантовую механику.

Второй цикл работ Якова Абрамовича (см. [8–15]) посвящен нуклон-нуклонному рассеянию при высоких энергиях (в несколько сот МэВ). Непосредственной целью этих опытов является получение сведений об асимптотическом поведении волновых функций сталкивающихся нуклонов или, иначе говоря, восстановление матрицы рассеяния нуклонов нуклонами. Возникает вопрос о том, сколько и какие именно эксперименты следует выполнить для достижения этой цели. Хорошим примером,

демонстрирующим необходимость сложных опытов с несколькими мишенями, служит упомянутое выше изотропное рассеяние, где доминируют два состояния $^1S_0$ и $^3P_0$. Как разделить вклады этих состояний? Поляризации при таком рассеянии не возникает. Но если спины в $^1S_0$-состоянии всегда противоположны, то в $^3P_0$ они скоррелированы по-другому и в значительной степени параллельны. И, следовательно, эти состояния могут быть разделены при измерении корреляции поляризаций. Но это уже опыт с тремя мишенями. Во-первых, исследуемое pp-рассеяние, а затем измерение на совпадения поляризаций рассеянных частиц и частиц отдачи на двух мишенях-анализаторах. Именно отталкиваясь от изотропного рассеяния, Я. А. Смородинский и В. В. Владимирский проанализировали корреляцию поляризаций в общем случае рассеяния неполяризованных протонов на водороде [9].

Вопрос о полном опыте, т. е. вопрос о том, сколько и каких экспериментов необходимо выполнить для определения матрицы упругого рассеяния $M(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ нуклонов нуклонами, был решен в совместной работе Я. А. Смородинского, Л. Д. Пузикова и Р. М. Рындина [10].

Матрица нуклон-нуклонного рассеяния, инвариантная относительно вращений, отражений и обращения времени, имеет вид:

$$M(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \alpha + \beta\sigma_1 \cdot \boldsymbol{n}\sigma_2 \cdot \boldsymbol{n} + \gamma(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \boldsymbol{n} + \delta\sigma_1 \cdot \boldsymbol{m}\sigma_2 \cdot \boldsymbol{m} + \varepsilon\sigma_1 \cdot \boldsymbol{\ell}\sigma_2 \cdot \boldsymbol{\ell}, \quad (8)$$

где σ_1 и σ_2 — матрицы Паули, а $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\ell}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы в направлениях $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$, $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$, $\mathbf{k} \times \mathbf{k}'$ соответственно (в с. ц. и.), коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ — комплексные функции угла рассеяния и энергии. Они удовлетворяют определенным свойствам симметрии, обусловленным принципом Паули.

Как показано в [12], требование унитарности приводит в области энергий до порога мезонообразования к следующему интегральному соотношению

$$\frac{2\pi}{ik}\left[M(\mathbf{k}', \mathbf{k}) - M^+(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\right] = \int M^+(\mathbf{k}'', \mathbf{k}')M(\mathbf{k}'', \mathbf{k})\, d\Omega_{\mathbf{k}''}, \quad (9)$$

где $d\Omega_{\mathbf{k}''}$ — элемент телесного угла в направлении $\mathbf{k}''$. Это матричное соотношение эквивалентно пяти интегральным соотношениям между десятью действительными функциями угла и энергии (модули и фазы пяти коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$). Если пять из этих функций известны при заданной энергии во всем интервале углов, то в области энергий до порога рождения пионов пять других функций определятся пятью соотношениями (9). Подчеркнем, что из этих соотношений определяется и общая фаза матрицы рассеяния.

Отсюда видно, что для восстановления $M(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, в принципе, необходимо произвести пять опытов при всех углах ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ для pp- и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ для np-рассеяния).

Заметим также, что соотношение (9) справедливо для процесса упругого рассеяния частиц с любыми спинами, и число необходимых опытов в этом случае будет совпадать с числом комплексных амплитуд, определяющих матрицу рассеяния.

Были рассмотрены все возможные опыты по рассеянию нуклонов нуклонами, различающиеся как состоянием поляризации начальных пучка и мишени, так и характером измеряемых величин (сечение, поляризация рассеянной частицы, поляризация частицы отдачи, корреляция поляризаций), и проанализированы связи между ними, вытекающие из соображений инвариантности. Простейший полный опыт включает в себя пять экспериментов в одной плоскости с одной, двумя и тремя мишенями. Эти опыты не требуют поляризованной мишени, но поляризованная мишень всегда уменьшает число мишеней на единицу.

Эта работа оказала заметное влияние на экспериментаторов и, несомненно, способствовала восстановлению матрицы нуклон-нуклонного рассеяния (фазовый анализ) в области энергий до 1 ГэВ.

Идея полного опыта захватила Я. А., и он пытался применить ее к разным процессам, например, к β-распаду [13], хотел использовать для восстановления $M(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ дополнительные возможности, связанные с пороговыми особенностями Базя—Вигнера [14].

Особый интерес вызвали у Я. А. преобразования фаз, оставляющие неизменными наблюдаемые величины [16]: сечение, поляризацию и т. д., и могущие привести к неоднозначностям фазового анализа (например, преобразование Минами в πN-рассеянии). После не слишком удачной попытки найти такие преобразования в NN-рассеянии [11] они были найдены в [17] и в общем случае в [18]. Работа Я. А. (см. [15]) подвела итог этой проблеме.

Я. А. был страстным пропагандистом использования поляризованной мишени, ее различных физических применений, например, ее применения для определения четностей гиперонов [19, 20]. Читатель, заинтересованный в различных применениях поляризованной протонной мишени, может обратиться к обзору [21].

Нетривиальный, многообразный человек был Яков Абрамович. Среди физиков — блестящий физик, среди книжников — книжник, не только собирающий книги, но и читающий их и дающий их читать другим, среди педагогов — прекрасный педагог и прирожденный просветитель. Достаточно вспомнить издание полного собрания сочинений Эйнштейна, трудов Паули, фейнмановских лекций по физике и пр. Было в нем нечто от людей Возрождения. Поражала фантастическая неуемная энергия. Приезжая к нам в Питер в 70–80-х годах, он постоянно куда-то уносился — то на семинар, то встретиться с интересными людьми, то посмотреть что-то любопытное. А интересы были очень обширны: то это были редкие рукописные книги в БАН, то это была выставка в Эрмитаже или в Русском музее, то просто головоломки, которыми с удовольствием он забавлялся сам и забавлял других. Книги, особенно книги по искусству, были его нежной и постоянной любовью. Он не только знал и любил искусство — он щедро и с удовольствием делился этой любовью со всяким, кто был готов слушать, смотреть и воспринимать. Такое же глубокое знание и любовь к стихам. Ко многому из того, что у нас в 50–60-х годах не печаталось (Цветаева, Мандельштам, Гумилев, Киплинг, Дос Пасос и т. д.) он помогал прикоснуться тем, кто этого не знал или знал недостаточно.

Он умел и учил других жить полнокровной жизнью, был полон любопытства к любым ее проявлениям.

Наша жизнь — росинка.
Пусть лишь капелька росы
Наша жизнь — и все же...

Кобаяси Исса
Хокку (старинное японское трехстишие)

Литература

1. *Ландау Л. Д., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **14**, 269, 1944.
2. *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **15**, 89, 1945.
3. *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **17**, 941, 1947.
4. *Смородинский Я. А.* ДАН, **60**, 217, 1948.
5. *Bethe H., Peierls R.* Proc. Roy. Soc., **A148**, 146, 1935.
6. *Felder R. D. et al.* Nucl. Phys., **A28**, 308, 1977 и ссылки в ней.
7. *Noyes H. P.* Phys. Rev., **130**, 2025, 1963.
8. *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **27**, 123, 1954.
9. *Владимирский В. В., Смородинский Я. А.* ДАН, **104**, 713, 1955.

10. *Puzikov L., Ryndin R., Smorodinsky Ya.* Nucl. Phys., **3**, 436, 1957.
11. *Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **32**, 1200, 1957.
12. *Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **32**, 1584, 1957.
13. *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **36**, 1606, 1959.
14. *Базь А. И., Пузиков Л. Д., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **42**, 1249, 1962.
15. *Клепиков Н. П., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **43**, 2173, 1962.
16. *Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* ДАН, **103**, 69, 1955.
17. *Заставенко Л. Г., Рындин Р. М., Чжоу-Гуан Чжао.* ЖЭТФ, **34**, 526, 1958.
18. *Заставенко Л. Г.* ЖЭТФ, **35**, 785, 1958.
19. *Биленький С. М., Рындин Р. М.* ЖЭТФ, **35**, 827, 1958.
20. *Bilenky S. M.* Nuovo Cim. **10**, 1049, 1958.
21. *Биленький С. М., Лапидус Л. И., Рындин Р. М.* УФН, **84**, 243, 1964.

Поляризация при рассеянии протонов протонами

Я. А. Смородинский

Известно, что анализ данных по рассеянию протонов протонами оказывается весьма трудным из-за того, что в пределах ошибок опыта не удается заметить изменение сечения с углом рассеяния. Очевидно, что этот факт, вместе с фактом большой величины сечения, является доказательством того, что в рассеянии участвуют в сильной степени лишь состояния $^1S_0$ и $^3P_1$.

Ниже показывается, что крайне чувствительным методом определения других фаз является изучение поляризации при рассеянии. Для этой цели мы проанализируем результаты опытов по поляризации протонов с энергией 240 MeV, опубликованные в 1953 г. [1].

При энергии 240 MeV величина дифференциального сечения равна [2] $4{,}97\pm0{,}3\cdot 10^{-27}$ см^2/стерад или $1{,}5\lambda^2$ см^2/стерад, если выражать сечение в единицах λ^2. Это означает, что обе фазы $^1S_0$ и $^3P_1$ велики (так как максимальный вклад каждой фазы в сечение равен λ^2). К сожалению, из-за отсутствия точных данных о зависимости сечения от энергии нельзя вычислить обе фазы независимо, так как значение сечения при одной энергии определяет только сумму квадратов синусов фаз.

Обращаясь к вопросу о поляризации, мы будем считать, что поляризация происходит от интерференции волн $^3P_0$ и $^3P_2$, так как волна $^3P_1$ не интерферирует с этими волнами, а в синглетных состояниях поляризации быть не может (волнами с $l \geqslant 2$ мы пренебрегаем).

Нетрудно показать, пользуясь обычной техникой сложения квантовых векторов, что амплитуда рассеяния в триплетном состоянии с магнитным числом $m = 0$ определяется следующей формулой:

$$f(\theta) = \frac{1}{ik} e^{i\delta_0} \frac{1}{\sqrt{3}} \Big\{ \big(-\sin\delta_0 + e^{i\Delta}\sin\delta_2\big) Y_{1-1}\chi_1 + \\ + \big(\sin\delta_0 + 2e^{i\Delta}\sin\delta_2\big) Y_{10}\chi_0 + \big(-\sin\delta_0 + e^{i\Delta}\sin\delta_2\big) Y_{11}\chi_{-1} \Big\}. \qquad (1)$$

Здесь δ_0 и δ_2 — фазы состояний $^3P_0$ и $^3P_2$ соответственно, $\Delta = \delta_2 - \delta_0$, а χ — триплетные спиновые функции.

Поляризация определяется как среднее значение

$$p = 2\langle s_y \rangle = \langle \sigma_y \rangle,$$

где s_y — компонента спина протона, а σ_y — соответствующая матрица Паули.

Запишем (1) в виде

$$M_0 = a_{+1}\chi_{+1} + a_0\chi_0 + a_{-1}\chi_{-1}. \qquad (2)$$

(В этой формуле можно считать, что коэффициенты a_m определяют собой ряды по шаровым функциям.) Определим сечение поляризации формулой

$$d\sigma_p = (M_0^+, \sigma_y M_0)\, d\Omega = \frac{1}{2}(M_0^+, (\sigma_1 + \sigma_2)_y M_0)\, d\Omega, \qquad (3)$$

где $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ — оператор спина в триплетном состоянии. Очевидно, сечение поляризации есть произведение поляризации p на дифференциальное сечение. При

помощи формулы (2) получаем[1])

$$d\sigma_p = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\, a_0(a_+ - a_-). \tag{4}$$

Подставляя в эту формулу значения коэффициентов a_m из (1), получаем

$$d\sigma_p = \lambda^2 3 \sin\Delta \sin\delta_2 \sin\delta_0 \sin 2\vartheta \cos\varphi. \tag{5}$$

Если считать фазу δ_2 малой, то

$$d\sigma_p \approx -\lambda^2 3 \sin\delta_2 \sin^2\delta_0 \sin 2\vartheta \cos\varphi.$$

Для того чтобы оценить $\sin^2\delta_0$, воспользуемся величиной сечения, приведенной выше. Получим неравенство

$$1/2 < \sin^2\delta_0 < 1. \tag{6}$$

Тогда для сечения поляризации получаем

$$1{,}5|\sin\delta_2| < \frac{|d\sigma_p|}{\lambda^2 \sin 2\vartheta \cos\varphi} < 3|\sin\delta_2|. \tag{7}$$

(Знак фазы δ_2 определить нельзя, так как из опытов известна только абсолютная величина поляризации.)

Измеренная поляризация при $\varphi = 0$ и $\vartheta = 49^\circ$ (в системе центра инерции) была $(22 \pm 5)\cdot 10^{-2}$. Отсюда для сечения поляризации получаем

$$d\sigma_p = (33 \pm 10)\cdot 10^{-2}\lambda^2; \tag{8}$$

из (7) получаем, что фаза δ_2 удовлетворяет неравенству

$$0{,}12 \pm 0{,}04 < \sin\delta_2 < 0{,}23 \pm 0{,}08. \tag{9}$$

Таким образом, фаза δ_2 составляет около $10^\circ(\pm 3^\circ)$. Так как фаза δ_2 будет расти с энергией, то поляризационные эффекты должны сильно расти и представлять собой чувствительный метод для определения фаз. В частности, измерение зависимости поляризации от угла ϑ (для чего в двойном рассеянии можно, очевидно, изменять только угол второго рассеяния) позволит проверить, интерференция каких волн ответственна за наблюдаемый эффект.

Заметим, что фаза $\delta_2 = 10^\circ$ приведет к асимметрии рассеяния.

Сечение рассеяния при учете трех фаз ${}^1S_0$, ${}^3P_0$ и ${}^3P_2$ (для ${}^3P_2$ учитывается только интерференция) имеет вид

$$d\sigma = \lambda^2\left\{\sin^2\delta_s + \sin^2\delta_0 + 6\sin\delta_0\sin\delta_2\cos\Delta\left(\cos^2\vartheta - 1/3\right)\right\}. \tag{10}$$

Полагая сферически симметричную часть сечения равной $1{,}5\lambda^2$ и принимая для оценки $\sin^2\delta_0 = 0{,}75$, $\delta_2 = 10^\circ$, получим

$$d\sigma = \lambda^2\left\{1{,}5 \pm 0{,}2\cos^2\vartheta\right\}, \tag{11}$$

т. е. должна иметь место заметная асимметрия. Эта оценка, однако, довольно неточна, так как из-за множителя $\cos\Delta$ она более чувствительна к значению δ_0, чем поляризация.

Литература

1. *Oxley C. L. et al.* Phys. Rev., **91**, 418. 1953.
2. *Oxley C. L., Schamberger R. D.* Phys. Rev., **85**, 416, 1952.

[1]) Используются соотношения: $(\sigma_1 + \sigma_2)_y\chi_{\pm1} = \mp i\sqrt{2}\chi_0$ и $(\sigma_1 + \sigma_2)_y\chi_0 = i\sqrt{2}(\chi_+ - \chi_-)$.

Взаимодействие протонов с H^3 и возбужденные состояния α-частицы

А. И. Базь, Я. А. Смородинский

1. Вопрос о существовании возбужденных уровней у α-частицы давно обсуждался в литературе. Однако до сих пор не было ни убедительного доказательства существования таких уровней, ни убедительного доказательства их отсутствия. Естественно, что в связи с этим очень интересно провести анализ различных реакций, в которых может участвовать возбужденное состояние α-частицы.

В настоящее время наиболее полно изучена реакция $H^3(pn)\ He^3$. В начале 1953 г. Н. А. Власовым и Л. Н. Самойловым было впервые показано, что сечение этой реакции имеет в районе $E_p \sim 3$ MeV широкий максимум, который было естественно анализировать, исходя из возможных уровней α-частицы. Позднее появилась работа Вилларда и др. [1], в которой было проведено измерение сечения этой реакции. В частности, величина сечения в максимуме была определена в $0{,}5 \cdot 10^{-24}$ см^2. Фазовый анализ экспериментальных кривых не может быть произведен из-за возникающей неоднозначности, а потому для анализа приходится использовать качественные особенности угловых распределений в сочетании с результатами исследований других реакций.

Как оказывается, такой анализ позволяет построить хорошо согласующуюся картину, основанную на предположении о существовании возбужденного уровня α-частицы с $J = 2^-$ и $T = 0$, примерно при 22,0 MeV и лежащего несколько выше уровня с $J = 1^-$ и $T = 0$.

Эта схема находится в согласии с представлениями теории оболочек.

2. Реакция $H^3(pn)\ He^3$ имеет следующие характерные особенности:

1) сечение имеет максимум $0{,}5 \cdot 10^{-24}$ см^2, при $E_p = 3$ MeV; ширина этого максимума велика, что не исключает возможности существования двух уровней с расстоянием 1–2 MeV;

2) угловое распределение в интервале 2–5 MeV резко асимметрично. В системе центра инерции сечение $\sigma(0)$ в 3–4 раза меньше $\sigma(\pi)$; это отношение слабо меняется с энергией. Отношение сечений $\sigma(0)/\sigma(\pi/2)$, напротив, резко растет с энергией.

Если предположить, что в реакции не участвуют большие моменты налетающих частиц, и ограничиться значениями $l = 1, 2$, то перечисленные особенности позволяют указать квантовые числа состояний, являющихся в реакции основными.

Прежде всего заметим, что асимметрия относительно плоскости 90–270° связана с интерференцией волн разной четности, так как квадраты четной и нечетной амплитуд в отдельности, очевидно, не меняются при замене $\theta \to \pi - \theta$.

Чтобы исключить такие интерференционные члены, составим усредненное сечение $\sigma'(\theta) = 1/2[\sigma(\theta) + \sigma(\pi - \theta)]$.

Значение этой величины приведено в табл. 1.

Вычисляя угловые распределения для всех состояний системы $He^3 + n$, возможных при $l = 0, 1, 2$, легко убедиться, что большое отношение $\sigma(0)/\sigma(\pi/2)$ может быть объяснено только присутствием большой доли состояния 1^-.

Таблица 1

$\sigma'(\theta)10^{-27}$ см^2/стерад

θ \ (E, MeV)	1,69	2,06	2,85	3,70	4,61	5,09
0°	0,037	0,050	0,077	0,080	0,069	0,064
30°	0,032	0,043	0,064	0,060	0,051	0,047
60°	0,022	0,031	0,035	0,031	0,025	0,023
90°	0,020	0,023	0,019	0,016	0,013	0,011
$\sigma(0)/\sigma(\pi/2)$	1,8	2,2	4,1	5,0	5,3	5,8

Такое заключение находит свое подтверждение и в том, что в разложении сечения по степеням $\cos\theta$ в исследованной области только коэффициент при $\cos^2\theta$ сильно меняется с энергией; это означает, что в этой области сильно меняются фазы, отвечающие $l = 1$.

Обратимся теперь к величине сечения.

Как известно из теории рассеяния, максимально возможное значение сечения реакции в резонансе определяется формулой:

$$\sigma_{\text{макс}} = \pi\lambda^2 \frac{2J+1}{4}.$$

При энергии $E_p = 3$ MeV (в лабораторной системе координат) это дает

$$\sigma_{\text{макс}}(3\ \text{MeV}) = 0{,}36\,\frac{2J+1}{4}\,10^{-24}\ \text{см}^2.$$

Сравнивая с экспериментальной величиной $0{,}5\cdot 10^{-24}$ см^2, мы видим, что только наличие состояния с $J = 2$, приводящего к $\sigma_{\text{макс}} = 0{,}45\cdot 10^{-24}$ см^2, может дать такую величину сечения. Естественно, что наличие примеси состояния 1^- должно несколько увеличить эту величину и привести ее в согласие с опытом [1)].

Таким образом, мы видим, что наблюдаемая картина требует участия двух состояний, а именно состояний 2^- и 1^-.

Ввиду того, что отношение $\sigma(0)/\sigma(\pi/2)$ продолжает расти и при энергиях $E_p > 3$ MeV, можно утверждать, что состояние 1^- лежит выше состояния 2^-, а это последнее лежит примерно при 22 MeV.

Последнее значение складывается из разности масс $H^3 + p$ и α-частицы, равной 19,8 и переведенной в систему центра инерции энергии максимума $3\cdot 3/4 = 2{,}2$ MeV[2)].

Заметим в заключение, что асимметрия $\sigma(0)/\sigma(\pi)$ обязана интерференции рассмотренных состояний с волнами положительной четности (например, 0^+), не проявляющими резонансного характера.

3. Идентификация состояний, к которой мы пришли выше, хорошо согласуется со схемой уровней, определяемой моделью оболочек.

Действительно, рассеяние нейтронов и протонов на гелии указывает, что следующими состояниями за оболочкой $s_{1/2}$, заполненной в α-частице, идут состояния $p_{3/2}$ и $p_{1/2}$ (первое раньше). Поэтому в системе $H^3 + p$ следует ожидать, что первое возбуждаемое состояние окажется также состоянием $p_{3/2}$. При этом из-за спина

[1)] Заметим, что реализация максимальной величины сечения свидетельствует о примерном равенстве вероятностей вылета нейтрона и протона, что также представляется естественным.

[2)] Так как максимум обусловлен по меньшей мере двумя состояниями, то величина 22 MeV определена с ошибкой, не меньшей 1 MeV.

7 Зак. 198

трития это состояние протона приводит к двум возможным состояниям системы, именно к состояниям 2^- и 1^-, которые и были обнаружены выше[3)]. Поэтому наш результат позволяет сделать некоторые заключения о схеме сложения спинов, а именно, оказывается, что состояние с максимальным спином лежит ниже.

Остается еще открытым вопрос об изотопическом спине рассмотренных состояний. Для ответа на него надо обратиться к другим реакциям (см. п. 6).

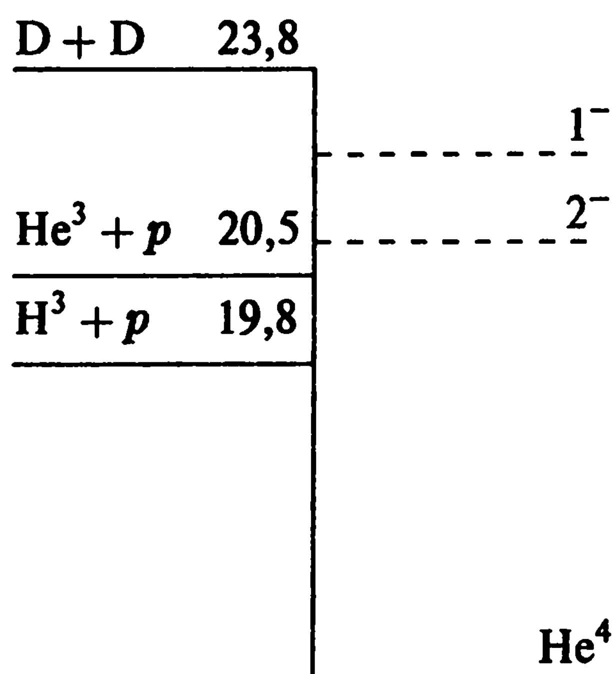
4. Реакции D + D. Прежде всего бросается в глаза отсутствие реакции радиационного захвата с образованием α-частицы. Это можно объяснить, если считать, что все уровни α-частицы, лежащие ниже 23,8 MeV (см. схему), имеют изотопический спин $T = 0$. Тогда, так как изотопический спин дейтрона также равен нулю, эти дипольные переходы ($T = 0 \rightarrow T = 0$) запрещены, поскольку $T_z = 0$.

5. Реакция $H^3(p\gamma)He^4$. Исходя из предложенной схемы, следует ожидать, что радиационный захват протона тритием не будет носить резонансного характера, так как с уровней с изотопическим спином, равным нулю, не может происходить дипольных переходов на основное состояние. Опыты подтверждают этот вывод.

6. Реакции $H^3(nn)H^3$ и $He^3(pp)He^3$. К сожалению, эти реакции не обследовались. Их исследование позволило бы проверить изотопический спин рассмотренных выше уровней. Действительно, соответствующие уровни должны быть обнаружены у систем $H^3 + n$ и $He^3 + p$ только в том случае, если их изотопический спин равен единице, если же он равен нулю, то такие уровни будут только у α-частицы.

7. Таким образом, вся совокупность рассмотренных данных хорошо укладывается в схему, в которой предположено существование у системы $H^3 + p$ двух широких уровней: один (2^-) при энергии примерно 22,0 MeV, а другой (1^-) на 1–2 MeV выше.

Ниже мы приводим энергетическую схему рассмотренных состояний.



В заключение заметим, что приведенная схема дает отрицательный ответ на вопрос о существовании стабильного H^4. Действительно, его состояние должно иметь аналогом одно из возбужденных состояний α-частицы, имеющих изотопический спин $T = 1$. Предыдущий анализ показывает, что таких состояний, стабильных относительно распада на $H + p$, у α-частицы нет.

Литература

1. *Willard H. B., Baira J. K., Kington J. D.* Phys. Rev., **90**, 865, 1953.

[3)] То, что у α-частицы нет никаких других возбужденных состояний при меньших энергиях, подтверждается результатами исследования реакций $He(pp')He^4$, D + D, $He^3(np)H^3$.

Тождественные преобразования сечений неполяризованных частиц

Р. М. Рындин, Я. А. Смородинский

Рассматривая сечение рассеяния π-мезонов нуклонами, Минами [1, 2] показал непосредственным вычислением, что это сечение, усредненное по поляризации нуклонов, остается инвариантным, если произвести перестановку внутри каждой из фаз, принадлежащих данному значению j. Если обозначить фазы через δ_l^+ и δ_l^-, соответственно, для $j = l + 1/2$ и для $j = l - 1/2$, то речь идет о преобразовании

$$\delta_{j-1/2}^+ \rightleftarrows \delta_{j+1/2}^- \quad \text{(при всех } j \text{ одновременно).} \tag{1}$$

Автор не обратил внимания на простой физический смысл этого преобразования, который позволяет понять его природу и указать на возможность обобщения для систем с произвольным спином.

Запишем амплитуду рассеяния π-мезона нуклоном (в системе центра инерции) в виде

$$f(\vartheta) = a(\vartheta) + b(\vartheta)\vec{\sigma}\mathbf{n}, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к плоскости рассеяния:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}_0}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}_0|}. \tag{3}$$

Если спин в начальном состоянии направлен вверх ($\vec{\sigma}\mathbf{n}\chi_{\text{пад}} = \chi_{\text{пад}}$), то амплитуда равна

$$f^+(\vartheta) = a(\vartheta) + b(\vartheta). \tag{4}$$

Если спин направлен вниз ($\vec{\sigma}\mathbf{n}\chi_{\text{пад}} = -\chi_{\text{пад}}$), то амплитуда равна

$$f^-(\vartheta) = a(\vartheta) - b(\vartheta). \tag{5}$$

Сечение, усредненное по спинам, равно

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,[ff^*] = \frac{1}{2}\left(|f^+|^2 + |f^-|^2\right) = |a|^2 + |b|^2. \tag{6}$$

Ниже мы покажем, что в результате преобразования (1) амплитуда (2) преобразуется по формуле

$$f(\vartheta) \to f'(\vartheta) = e^{i\vartheta\vec{\sigma}\mathbf{n}}(a - b\vec{\sigma}\mathbf{n}). \tag{7}$$

Амплитуды же $f^\pm(\vartheta)$ преобразуются по формулам

$$f^+(\vartheta) \to e^{i\vartheta} f^-(\vartheta), \tag{8}$$

$$f^-(\vartheta) \to e^{-i\vartheta} f^+(\vartheta). \tag{9}$$

Сечение, усредненное по поляризациям, остается, следовательно, инвариантным.

Таким образом, инвариантность сечения относительно преобразования (1) есть выражение инвариантности сечения неполяризованных частиц относительно направления спина (относительно вращения мишени вокруг оси пучка).

Докажем теперь преобразование (7), (8) и (9). Выражения для амплитуд (3), (4) и (5) даются известными формулами (см. например [3]):

$$a(\vartheta) = \frac{1}{k}\sum_l \left[(l+1)E_l^+ + lE_l^-\right]P_l(\cos\vartheta); \tag{10}$$

$$b(\vartheta) = \frac{1}{ik}\sum_l \left[E_l^+ - E_l^-\right]P_l^1(\cos\vartheta), \tag{11}$$

где, для краткости, обозначено

$$E_l^\pm = \sin\delta_l^\pm e^{i\delta_l^\pm}; \tag{12}$$

индекс $\pm$ отмечает, соответственно, состояния $j = l \pm 1/2$.

Перепишем теперь выражения для амплитуды, сгруппировав члены по j и собирая подобные:

$$f(\vartheta) = \frac{1}{k}\sum_j \left\{E^+_{j-1/2}\left[(j+1/2)P_{j-1/2} - iP^1_{j-1/2}\vec{\sigma}\mathbf{n}\right] + E^-_{j+1/2}\left[(j+1/2)P_{j+1/2} + iP^1_{j+1/2}\vec{\sigma}\mathbf{n}\right]\right\}. \tag{13}$$

Введем преобразования, использованные Минами:

$$P^1_{j-1/2} = \frac{j+1/2}{\sin\vartheta}\left[P_{j-1/2} - \cos\vartheta P_{j+1/2}\right], \tag{14}$$

$$P^1_{j+1/2} = \frac{j+1/2}{\sin\vartheta}\left[P_{j-1/2}\cos\vartheta - P_{j+1/2}\right]. \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в выражение (13), получим после простых преобразований:

$$f(\vartheta) = \frac{i\vec{\sigma}\mathbf{n}}{k\sin\vartheta}\sum_j (j+1/2)\left\{E^+_{j-1/2}\left[P_{j+1/2} - e^{i\vartheta\vec{\sigma}\mathbf{n}}P_{j-1/2}\right] + E^-_{j+1/2}\left[P_{j-1/2} - e^{i\vartheta\vec{\sigma}\mathbf{n}}P_{j+1/2}\right]\right\}. \tag{16}$$

Совершим теперь преобразование (1)

$$E^+_{j-1/2} \rightleftarrows E^-_{j+1/2} \tag{17}$$

и вынесем за знак суммы множитель $-e^{j\vartheta\vec{\sigma}\mathbf{n}}$:

$$f'(\vartheta) = -\frac{i\vec{\sigma}\mathbf{n}}{k\sin\vartheta}e^{i\vartheta\vec{\sigma}\mathbf{n}}\sum_j (j+1/2)\left\{E^+_{j-1/2}\left[P_{j+1/2} - e^{-i\vartheta\vec{\sigma}\mathbf{n}}P_{j-1/2}\right] + E^-_{j+1/2}\left[P_{j-1/2} - e^{-i\vartheta\vec{\sigma}\mathbf{n}}P_{j+1/2}\right]\right\}. \tag{18}$$

Сравнивая (18) и (16), убеждаемся в справедливости формул (7), а следовательно, и в справедливости (8) и (9).

Из приведенных рассуждений видно, что исследования неполяризованного пучка позволяют определить амплитуду с точностью до знака перед оператором $\vec{\sigma}\mathbf{n}$; определение знака требует опытов с поляризованными частицами: либо рассеяние на поляризованных нуклонах, либо измерение поляризации нуклонов при рассеянии.

Следует отметить еще одну инвариантность неполяризованного сечения, связанную с изменением знака оператора $\vec{\sigma}$. При одновременном изменении знака всех фаз амплитуда преобразуется по формуле

$$f(\vartheta) \to -(a^* - b^*\vec{\sigma}\mathbf{n}). \tag{19}$$

Сечение поляризованных частиц не остается при этом инвариантным.

Приведенное преобразование (7) может быть обобщено на рассеяние частиц с произвольным спином. Так например, при рассеянии нуклонов нуклонами (неполяризованных) должно существовать три преобразования, оставляющих неизменным сечение (существуют четыре формы амплитуды, приводящие к одинаковому сечению). Эти преобразования соответствуют вращению мишени и вращению пучка вокруг оси пучка.

Литература

1. *Minami S.* Progr. Theor. Phys., **11**, 213, 1954.
2. *Hayakawa S. et al.* Progr. Theor. Phys., **11**, 332, 1954.
3. *Lepore J. V.* Phys. Rev., **79**, 137, 1950.

Корреляция поляризаций при рассеянии нуклонов

В. В. Владимирский, Я. А. Смородинский

Хорошо известно, что опыты по рассеянию неполяризованных нуклонов не могут дать полной информации об их взаимодействии. Причина состоит в том, что в таких опытах невозможно разделить различные спиновые состояния и измеренное сечение представляет собой лишь некоторую комбинацию сечений в состояниях с разными спинами.

Опыты по рассеянию поляризованных нуклонов неполяризованной водородной мишенью добавляют к измеренному значению сечения неполяризованных частиц еще одну величину — поляризацию, представляющую собой удвоенное среднее значение спина нуклона (см., например, [1])

$$\mathbf{P} = \langle \vec{\sigma} \rangle.$$

При этом величины поляризации обоих нуклонов одинаковы.

Однако измерение поляризации еще не исчерпывает всей информации, которую можно получить о системе двух нуклонов. Это, например, видно из того, что все измеряемые величины (сечение и поляризация) остаются инвариантными относительно вращения неполяризованной мишени. Этому преобразованию отвечает определенное преобразование фаз, относительно которого сечение остается инвариантным. Поэтому фазы, полученные из этих измерений, будут неопределенными, по крайней мере с точностью до этого преобразования. Полную информацию можно получить только если дополнить эти измерения опытами с поляризованными пучками и мишенями. Величина, которую дают эти опыты, есть так называемый тензор поляризации, пропорциональный среднему значению произведения компонент двух спинов обоих нуклонов

$$P_{ik} = \left\langle \vec{\sigma}^{(1)} \vec{\sigma}^{(2)} \right\rangle.$$

Так как из двух векторов спина $\vec{\sigma}^{(1)}$ и $\vec{\sigma}^{(2)}$ нельзя больше составить никаких величин, то отсюда видно, что сечение, $\mathbf{P}$ и P_{ik} действительно исчерпывают всю информацию, которую можно получить о системе из двух нуклонов. Для двух одинаковых частиц со спином $1/2$ оператор тензора поляризации легко связать с оператором полного спина

$$\frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}_i^{(1)} \vec{\sigma}_k^{(2)} + \vec{\sigma}_k^{(1)} \vec{\sigma}_i^{(2)}\right) = S_i S_k + S_k S_i - \delta_{ik},$$

где $\mathbf{S} = 1/2\left(\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}\right)$.

Антисимметричная часть P_{ik} исчезает тождественно для двух нуклонов, если нет переходов между синглетными и триплетными состояниями (в частности, при зарядово-симметричных силах).

Мы покажем, что измерение компонент тензора поляризации можно произвести без поляризованной мишени (получение которой представляется пока очень трудным). Речь идет о явлении корреляции поляризаций.

Пусть рассеяние нуклонов происходит в мишени O (см. рис. 1). Поставим в точках 1 и 2 две мишени — анализаторы поляризаций (например, из углерода). Точки 1 и 2 выберем так, чтобы в них попадали, соответственно, обе частицы, участвовавшие в рассеянии в мишени O. Опыт должен состоять в одновременном измерении поляризаций обеих частиц.

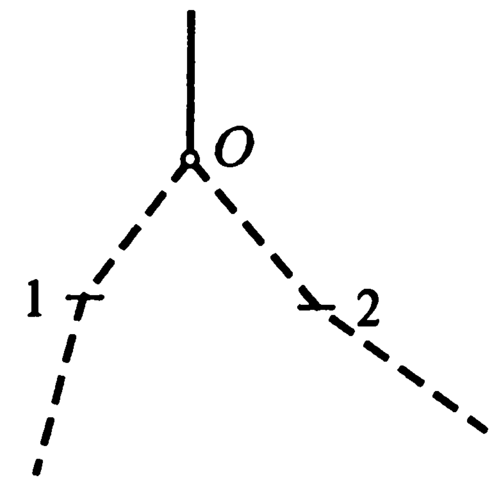


Рис. 1

Обозначим амплитуду рассеяния на мишени 1 через $f(\vartheta)$. Как известно, эту амплитуду можно записать в виде

$$f(\vartheta) = [a + b\vec{\sigma}\mathbf{n}]\chi_{\text{пад}}.$$

Здесь a и b — некоторые функции угла рассеяния; $\chi_{\text{пад}}$ — функция падающей частицы; $\mathbf{n}$ — нормаль к плоскости рассеяния. Величины $a(\vartheta)$ и $b(\vartheta)$ представляют собой характеристики углерода как анализатора.

Аналогично для мишени 2 мы можем написать

$$f(\vartheta') = [a' + b'\vec{\sigma}\mathbf{n}']\chi_{\text{пад}}.$$

Отметим, что a' и b' численно не равны a и b, так как энергии частиц различны. $\mathbf{n}'$ также может не совпадать с $\mathbf{n}$, так как плоскости обоих рассеяний в общем случае различны.

Рассмотрим сначала рассеяние на одной мишени-анализаторе. Сечение поляризации, т. е. разность между числом частиц, рассеиваемых на угол ϑ влево и вправо, для полностью поляризованного пучка $N_p(\vartheta)$ равно:

$$N_p(\vartheta) = |a + b|^2 - |a - b|^2 = 4\,\mathrm{Re}\,a^*b.$$

Измеряя величину N_p, мы определяем величину $\mathrm{Re}\,a^*b$. Это и есть обычный опыт по изучению поляризации пучка при рассеянии.

Определим теперь, в каком числе актов рассеяния частицы отклонились одновременно влево на некоторый угол (который мы для простоты положим одинаковым для обоих рассеяний и не будем явно выписывать), если все три рассеяния происходят в одной плоскости. Это число будет равно:

$$N_{++} = W_{++}|a+b|^2|a'+b'|^2+W_{--}|a-b|^2|a'-b'|^2+W_{+-}|a+b|^2|a'-b'|^2+W_{-+}|a-b|^2|a'+b'|^2,$$

где W_{++} — число случаев, когда спины в обоих пучках направлены вверх относительно плоскости рассеяния и т. д. Аналогично, число актов, в которых частицы рассеиваются вправо на обеих мишенях:

$$N_{--} = W_{++}|a-b|^2|a'-b'|^2+W_{--}|a+b|^2|a'+b'|^2+W_{+-}|a-b|^2|a'+b'|^2+W_{-+}|a+b|^2|a'-b'|^2.$$

Определим еще число актов, в которых частицы отклоняются влево на одной мишени и вправо на другой: N_{+-} и N_{-+}. Все числа N измеряются методом совпадений с очевидным изменением геометрии.

Составим сумму:

$$N_{++} + N_{--} - N_{+-} - N_{-+} = (W_{++} + W_{--} - W_{+-} - W_{-+})4\,\mathrm{Re}\,a^*b \cdot 4\,\mathrm{Re}\,a'^*b'.$$

Величины $4\,\mathrm{Re}\,a^*b$ и $4\,\mathrm{Re}\,a'^*b'$ определены по обычному рассеянию. Поэтому из опытов можно найти

$$W_{++} + W_{--} - W_{+-} - W_{-+} = \langle\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}\rangle = P_{yy},$$

ибо нетрудно видеть, что выражение в левой части представляет собой не что иное, как компоненту тензора поляризации (ось y направлена перпендикулярно плоскости рассеяния).

Так как в синглетном состоянии $P_{yy} = -1$, а в состоянии $^3P_0$ эта же величина равна $+1$, то измерение P_{yy} сразу же разделяет оба эти состояния в рассеянии протонов протонами, что другим способом сделать очень трудно.

Нетрудно видеть, что в нерелятивистском случае тензор P_{ik} имеет 4 независимые компоненты. Для этого заметим, что в системе центра инерции тензор можно выразить через компоненты двух векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, волновых векторов до и после рассеяния. При этом тензор P_{ik} должен быть симметричен:

$$P_{ik} = P_{ki}.$$

Тензор, обладающий такими свойствами, должен иметь вид:

$$P_{ik} = \alpha\delta_{ik} + \beta k_i k_k + \beta' k_i' k_k' + \gamma(k_i k_k' + k_k k_i').$$

Таким образом, 4 функции

$$\alpha(k^2, \cos\theta), \quad \beta(k^2, \cos\theta), \quad \beta'(k^2, \cos\theta), \quad \gamma(k^2, \cos\theta)$$

определяют тензор P_{ik}.

Если направить (в системе центра инерции) ось y по нормали к плоскости рассеяния и ось z по k, то для компонент P_{ik} получим (θ — угол рассеяния в системе центра инерции)

$$P_{xx} = \alpha + \beta' \cos^2\theta, \quad P_{xy} = 0, \quad P_{yy} = \alpha,$$

$$P_{xz} = \beta' \cos\vartheta \sin\vartheta \cdot \gamma, \quad P_{zz} = \alpha + \beta + \beta' \cos^2\theta + 2\gamma\cos\vartheta, \quad P_{yz} = 0.$$

Важной особенностью этого тензора является равенство нулю компонент P_{yz} и P_{yx}: не существует корреляции поляризаций, если плоскости рассеяния в анализаторах выбраны перпендикулярно друг другу.

Выбирая плоскости рассеяния анализаторов совпадающими с плоскостью первого рассеяния, мы определяем компоненту тензора P_{yy}. Выбирая эти плоскости перпендикулярно плоскости первого рассеяния, мы измерим линейную комбинацию компонент P_{xz}, P_{yy} и P_{zz}.

В общем случае разделить эти две компоненты опытами по корреляции поляризаций (с неполяризованными пучками) нельзя. Для этой цели надо иметь пучок частиц, поляризованных в направлении волнового вектора.

Следует иметь в виду, что все сказанное выше относилось к системе центра инерции. Реальные опыты определяют величины в лабораторной системе. Можно показать, что в случае нерелятивистских частиц компоненты вектора поляризации и тензора поляризации не меняются при таком переходе (преобразуются только аргументы — угол и энергия).

Если в схеме опыта рис. 1 производить измерение в плоскостях (анализатора), перпендикулярных плоскости рисунка, то такое измерение определит компоненту тензора $P_{\perp\perp}$, равную

$$P_{\perp\perp} = \left\{ \frac{1}{2}(P_{xx} - P_{zz}) \sin 2\vartheta + P_{xz} \cos 2\vartheta \right\},$$

где ϑ — угол рассеяния в лабораторной системе. При этом мы использовали тот факт, что угол между обеими частицами равен в лабораторной системе $\pi/2$ (нерелятивистский случай). Измерения в плоскости рассеяния по-прежнему определяют компоненту P_{yy}.

Следует иметь в виду, что все сказанное справедливо лишь при нерелятивистских частицах. Анализ опытов по рассеянию протонов протонами требует учета релятивистских эффектов.

Результаты этой работы были доложены в Академии наук СССР весной 1953 г. Недавно появилось [3] краткое сообщение о работе Стаппа, посвященной связи между тензором P_{ik} и фазами рассеяния. Аналогичные расчеты с учетом кулоновского взаимодействия были проведены Зиминым.

Литература

1. *Смородинский Я. А.* Проблемы современной физики, № 2, 1954.
2. *Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* ДАН, 103, № 1, 1955.
3. Bull. Am. Phys Soc., **29**, 8, K 6, 1954.

Корреляция плоскостей распада V^0-пар и спин ϑ^0-мезона

Л. Д. Пузиков, Я. А. Смородинский

1. Введение

При распаде пары нейтральных частиц, родившихся при столкновении π-мезона с нуклоном, обнаружена характерная корреляция плоскостей распада обеих частиц. В работе принстонской группы [1] приведены 10 случаев таких процессов, при которых зарегистрированы оба распада вместе с первичным π^--мезоном. 8 случаев наблюдались в космических лучах (один из них взят из работы Томпсона и др. [3]) и 2 на космотроне [2]. Все случаи распада характерны тем, что плоскости распадов обеих частиц образуют между собой большой угол; в 5 случаях (из 6, для которых этот угол измерен) этот угол лежит между 62 и 88°, в одном он равен 45°. В 5 случаях авторы смогли отождествить Λ^0- и ϑ^0-частицы. Во всех 5 случаях продукты распада гиперона Λ^0 составляют с плоскостью рождения (т. е. плоскостью, образуемой следом π^--мезона и точками V^0-распадов) угол меньше 30°.

Продукты распада ϑ^0 в 4 случаях образуют угол больше 60°, и лишь в одном (тот же снимок Томпсона) этот угол равен 11°. Учитывая, что все известные случаи распада Λ^0-частицы отвечают распаду в плоскости, близкой к плоскости рождения, можно, по-видимому, заключить, что ϑ^0-частица распадается в значительной доле случаев так, что образующиеся π-мезоны ($\vartheta^0 \to \pi^- + \pi^+$) вылетают в направлениях, близких к нормали к плоскости рождения. Это свойство распадов позволяет оценить спины Λ^0- и ϑ^0-частиц. К сожалению, точность оценок ограничивается неопределенностью экспериментальных данных и, в частности, отсутствием данных о распределении продуктов распада в системе координат, в которой распадающаяся частица покоится. Отсюда, естественно, следует, что очень важно получить более полные данные об этом процессе, которые позволят дать точные оценки спинов. Ниже мы последовательно рассмотрим вопрос об угловом распределении продуктов распада Λ^0 и ϑ^0 и о корреляции обоих распадов. При этом мы будем считать, что описанные характерные свойства распадов обеих частиц сохраняются и в системах координат, в которых они покоятся. Мы приведем здесь лишь результаты расчетов.

В последнее время высказывались сомнения в существовании корреляции. Л. Окунь и И. Померанчук указали, в частности, на несовместимость больших спинов Λ-частиц, а следовательно и существования корреляции с большим временем жизни Λ-ядер. Поэтому весь вопрос требует дальнейшего экспериментального исследования. Цель этой работы — подчеркнуть значение опытов по корреляции [1].

---

[1] *Примечание при корректуре.* Недавно Валькер [5] опубликовал еще два случая рождения Λ^0—ϑ^0 при π^-—р-столкновении. (Энергия π^- была 1 млрд эВ). В обоих случаях угол между плоскостями распада был велик. В одном случае Λ^0-частица распадалась в плоскости рождения, а в другом в этой плоскости распадалась ϑ^0-частица.

2. Распад Λ^0

Состояние пучка Λ^0 (со спином j) характеризуется набором $2j+1$ чисел $C(m)$ — вероятностей частице иметь проекцию спина на выделенную ось (нормаль к плоскости рассеяния). Вместо чисел $C(m)$ можно ввести $2j+1$ неприводимых тензоров $P_{\varkappa}^{q}$, которые связаны с ними соотношениями:

$$P_0^q = \sqrt{\frac{(2j-q)!(2j+q+1)!}{[(2j)!]^2(2q+1)}} \sum_{m'} (-1)^{j-m'} (jjm' - m' | q\, 0) C(m') \quad \left(\sum_m C(m) = 1 \right),$$

где $(jjm-m|q0)$ — коэффициенты Клебша—Гордона. Тензор P_m^1 есть вектор поляризации, P_m^2 — тензор поляризации 2-го ранга и т. д. Нам, однако, удобнее пользоваться просто числами $C(m)$. Отметим только, что когда все $C(m)$ равны друг другу, все тензоры поляризации обращаются в нуль, кроме скаляра $P_0^0 = 1$. Если состояние пучка симметрично относительно плоскости рассеяния, то равны нулю все нечетные тензоры (в частности, поляризация).

Наличие асимметрии распадов свидетельствует о том, что не все вероятности $C(m)$ равны между собой. Рассмотрим, как будут распределены продукты распада для некоторых значений m.

Гиперон Λ^0 со спином j может распасться на протон и π^- с орбитальным моментом $l = j \pm 1/2$ в зависимости от того, имеет ли Λ^0 ту же четность, что и π^--мезон (т. е. нечетна) или противоположную. Четность Λ^0 неизвестна, однако угловое распределение зависит только от спина Λ^0 и не зависит от четности.

При $m = \pm j$ угловое распределение (ненормированное) продуктов распада на $p+\pi^-$ (ϑ — угол между направлением разлета и нормалью к плоскости рождения) имеет вид:

$$w(\vartheta) = (\sin\vartheta)^{2j-1}.$$

Это распределение характеризуется большой вероятностью больших углов ϑ, тем большей, чем больше спин j. При $j = 1/2$ распределение, очевидно, не зависит от ϑ. При $m = \pm(j-1)$ распределение имеет вид

$$w(\vartheta) = (\sin\vartheta)^{2j-3}\left(1 + 4j(j-1)\cos^2\vartheta\right).$$

При $j = 3/2$ это распределение имеет максимум при $\vartheta = 0°$. Приближенно оно записывается так (при $j > 3/2$):

$$w(\vartheta) \simeq (\sin\vartheta)^{2j-5}\sin 2\vartheta.$$

Это распределение совершенно иначе зависит от ϑ, чем в предыдущем случае (при $m = \pm j$), и при небольших значениях j ($< 9/2$) вряд ли сможет быть согласовано с экспериментом.

Таким образом, мы видим, что распределение, отвечающее большой вероятности больших углов, можно согласовать лишь с большими значениями спина Λ^0 (что неоднократно отмечалось в литературе). При этом спин Λ^0, равный $3/2$ или $5/2$, требует, чтобы практически все $C(m)$ были равны нулю, кроме значений $m = \pm j$. (Полная поляризация — все $C(m) = 0$, кроме $C(j)$ или $C(-j)$, или же все $C(m) = 0$, кроме $C(j)$ и $C(-j)$, — случай, отвечающий максимальной величине всех четных тензоров поляризации P_m^q.) При спине $7/2$ и $9/2$ могут быть отличны от нуля и $C[\pm(j+1)]$.

Интересно отметить, что оценка спина Λ^0 по времени жизни дает значение, равное $11/2$ [4].

3. Распад ϑ^0

Картина распада ϑ^0 противоположна картине распада Λ^0. В этом случае практически все частицы находятся в состоянии с $m = 0$. Коэффициенты же $C(m)$ при $m \neq 0$ очень малы. При спине 1 распределение продуктов распада $w_{1,0}(\vartheta) \sim \cos^2\vartheta$ (при $m = \pm 1$, $w_{1,\pm 1} \sim \sin^2\vartheta$ в противоречии с опытом).

При спине 2 распределения описываются шаровыми функциями второго порядка:

$$w_{2,0} \sim (\cos^2\vartheta - 1/3)^2,$$

$$w_{2,\pm 1} \sim \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta.$$

Мы видим, что в этом случае только распределение с $m = 0$ можно согласовать с опытом. Вообще, при спине j распределение при $m = 0$

$$w_{j,0} \sim |P_j(\cos\vartheta)|^2$$

с увеличением j не дает, в отличие от случая распада Λ^0, увеличения анизотропии.

4. Корреляция плоскостей распада

Важным фактом является корреляция плоскостей распада. Она определяет схему сложения спинов обеих частиц и позволяет сделать дополнительные заключения о спине ϑ^0. Предположим для простоты, что спин ϑ^0 равен 1 (ниже мы рассмотрим и другие возможности) и обозначим спин Λ^0 через j. Тогда суммарный спин системы (без орбитального момента) J может иметь три значения: $j-1$, j, $j+1$.

Спиновые волновые функции Λ^0 и ϑ^0 мы обозначим просто через Λ_m и ϑ_m. Как показано выше, спиновая волновая функция Ψ_J^M системы из Λ^0 и ϑ^0 должна быть, во всяком случае, такова, чтобы состояние $\Lambda_{\pm j}\vartheta^0$ играло в ней основную роль. Нетрудно видеть, что состояние $\Lambda_{\pm j}\vartheta^0$ может осуществляться лишь при $M = \pm j$ и при J, равном $j+1$ или j.

$$\Psi_{j+1}^j = \sqrt{\frac{j}{j+1}}\,\Lambda_{j-1}\vartheta_1 + \sqrt{\frac{1}{j+1}}\,\Lambda_j\vartheta_0,$$

$$\Psi_j^j = -\sqrt{\frac{1}{j+1}}\,\Lambda_{j-1}\vartheta_1 + \sqrt{\frac{j}{j+1}}\,\Lambda_j\vartheta_0.$$

(Случай с $M = -j$ аналогичен.)

Отношения квадратов коэффициентов определяют относительные вероятности состояний отдельных частиц. Нас, очевидно, интересует вес состояния $\Lambda_j\vartheta_0$. Относительная вероятность этого состояния равна в приведенных случаях, соответственно, $1/j$ и j. Только во втором случае и при больших значениях спина вероятность состояния $\Lambda_j\vartheta_0$ может быть большой.

Это обстоятельство вместе с тем соображением, что чем меньше спин Λ^0, тем жестче должен быть отбор по его проекциям, по-видимому, исключает спин Λ^0, равный $5/2$. Если спин ϑ^0 равен 2, то полный момент может принимать значения j, $j+1$, $j+2$.

Соответствующие вероятности равны $j/3$, $j/(j-2)^2$, $3/(4j)$. Наибольшая вероятность и здесь достигается при $J = j$, но нижние границы, устанавливаемые для j, получаются еще более высокими.

Мы рассматривали частный случай $M = j$; легко видеть, что при $M < j$ наблюдаемую корреляцию можно объяснить лишь увеличив возможный спин Λ^0.

Необходимо еще учесть, что Λ^0 и ϑ^0 рождаются с некоторым угловым моментом. Очевидно, что это обстоятельство ослабляет корреляцию. Неполнота экспериментальных данных не позволяет проанализировать этот вопрос подробнее.

5. Выводы

Мы можем заключить, что наличие корреляции требует:

1. Спин Λ^0 велик $\geqslant 7/2$.
2. Спин ϑ^0 отличен от нуля Λ^0.
3. Спин ϑ^0 значительно меньше спина Λ^0.

Авторы благодарны И. Гуревичу, Л. Окуню и И. Померанчуку за интересное обсуждение задачи.

Литература

1. *Ballam J., Hodson A. L. et al.* Phys. Rev., **97**, 245, 1955.
2. *Fowler W. B., Shutt R. P. et al.* Phys. Rev., **93**, 861, 1954.
3. *Thompson R. J., Burwell J. R. et al.* Phys. Rev., **95**, 1576, 1954.
4. *Гуревич И. И.* ДАН, **105**, № 1, 1955.
5. *Walker W. D.* Phys. Rev., **98**, 1407, 1955.

Construction of the Scattering Matrix of a Two-nucleon System

L. PUZIKOV, R. RYNDIN, J. SMORODINSKY

1. Introduction

At the present a large amount of experimental data on nucleon-nucleon scattering in a very broad energy region has been published [1)].

A number of papers have appeared which are devoted to phase analysis of the experimental results. However, it has invariably been found in these investigations that the phase-shift analysis is not unique and usually the authors give several sets of phase-shifts consistent with the experimental results. Phase-shift analysis in these works starts by restricting the number of states involved in scattering. The next step is to set up algebraic equations for a finite number of phases. However, for particles possessing a spin it remains unclear which experimental data should be used to write the equations. A good example is proton-proton scattering at not too high energies.

In this case two states — $^1S_0$ and $^3P_0$ — are predominant in the scattering.

These states cannot be separated on the basis of cross section measurements or polarization measurements. On the other hand, they can easily be differentiated by measuring the polarization correlation. The necessity of more intricate experiments is apparent in this case. In other cases, when scattering is not isotropic and it may formally be possible to determine a finite number of phases, the question still remains whether the same phases are sufficient to describe more complex scattering phenomena, such as plural scattering. In this connection it seemed important to attempt an analysis of all possible types of experiments and to find out which of them are independent in the sense that complete reconstruction of the scattering matrix would be possible if the results of these experiments were known. In order to illustrate the line of reasoning applied here we shall start with the two simplest cases, scattering of zero spin particles in a central force field and scattering of spin-I particles on zero spin nuclei. After this, scattering of nucleons by nucleons will be considered.

The case of arbitrary spin, which at present is only of theoretical interest, and photon scattering will be considered in further communications. We shall moreover restrict our attention to a scattering matrix for a given energy. Further investigation is required to clarify the problem of the energy dependence of the matrix elements.

2. Scattering of Spin Zero Particles

Measurement of the differential cross section of a zero spin particle yields a function $\sigma(\vartheta)$, which is the square of the modulus of the scattering amplitude

$$\sigma(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2. \tag{2.1}$$

Evidently, if this quantity is measured at only one value of energy and angle ϑ the phase of the complex function $f(\vartheta)$ will remain completely indeterminate.

[1)] A good review of recent data has been written by Wolfenstein [1]. The authors take the opportunity to thank Prof. Wolfenstein for sending his manuscript prior to publication.

If, however, scattering is measured at all angles and is known to be elastic, the phase of $f(\vartheta)$ can also be determined. Indeed, the unitarity relation for the amplitude $f(\vartheta)$ can be written as follows [2]:

$$4\pi \operatorname{Im} f(\vartheta) = k \int d\omega f^*(\vartheta'') f(\vartheta'). \tag{2.2}$$

Here ϑ' is the angle between $\mathbf{k}$ (initial wave vector) and the variable vector $\mathbf{k}''$ over the direction of which the integration ($d\omega$) is carried out; ϑ'' is the angle between the final wave vector $\mathbf{k}'$ and vector $\mathbf{k}''$. Denoting

$$f(\vartheta) = \sqrt{\sigma(\vartheta)} \exp [i\alpha(\vartheta)], \tag{2.3}$$

we obtain from (2.2), if $\sigma(\vartheta)$ is known, an integral equation for the function $\alpha(\vartheta)$:

$$4\pi \sin \alpha(\vartheta) = k \int \left[\frac{\sigma(\vartheta')\sigma(\vartheta'')}{\sigma(\vartheta)}\right]^{1/2} \cos\left[\alpha(\vartheta') - \alpha(\vartheta'')\right] d\omega. \tag{2.4}$$

The solution of the set of equations (2.1) and (2.2) or equation (2.4) is an operation which is equivalent to phase-shift analysis. It is evident that representation of $f(\vartheta)$ in the form of a finite sum of Legendre polynomials is only one possible method of solving the problem which is useful when it is known that only a few phase-shifts are involved in the solution. In the general case straightforward solution of (2.4) may turn out to be a more convenient procedure.

It can be seen from (2.4) that the equation is invariant with respect to the substitution

$$f(\vartheta) \to -f^*(\vartheta) \tag{2.5}$$

or, what is the same,

$$\alpha(\vartheta) \to \pi - \alpha(\vartheta).$$

This transformation corresponds to change of the signs of all scattering phase shifts. Its existence signifies that there are two ways of reconstructing the scattering amplitude on the basis of its modulus. As is well known, this ambiguity can be removed by considering interference with Coulomb scattering (for charged particles) or by studying the energy dependence of scattering at low energies. Thus, measurement of the scattering cross section at a given energy is complete in the sense that it permits one to completely reconstruct the scattering amplitude (perhaps with the aforementioned two possibilities remaining).

3. Scattering of Particles of Spin 1/2

The scattering amplitude of a particle of spin 1/2 can be written, as usual, in the form

$$M = a(\vartheta) + b(\vartheta)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \tag{3.1}$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the Pauli matrix and $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{k}'/|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|$ is the normal to the scattering plane.

Experimentally, the cross section and polarization (double scattering) are measured, thus yielding two functions

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) &= |a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{2}\left(|f_+|^2 + |f_-|^2\right), \\ \sigma(\vartheta)P(\vartheta) &= 2 \operatorname{Re} ab^* = \frac{1}{2}\left(|f_+|^2 - |f_-|^2\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Evidently, (3.2) defines two moduli[2)]

$$|f_+|^2 = |a+b|^2,$$
$$|f_-|^2 = |a-b|^2. \tag{3.3}$$

If the measurements are carried out at all possible angles and scattering is elastic, the phase shifts of the complex functions f_+ and f_- will again be defined by the unitarity conditions

$$4\pi \operatorname{Im} a(\vartheta) = k\int d\omega\left[a^*(\vartheta'')a(\vartheta') + b^*(\vartheta'')b(\vartheta')\frac{\cos\vartheta - \cos\vartheta'\cos\vartheta''}{\sin\vartheta'\sin\vartheta''}\right],$$

$$4\pi \operatorname{Im} b(\vartheta) = k\int d\omega\left[2\operatorname{Im} a^*(\vartheta'')b(\vartheta')\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta' - \cos\vartheta''}{\sin\vartheta\sin\vartheta'} + \right. \tag{3.4}$$

$$\left. + b^*(\vartheta'')b(\vartheta')\frac{1+2\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos\vartheta'' - \cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta' - \cos^2\vartheta''}{\sin\vartheta\sin\vartheta'\sin\vartheta''}\right].$$

Equations (3.2) and (3.4) are also amenable to an invariant transformation.

In order to find the latter, we note that the transformation (inversion of sign of the scattering phase shifts)

$$a(\vartheta) \to -a^*(\vartheta), \quad b(\vartheta) \to b^*(\vartheta) \tag{3.5}$$

does not alter the cross sections or unitarity conditions, but reverses the sign of the polarization.

The same statement also applies to the Minami transformations [3, 4]

$$a(\vartheta) \to a(\vartheta)\cos\vartheta + ib(\vartheta)\sin\vartheta,$$
$$b(\vartheta) \to -b(\vartheta)\cos\vartheta - ia(\vartheta)\sin\vartheta. \tag{3.6}$$

Thus, the product of the two transformations

$$a(\vartheta) \to -a^*(\vartheta)\cos\vartheta + ib^*(\vartheta)\sin\vartheta,$$
$$b(\vartheta) \to -b^*(\vartheta)\cos\vartheta + ia^*(\vartheta)\sin\vartheta \tag{3.7}$$

leaves all the quantities invariant[3)].

Therefore, in the case of particles of spin $1/2$ a complete experiment consists in measurement of the cross section and polarization. Ambiguity in phase shift determinations due to the presence of transformation (3.7) can be removed by studying the energy dependence of the cross section at low energies. It should be mentioned that (as previously noted by Wolfenstein [5]) the ambiguity can also be removed by studying triple scattering (in which the scattering planes are mutually perpendicular).

4. Scattering of Nucleons by Nucleons

Nucleon-nucleon scattering is described by the matrix

$$M = \alpha(\vartheta) + \beta(\vartheta)(\sigma_1\cdot\mathbf{n})(\sigma_2\cdot\mathbf{n}) + \gamma(\vartheta)(\sigma_1+\sigma_2)\mathbf{n} + \delta(\vartheta)(\sigma_1\cdot\mathbf{m})(\sigma_2\cdot\mathbf{m}) + \varepsilon(\vartheta)(\sigma_1\cdot\mathbf{l})(\sigma_2\cdot\mathbf{l}). \tag{4.1}$$

[2)] It should be noted that (3.3) are the scattering cross sections for polarized particles with spins directed «up» or «down» (with respect to $\mathbf{n}$).

[3)] In terms of the phase shifts $\delta(j, l)$ this transformation corresponds to

$$\delta(j, j-1/2) \rightleftarrows -\delta(j, j+1/2).$$

Here $\boldsymbol{\sigma}_1$ and $\boldsymbol{\sigma}_1$ are the Pauli matrices of the two particles and **m**, **1**, **n** are Cartesian unit vectors which are parallel to $\mathbf{k}-\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}+\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}\times\mathbf{k}'$ respectively (in the c.m.s.) [6]. That this system is a convenient one can be seen from the fact that its unit vectors will be parallel to the laboratory system wave vectors of the two particles after scattering and to the normal to the scattering plane.

Expression (4.1) differs from the general scattering matrix for two spin 1/2 particles by the absence of a term which is proportional to $\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2$. This follows from identity of the particles of the p—p system and from charge invariance of the n—p system.

For identical particles the coefficients of matrix (4.1) possess the property of symmetry with respect to the substitution $\vartheta \to \pi-\vartheta$. This can be conveniently formulated by introducing new functions which will also be useful in the future [7]:

$$a=\alpha+\beta,\quad b=\alpha-\beta,\quad c=\delta+\varepsilon,$$
$$d=\delta-\varepsilon,\quad e=2\gamma. \tag{4.2}$$

It can then be shown that for identical particles

$$a(\pi-\vartheta)=-a(\vartheta),\quad b(\pi-\vartheta)=-c(\vartheta),\quad c(\pi-\vartheta)=-b(\vartheta),$$
$$d(\pi-\vartheta)=d(\vartheta),\quad e(\pi-\vartheta)=e(\vartheta). \tag{4.3}$$

Thus for identical particles the measurements may be carried out only for angles $0\leftrightarrow\pi/2$. In the case of scattering of neutrons by protons the measurement range should be doubled to $0\leftrightarrow\pi$, which exactly corresponds to the doubling of the number of states in this system.

Before using the unitarity condition we shall briefly describe the experiments required for a two-nucleon system.

Suppose we are dealing with an unpolarized nucleon beam; the first scattering on hydrogen will define a differential cross section which is connected with the scattering matrix elements by the formula[4)]

$$\sigma(\vartheta)=\frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2+|e|^2\right). \tag{4.4}$$

The first scattering produces a beam polarized along **n**. The magnitude of this polarization is measured on the second scattering:

$$\sigma(\vartheta)\,P(\vartheta)=\operatorname{Re}ae^*. \tag{4.5}$$

Evidently any target with known properties (polarizer) can be used for measuring or for producing the polarization. (In all experiments only one target need be a hydrogen one.)

The polarization of recoil particles is also equal to $P(\vartheta)$ (absence of $\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2$ in M) and hence need not be measured.

The third target may be added in two ways.

Measurement of the component P_{nn} of the correlation tensor yields

$$\sigma(\vartheta)\,P_{nn}(\vartheta)=\frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2+|e|^2\right). \tag{4.6}$$

In these measurements all three scattering events occur in a single plane. Moreover, the polarization after the second scattering on the hydrogen target can be measured. By using a third target to measure it (any analyser can be used for this) we obtain two quantities

[4)] The formulae of this section are familiar ones.

corresponding to the two particles participating in the second scattering[5]. If all three arrangements of scattering events occur in a single plane, the measured quantities will be

$$\sigma(\vartheta)D_{nn}(\vartheta) = \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 + |e|^2\right) \quad \text{(for the scattered particle)}, \qquad (4.7)$$

$$\sigma(\vartheta)K_{nn}(\vartheta) = \frac{1}{2}\left(|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2 + |e|^2\right) \quad \text{(for the recoil particle)}. \qquad (4.8)$$

The difference between these two quantities is obvious in the case of neutron scattering: for identical particles the first quantity corresponds to measurement in the angular interval $o \leftrightarrow \pi/2$ and the second in the interval $\pi/2 \leftrightarrow \pi$.

The aforementioned experiments yield five equations from which the moduli of the five functions $a+e$, $a-e$, b, c, d can easily be determined and we have to apply considerations similar to the case of spin ½ particles. In order to determine the phases of these complex functions measured at the various angles one appeals to the unitarity relation. It can be shown (see ref. [8]) that exactly five such relations exist. These relations (see appendix 2) are invariant with respect to the substitution $\alpha(\vartheta) \to -\alpha^*(\vartheta)$, $\beta(\vartheta) \to -\beta^*(\vartheta)$, $\gamma(\vartheta) \to -\gamma^*(\vartheta)$, $\delta(\vartheta) \to -\delta^*(\vartheta)$, $\varepsilon(\vartheta) \to -\varepsilon^*(\vartheta)$, which is equivalent to simultaneous reversal of the signs of all phase shifts (as in the preceding case this substitution changes the polarization sign); in the case of nucleon-nucleon scattering no substitution corresponding to the Minami transformation exists [9]. This signifies that the set of experiments indicated above is a complete set.

An important feature of the preceding considerations is the conclusion that in order to determine the scattering matrix measurement of fourfold scattering or application of a magnetic field are not necessary and it should suffice to perform experiments with three targets and with parallel scattering planes.

Up to the present no such complete set of experiments has been performed for any single energy value and this is the reason of the ambiguity encountered in analyzing these experiments.

In connection with the problem of determining the scattering matrix, the question arises as to its connection with the potential. A salient feature is that the number of independent functions in the scattering amplitude is equal to the number of scalar functions in the interaction hamiltonian. Indeed, it is not difficult to show that the general form of interaction of (say) two protons is

$$V = V_1(r) + V_2(r)(\sigma_1 \cdot \sigma_2) + V_3(r)(\sigma_1 \cdot \mathbf{r})(\sigma_2 \cdot \mathbf{r}) + V_4(r)(\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{L} + V_5(r)(\sigma_1 \cdot \mathbf{L})(\sigma_2 \cdot \mathbf{L}),$$

where $\mathbf{L}$ is the orbital angular momentum. It would be very interesting to ascertain what restrictions are imposed on the scattering matrix if one or several $V_i(r)$ are zero. In other words, one is interested to ascertain whether any qualitative conclusions regarding the form of V can be made on basis of the scattering matrix properties.

In conclusion the authors wish to thank Prof. E. Segre and Prof. O. Chamberlain for numerous interesting and enlightning discussion of nucleon scattering experiments, carried out in the summer of 1950.

Appendix 1

LIST OF FORMULAE FOR POSSIBLE NUCLEON-NUCLEON SCATTERING EXPERIMENTS

As the set of experiments (five in all) mentioned above for determination of the nucleon-nucleon scattering matrix is not the only possible one we shall present here a short

[5] Since the incident particle in this scattering was polarized, the polarization of the two particles after scattering will now be different.

survey of all conceivable experiments. The latter may differ from each other first of all with respect to the state of polarization of the primary beam and target and, secondly, in the nature of the measured quantities (cross section, polarization of scattered particle, polarization of recoil particle, correlation of polarization). Schematically, they may be represented by the following table:

Initial spin state / Result of experiment	A. Unpolarized beam, unpolarized target	B. Polarized beam, unpolarized target	C. Unpolarized beam, polarized target	D. Polarized beam, polarized target
1. Cross section	σ *	$\sigma_i^{(1)}$	$\sigma_k^{(2)}$	σ_{ik}
2. Polarization of scattered particle	$P_p^{(1)}$ *	$D_{ip}^{(1)}$ *	K'_{kp}	$T_{ikp}^{(1)}$
3. Polarization of recoil particle	$P_q^{(2)}$	K_{iq} *	$D_{kq}^{(2)}$	$T_{ikq}^{(2)}$
4. Correlation of polarizations	P_{pq} *	P_{ipq} *	$P_{kpq}^{(2)}$	T_{ikpq}

Here each column corresponds to a certain initial spin state of the two-nucleon system and the scattering process characteristics to be measured are given in the horizontal rows. Subscript i indicates the direction of initial polarization of the projectile, k refers to the initial target polarization, p refers to the measured component of the scattered particle polarization and q the measured component of the recoil particle polarization. In the future we shall denote each experiment by a letter (column) and number (row) which will indicate the initial spin state of the system and the measured characteristic of the scattering process. Experiment B2, for example, consists in the measurement of a set of quantities $D_{ip}^{(1)}$ which determine the influence of the i-polarization component of the incident particles on the p-polarization component of the scattered particles, etc.

Not all experiments in the table are different. Due to the symmetry property some of them are actually identical. Thus, in the absence of singlet-triplet transitions (absence of term $\sigma_1 - \sigma_2$) experiments A2 and A3, B1 and C1, B4 and C4, D2 and D3, B2 and C3 are essentially the same. In the case of identical particles (see symmetry properties (4.3)), experiments B 2 and B3 yield the same quantities (B2) but for complementary angles (ϑ and $\pi - \vartheta$). A similar relation exists between experiments C3 and C2.

In virtue of the invariance of matrix M with respect to reversal of time, the sets of experiments in those table cells which are symmetrical with respect to the main diagonal are equivalent (equivalency of experiments A2 and B1, A4 and D1, etc.). Thus the only experiments which are different are those denoted by the asterisk in the table. It can immediately be seen that a polarized target is required only in the most complicated experiment. However, for actual determination of the scattering matrix these experiments are also superfluous.

Consider now the different characteristics determined in the various experiments.

A1. Measurement of cross section

$$\sigma = \frac{1}{4}\operatorname{tr}(MM^{+}) = \frac{1}{2}\{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + |e|^2\}.$$

A2. Measurement of polarization

$$\sigma P = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(\sigma_1 \cdot \mathbf{n} M M^+) = \mathrm{Re}\, ae^*.$$

B2. Determination of the tensor

$$\sigma D_{ip} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(M\sigma_{1i}M^+\sigma_{1p}) = \frac{1}{2}\{|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 + |e|^2\}n_i n_p + \\ + \mathrm{Re}\,(ab^* + cd^*)m_i m_p + \mathrm{Re}\,(ab^* - cd^*)l_i l_p - \mathrm{Im}\, b^* e(m_i l_p - l_i m_p).$$

From experiments on triple scattering with parallel and perpendicular planes, respectively, the following components are determined:

$$\sigma D_{nn} = \frac{1}{2}\{|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 + |e|^2\},$$

$$\sigma D_{xm} = -\cos\frac{1}{2}\vartheta\,\mathrm{Re}\,(a^*b + c^*d) + \mathrm{Im}\, b^* e \sin\frac{1}{2}\vartheta.$$

For determination of the components

$$\sigma D_{zm} = \sin\frac{1}{2}\vartheta\,\mathrm{Re}\,(a^*b + c^*d) + \cos\frac{1}{2}\vartheta\,\mathrm{Im}\, b^* e,$$

$$\sigma D_{xl} = \sin\frac{1}{2}\vartheta\,\mathrm{Re}\,(a^*b - c^*d) + \cos\frac{1}{2}\vartheta\,\mathrm{Im}\, b^* e,$$

either fourfold scattering must be measured or else triple scattering with a magnetic field between the targets. Unit vectors z and x are directed along $\mathbf{k}$ and $\mathbf{n} \times \mathbf{k}$ respectively.

B3. Measurement of tensor

$$\sigma K_{iq} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(M\sigma_{1i}M^+\sigma_{2q}) = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2 + |e|^2)n_i n_q + \\ + \mathrm{Re}\,(a^*c + b^*d)m_i m_q + \mathrm{Re}\,(a^*c - b^*d)l_i l_q - \mathrm{Im}\, c^* e(m_i l_q - l_i m_q).$$

Components K_{nn} and K_{x-l} can be determined from triple scattering and K_{xm} and K_{z-l} from fourfold scattering.

In the case of identical particles this is equivalent to measurement of the corresponding D_{ip} components at complementary angles ($\vartheta \to \pi - \vartheta$), where $D_{nn}(\pi - \vartheta) = K_{nn}(\vartheta)$, $D_{xm}(\pi - \vartheta) = K_{x-l}(\vartheta)$, $D_{zm}(\pi - \vartheta) = -K_{z-l}(\vartheta)$, $D_{xl}(\pi - \vartheta) = +K_{z-m}(\vartheta)$.

A4. The tensor of polarization correlation is measured:

$$\sigma P_{pq} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(\sigma_{1i}\sigma_{2q}MM^+) = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2 + |e|^2)n_p n_q + \\ + \mathrm{Re}\,(ad^* + bc^*)m_p m_q + \mathrm{Re}\,(b^*c - a^*d)l_p l_q + \mathrm{Im}\, de^*(l_p m_q + l_q m_p).$$

The component

$$\sigma P_{nn} = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2 + |e|^2)$$

can be determined in an experiment in which the planes of the analyzing scatterings coincide with the plane of predominant scattering.

In order to determine the components

$$\sigma P_{ml} = \mathrm{Im}\, de^*$$

an experiment is required in which the planes of the analyzing scatterings are perpendicular to those of predominant scattering.

Experiments in which the planes of the analyzing scatterings are perpendicular to the plane of predominant scattering and in which a magnetic field perpendicular to the first scattering plane is applied in front of one of the analyzers, yield the components

$$\sigma P_{mm} = \mathrm{Re}\,(a^*d + b^*c),$$
$$\sigma P_{ll} = -\,\mathrm{Re}\,(a^*d - b^*c).$$

B4. Measurement of tensor

$$\sigma P_{ipq} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(M\sigma_{1i}M^+\sigma_{2q}) =$$
$$= n_i n_p n_q\,\mathrm{Re}\,ae^* + [m_i m_p n_q + l_i l_p n_q]\,\mathrm{Re}\,be^* + m_i l_p n_q\,\mathrm{Im}\,(a^*b - c^*d) -$$
$$- l_i m_p n_q\,\mathrm{Im}\,(a^*b + c^*d) - l_i n_p m_q\,\mathrm{Im}\,(a^*c + b^*d) + n_i l_p m_q\,\mathrm{Im}\,(a^*d + b^*c) +$$
$$+ n_i m_p l_q\,\mathrm{Im}\,(a^*d - b^*d) + m_i n_p l_q\,\mathrm{Im}\,(a^*c - b^*d) + [m_i n_p m_q + l_i n_p l_q]\,\mathrm{Re}\,e^*c +$$
$$+ [n_i m_p m_q - n_i l_p l_q]\,\mathrm{Re}\,e^*d.$$

D4. In order to perform this experiment a polarized target is required. The components of the following tensor are measured:

$$\sigma T_{ikpq} = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(M\sigma_{1i}\sigma_{2k}M^+\sigma_{1i}\sigma_{2q}) = n_i n_k n_p n_q \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2+|e|^2\right) +$$
$$+[m_i m_k m_p m_q + l_i l_k l_p l_q]\frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2-|e|^2\right) +$$
$$+[n_i m_k n_p m_q + m_i n_k m_p n_q]\,\mathrm{Re}(ab^*+cd^*) +$$
$$+[m_i l_k m_p l_q + l_i m_k l_p m_q]\frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2-|e|^2\right) +$$
$$+[m_i m_k l_p l_q + l_i l_k m_p m_q]\frac{1}{2}\left(-|a|^2+|b|^2+|c|^2-|d|^2+|e|^2\right) +$$
$$+[l_i m_k m_p l_q + m_i l_k l_p m_q]\frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2+|c|^2-|d|^2-|e|^2\right) +$$
$$+[l_i n_k n_p l_q + n_i l_k l_p n_q]\,\mathrm{Re}(a^*c+b^*d) + [n_i m_k m_p n_q + m_i n_k n_p m_q]\,\mathrm{Re}(a^*c-b^*d) -$$
$$-[l_i l_k n_p n_q + n_i n_k l_p l_q]\,\mathrm{Re}(b^*c+a^*d) - [n_i n_k m_p m_q + m_i m_k n_p n_q]\,\mathrm{Re}(b^*c-a^*d) +$$
$$+[m_i n_k n_p l_q - n_i l_k m_p n_q - l_i n_k n_p m_q + n_i m_k l_p n_q]\,\mathrm{Im}(e^*c) +$$
$$+[n_i n_k m_p l_q + n_i n_k l_p m_q - m_i l_k n_p n_q - l_i m_k n_p n_q]\,\mathrm{Im}(e^*d) +$$
$$+[l_i m_k m_p m_q + m_i l_k m_p m_q + l_i l_k m_p m_q + l_i l_k l_p m_q -$$
$$- m_i l_k l_p l_q - l_i m_k l_p l_q - m_i m_k m_p l_q + m_i m_k l_p m_q]\,\mathrm{Im}(a^*e) +$$
$$+[l_i n_k m_p n_q + n_i l_k n_p m_q - n_i m_k n_p l_q - m_i n_k l_p n_q]\,\mathrm{Im}(b^*e).$$

Appendix 2

UNITARITY RELATION

We present below the unitarity relation for nucleon-nucleon scattering:

$$4\pi\,\mathrm{Im}\,\alpha(\vartheta) = k\int \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,\left[(M^+(\mathbf{k}',\mathbf{k}'')M(\mathbf{k},\mathbf{k}'')\right]\,d\omega_{\mathbf{k}''},$$
$$4\pi\,\mathrm{Im}\,\beta(\vartheta) = k\int \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,\left[(M^+(\mathbf{k}',\mathbf{k}'')M(\mathbf{k},\mathbf{k}'')\sigma_1\cdot\mathbf{n}\,\sigma_2\cdot\mathbf{n}\right]\,d\omega_{\mathbf{k}''},$$

$$4\pi \operatorname{Im} \gamma(\vartheta) = ik \int \frac{1}{8} \operatorname{tr} \left[(M^+(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') M(\mathbf{k}, \mathbf{k}'')(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{n} \right] d\omega_{\mathbf{k}''},$$

$$4\pi \operatorname{Im} \delta(\vartheta) = k \int \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[(M^+(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') M(\mathbf{k}, \mathbf{k}'')\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{m}\, \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{m} \right] d\omega_{\mathbf{k}''},$$

$$4\pi \operatorname{Im} \varepsilon(\vartheta) = k \int \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[(M^+(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') M(\mathbf{k}, \mathbf{k}'')\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{l}\, \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{l} \right] d\omega_{\mathbf{k}''}.$$

Evaluation of the traces involved in the unitarity relation is elementary but yields cumbersome expressions which will not be given here. It should be mentioned that if one uses the expression for M given in ref. [5] the unitarity relation for coefficient $B(\vartheta)$ (singlet scattering) takes the form of the unitarity relation for scattering of spinless particles.

References

1. *Wolfenstein L.* Ann. Rev. Nucl. Sci., **6**, 1956.
2. *Glauber R., Schomaker V.* Phys. Rev., **89**, 667, 1953.
3. *Minami S.* Progr. Theor. Phys., **11**, 213, 1954.
4. *Ryndin R., Smorodinsky J.* Doklady, **103**, 69, 1955.
5. *Wolfenstein L.* Phys. Rev., **96**, 1654, 1954.
6. *Oehme R.* Phys. Rev., **98**, 147, 1955.
7. *Oehme R.* Phys. Rev., **98**, 216, 1955.
8. *Ryndin R., Smorodinsky J.* JETP (in print).
9. *Ryndin R., Smorodinsky J.* CERN Symposium Proc., **2**, 1956.

Преобразования Минами для рассеяния нуклонов нуклонами

Р. М. Рындин, Я. А. Смородинский

Введение

В случае рассеяния частиц со спином $1/2$ на частицах без спина существует два набора фаз [1–3], которые не могут быть различены без помощи поляризационных экспериментов (или без исследования энергетической зависимости сечения рассеяния при малых энергиях). Эти наборы получаются друг из друга путем одновременной перестановки фаз, принадлежащих данному значению полного момента. Если через δ_l^j обозначить фазы рассеянных волн с определенными значениями j и l, то речь идет о преобразовании

$$\delta^j_{j-1/2} \rightleftarrows \delta^j_{j+1/2} \quad \text{(при всех } j \text{ одновременно).} \tag{I}$$

В работе авторов [4] было показано, что существование этого преобразования является следствием очевидной инвариантности сечения рассеяния неполяризованного пучка относительно поворота спина на угол $\pm\pi$ вокруг направления $\boldsymbol{\nu}$ волнового вектора рассеянных частиц. Преобразование (I) легко обобщается на случай поворота спина на произвольный угол γ и принимает в этом случае вид:

$$E^j_{j-1/2} \to i\cos\frac{\gamma}{2}E^j_{j-1/2} - \sin\frac{\gamma}{2}E^j_{j+1/2}, \quad E^j_{j+1/2} \to i\cos\frac{\gamma}{2}E^j_{j+1/2} - \sin\frac{\gamma}{2}E^j_{j-1/2}. \tag{II}$$

Здесь через E^j_l обозначена величина $\exp\left(2i\delta^j_l\right) - 1$. Существование этого преобразования доказывается проще всего, если к амплитуде рассеяния применить оператор $i\exp\left(-i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}\gamma/2\right)$, пропорциональный оператору поворота спина на угол γ вокруг направления $\boldsymbol{\nu}$. Действительно, сечение рассеяния неполяризованного пучка можно представить в виде [1]):

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = f^+_{1/2} f_{1/2},$$

где через $f_{1/2}$ обозначена амплитуда рассеяния с проекцией полного момента на направление падающего пучка, равной $1/2$. Очевидно, что сечение инвариантно относительно замены $f_{1/2}$ на $f'_{1/2} = i\exp\left(-i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}\gamma/2\right)f_{1/2}$. Амплитуда $f_{1/2}$ при помощи обычных правил квантово-механического сложения моментов выражается через собственные функции $Y^{1/2}_{j,l,1/2}(\boldsymbol{\nu})$ операторов $\mathbf{j}^2$, $\mathbf{l}^2$, $\mathbf{s}^2$ и s_z:

$$f_{1/2} = \frac{\pi^{1/2}}{ik}\sum_{j=1/2}^{\infty}(j+1/2)^{1/2}\left\{E^j_{j-1/2}Y^{1/2}_{j,j-1/2,1/2}(\boldsymbol{\nu}) - E^j_{j+1/2}Y^{1/2}_{j,j+1/2,1/2}(\boldsymbol{\nu})\right\}. \tag{III}$$

---

[1]) Вследствие инвариантности гамильтониана взаимодействия относительно вращений и отражений выполняется равенство $f^+_{1/2}f_{1/2} = f^+_{-1/2}f$. Поэтому амплитуда $f_{-1/2}$ не входит явно в выражение для сечения рассеяния неполяризованного пучка.

Если воспользоваться теперь соотношением [5]

$$\sigma\nu Y^{1/2}_{j,l,1/2}(\nu) = Y^{1/2}_{j,l',1/2}(\nu), \quad l' = 2j - l = \begin{cases} j + 1/2 & \text{при} \quad l = j - 1/2 \\ j + 1/2 & \text{при} \quad l = j + 1/2 \end{cases},$$

то амплитуду $f'_{1/2}$ можно представить в виде

$$f'_{1/2} = \frac{\pi^{1/2}}{ik} \sum_{j=1/2}^{\infty} \left(j + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \left\{ \left(i \cos\frac{\gamma}{2} E^j_{j-1/2} - \sin\frac{\gamma}{2} E^j_{j+1/2}\right) Y^{1/2}_{j,j-1/2,1/2}(\nu) - \right.$$
$$\left. - \left(i \cos\frac{\gamma}{2} E^j_{j+1/2} - \sin\frac{\gamma}{2} E^j_{j-1/2}\right) Y^{1/2}_{j,j+1/2,1/2}(\nu) \right\}. \qquad \text{(IV)}$$

Сравнивая (III) и (IV), видим, что амплитуда $f'_{1/2}$ может быть получена из $f_{1/2}$ при помощи преобразования (II), и, следовательно, сечение действительно инвариантно относительно этого преобразования. Новые фазы будут комплексны при всех значениях γ, кроме значений $\gamma = \pm\pi$, рассмотренных Минами. Преобразования (II) при $\gamma \neq \pm\pi$ могут не учитываться поэтому при фазовом анализе данных по рассеянию частиц со спином $1/2$ на бесспиновых частицах.

Представляет интерес исследовать вопрос о существовании подобного рода инвариантностей в случае рассеяния нуклонов нуклонами. Будет показано, что такое преобразование действительно существует. Однако полученное преобразование не удовлетворяет физическим условиям задачи. Именно, симметрия системы требует, чтобы фазы не зависели от m (магнитное квантовое число системы). Фазы же, получаемые в результате рассматриваемых нами преобразований, оказываются зависящими от $|m|$. Следовательно, вопреки тому, что мы ожидали раньше [4], не существует неоднозначности фаз, подобной той, которая существует в системе с полным спином $1/2$.

Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением рассеяния протонов протонами, так как более общий случай рассеяния нейтронов протонами не дает ничего существенно нового.

1. Амплитуды и дифференциальное сечение рассеяния

В этом разделе воспроизведем вкратце метод описания столкновений тождественных частиц со спином $1/2$ и выпишем амплитуды рассеяния протонов протонами в виде, удобном для исследования их поведения при поворотах спинов.

Волновая функция двух протонов, движущихся до столкновения вдоль оси z, может быть записана в системе центра инерции (с. ц. и.) в виде

$$\psi_{sm} \sim \left(e^{ikz} - (-1)^{s+1} e^{-ikz}\right)\chi_{sm} + F_{sm}(\nu)\frac{e^{ikr}}{r}. \qquad (1.1)$$

Здесь χ_{sm} — спиновые функции ($s = 0$ и $s = 1$ в синглетном и триплетном состояниях, соответственно; m — проекция полного спина системы на ось z), k — волновое число, а через ν обозначен единичный вектор в направлении движения рассеянных частиц.

Скалярное произведение[2] $\langle F_{sm}, F_{sm}\rangle$ определяет собой дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_{sm}(\nu)$ с заданным начальным спином s и его проекцией m.

[2] Под скалярным произведением двух линейных комбинаций спиновых функций

$$a = \sum_{s'}\sum_{m'} a_{s'm'}\chi_{s'm'} \quad \text{и} \quad b = \sum_{s''}\sum_{m''} b_{s''m''}\chi_{s''m''}$$

Сечение рассеяния неполяризованного пучка получается усреднением сечения $d\sigma_{sm}(\nu)$ по возможным начальным спиновым состояниям системы:

$$\frac{d\sigma(\nu)}{d\omega} = \frac{1}{4}\left\{\langle F_{00}(\nu),\, F_{00}(\nu)\rangle + \sum_{m=-1}^{+1}\langle F_{1m}(\nu),\, F_{1m}(\nu)\rangle\right\}. \tag{1.2}$$

При помощи обычных методов исследования асимптотического поведения волновых функций (см., например, работу Блатта и Биденхарна [6]) легко получить явные выражения для амплитуд $F_{sm}(\nu)$ через элементы матрицы рассеяния S и функции $Y^m_{j,l,s}$. Синглетное рассеяние в состоянии с заданным значением j описывается при помощи единственного матричного элемента $S'_j = \exp(2i\Delta_j)$, где через Δ_j обозначена соответствующая фаза. Описание триплетного рассеяния значительно сложнее. Здесь необходимо различать две группы состояний с $j = l$ и с $j \pm 1 = l$, соответственно. К первой группе ($j = l$) относятся состояния с нечетными значениями j, а ко второй — состояния с четными j. В состояниях первой группы, как и в синглетных состояниях, сохраняется орбитальный момент, и рассеяние также описывается единственным матричным элементом $T'_j = \exp(2i\delta_j)$. В состояниях второй группы орбитальный момент не сохраняется, и возможны переходы между состояниями с $l = j+1$ и $l' = j-1$ (например, состояния $^3P_2$ и $^3F_2$). Вследствие этого рассеяние в состояниях с данным j описывается двухрядной матрицей. Ее матричные элементы в указанном примере состояний $^3P_2$ и $^3F_2$ определяют вероятности переходов $^3P_2 \to {}^3P_2$, $^3P_2 \to {}^3F_2$, $^3F_2 \to {}^3P_2$ и $^3F_2 \to {}^3F_2$. Эта матрица симметрична (равенство амплитуд вероятностей переходов $^3P_2 \to {}^3F_2$ и $^3F_2 \to {}^3P_2$, вытекающее из инвариантности гамильтониана взаимодействия относительно обращения времени) и унитарна. В дальнейшем матричные элементы матрицы рассеяния в состояниях с заданным j мы будем обозначать в соответствии со схемой:

$l \diagdown l'$	$j-1$	$j+1$
$j-1$	A'_j	C_j
$j+1$	C_j	B'_j

Условие унитарности позволяет выразить [6, 7] три комплексных параметра A'_j, B'_j и C_j через три независимых вещественных параметра, а именно через две фазы $\delta^{\rm I}_j$ и $\delta^{\rm II}_j$, и параметр смешивания ε_j при помощи соотношений:

$$\begin{aligned} A'_j &= \cos^2\varepsilon_j \exp\left(2i\delta^{\rm I}_j\right) + \sin^2\varepsilon_j \exp\left(2i\delta^{\rm II}_j\right), \\ B'_j &= \sin^2\varepsilon_j \exp\left(2i\delta^{\rm I}_j\right) + \cos^2\varepsilon_j \exp\left(2i\delta^{\rm II}_j\right), \\ C_j &= \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon_j\left(\exp\left(2i\delta^{\rm I}_j\right) - \exp\left(2i\delta^{\rm II}_j\right)\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Параметр смешивания связан с тензорными силами и обращается в нуль при их отсутствии.

подразумевается величина

$$\langle a, b\rangle = \sum_s \sum_m a^*_{sm} b_{sm}.$$

Амплитуды рассеяния записываются в виде:

$$
\begin{aligned}
F_{00}(\nu) &= \frac{(4\pi)^{1/2}}{ik}\sum_j (2j+1)^{1/2} S_j Y^0_{j,j,0}(\nu),\\
F_{1,1}(\nu) &= \frac{(2\pi)^{1/2}}{ik}\sum_j \Big\{ \big[(j+1)^{1/2}A_j + j^{1/2}C_j\big] Y^1_{j,j-1,1}(\nu) -\\
&\quad - (2j+1)^{1/2} T_j Y^1_{j,j,1}(\nu) + \big[j^{1/2}B_j + (j+1)^{1/2}C_j\big] Y^1_{j,j+1,1}(\nu)\Big\},\\
F_{1,0}(\nu) &= \frac{(4\pi)^{1/2}}{ik}\sum_j \Big\{ \big[j^{1/2}A_j - (j+1)^{1/2}C_j\big] Y^0_{j,j-1,1}(\nu) +\\
&\quad + \big[-(j+1)^{1/2}B_j + j^{1/2}C_j\big] Y^0_{j,j+1,1}(\nu)\Big\},\\
F_{1,-1}(\nu) &= \frac{(2\pi)^{1/2}}{ik}\sum_j \Big\{ \big[(j+1)^{1/2}A_j + j^{1/2}C_j\big] Y^{-1}_{j,j-1,1}(\nu) +\\
&\quad + (2j+1)^{1/2} T_j Y^{-1}_{j,j,1}(\nu) + \big[j^{1/2}B_j + (j+1)^{1/2}C_j\big] Y^{-1}_{j,j+1,1}(\nu)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Здесь через S_j, T_j, A_j и B_j обозначены величины $S'_j - 1$, $T'_j - 1$, $A'_j - 1$ и $B'_j - 1$. Суммирование в амплитуде синглетного рассеяния производится лишь по четным j согласно принципу Паули. В амплитуде триплетного рассеяния суммирование производится по нечетным j для состояний с $j = l$ и по четным j для состояний с $j \pm 1 = l$.

2. Поведение амплитуд рассеяния при поворотах спинов

Перейдем теперь к исследованию преобразований амплитуд рассеяния $F_{sm}(\nu)$ при поворотах суммарного спина системы и спинов отдельных протонов и получим подстановки над элементами матрицы рассеяния, приводящие к тем же преобразованиям амплитуд.

Начнем с изучения поворотов полного спина $\mathrm{s} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, где через σ_i обозначены спиновые операторы Паули для обоих протонов. Оператор поворота спина s на произвольный угол γ вокруг оси ν определяется как прямое произведение операторов поворота спинов протонов $\exp(-i\sigma_i \nu\gamma/2)$ на тот же угол и равен:

$$R(\nu,\gamma) = \exp(-i\mathrm{s}\nu\gamma) = \cos^2\frac{\gamma}{2} - i\mathrm{s}\nu\sin\gamma + \sin^2\frac{\gamma}{2}\big(1 - 2(\mathrm{s}\nu)^2\big). \tag{2.1}$$

Действие $R(\nu,\gamma)$ на синглетные спиновые функции эквивалентно действию единичного оператора, так как проекция полного спина системы на любое направление равна нулю в синглетном состоянии.

Заметим сразу же, что в случае тождественных частиц (два протона) повороты полного спина s на произвольный угол γ не могут привести к физически допустимым подстановкам над элементами матрицы рассеяния, так как амплитуды $F_{sm} = R(\nu,\gamma)F_{sm}$, возникающие в результате этого преобразования, не удовлетворяют принципу Паули. Действительно, с одной стороны, оператор поворота $R(\nu,\gamma)$ коммутирует с оператором квадрата полного спина системы s^2, и, следовательно, оставляет неизменной спиновую четность состояния. С другой же стороны, при повороте на произвольный угол γ состояние с определенной орбитальной четностью превращается в линейную комбинацию состояний с различными четностями.

Исключение составляет случай $\gamma = \pm\pi$, когда оператор поворота превращается в оператор $1 - 2(\mathbf{s}\boldsymbol{\nu})^2$, не меняющий четности состояния.

Можно убедиться в том, что амплитуды $F'_{sm}(\boldsymbol{\nu})$, соответствующие повернутому на $\pm\pi$ суммарному спину $\mathbf{s}$, имеют вид

$$
\begin{aligned}
&F'_{0,0}(\boldsymbol{\nu}) = R(\boldsymbol{\nu}, \pm\pi)F_{0,0}(\boldsymbol{\nu}) = F_{0,0}(\boldsymbol{\nu}),\\
&F'_{1,1}(\boldsymbol{\nu}) = R(\boldsymbol{\nu}, \pm\pi)F_{1,1}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{ik}\sum_j\Big\{-\frac{1}{2j+1}\big[(j+1)^{1/2}A_j +\\
&\quad + j^{1/2}(2j+3)C_j + (j+1)^{1/2}2jB_j\big]Y^1_{j,j-1,1}(\boldsymbol{\nu}) + (2j+1)^{1/2}T_jY^1_{j,j,1}(\boldsymbol{\nu}) -\\
&\quad - \frac{1}{2j+1}\big[j^{1/2}2(j+1)A_j + (j+1)^{1/2}(2j-1)C_j - j^{1/2}B_j\big]Y^1_{j,j+1,1}(\boldsymbol{\nu})\Big\},\\
&F'_{1,0} = R(\boldsymbol{\nu}, \pm\pi)F_{1,0}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{(4\pi)^{1/2}}{ik}\sum_j\Big\{-\frac{1}{2j+1}\big[j^{1/2}A_j +\\
&\quad + (j+1)^{1/2}(2j-1)C_j - j^{1/2}2(j+1)B_j\big]Y^0_{j,j-1,1}(\boldsymbol{\nu}) -\\
&\quad - \frac{1}{2j+1}\big[(j+1)^{1/2}2jA_j - j^{1/2}(2j+3)C_j + (j+1)^{1/2}B_j\big]Y^0_{j,j+1,1}(\boldsymbol{\nu})\Big\},\\
&F'_{1,-1}(\boldsymbol{\nu}) = R(\boldsymbol{\nu}, \pm\pi)F_{1,-1}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{ik}\sum_j\Big\{-\frac{1}{2j+1}\big[(j+1)^{1/2}A_j +\\
&\quad + j^{1/2}(2j+3)C_j + (j+1)^{1/2}2jB_j\big]Y^{-1}_{j,j-1,1}(\boldsymbol{\nu}) - (2j+1)^{1/2}T_jY^{-1}_{j,j,1}(\boldsymbol{\nu}) -\\
&\quad - \frac{1}{2j+1}\big[j^{1/2}2(j+1)A_j + (j+1)^{1/2}(2j-1)C_j - j^{1/2}B_j\big]Y^{-1}_{j,j+1,1}(\boldsymbol{\nu})\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Это преобразование амплитуд эквивалентно их преобразованию при следующих подстановках над триплетными элементами матрицы рассеяния:

$$
m = \pm 1\begin{cases}
(j+1)^{1/2}A_j + j^{1/2}C_j \to -\dfrac{1}{2j+1}\big[(j+1)^{1/2}A_j + j^{1/2}(2j+3)C_j + (j+1)^{1/2}2jB_j\big],\\
j^{1/2}B_j + (j+1)^{1/2}C_j \to -\dfrac{1}{2j+1}\big[j^{1/2}2(j+1)A_j + (j+1)^{1/2}(2j-1)C_j - j^{1/2}B_j\big],\\
T_j \to -T_j,
\end{cases}
\tag{2.3а}
$$

$$
m = 0\begin{cases}
j^{1/2}A_j - (j+1)^{1/2}C_j \to -\dfrac{1}{2j+1}\big[j^{1/2}A_j + (j+1)^{1/2}(2j-1)C_j - j^{1/2}2(j+1)B_j\big],\\
-(j+1)^{1/2}B_j + j^{1/2}C_j \to -\dfrac{1}{2j+1}\big[(j+1)^{1/2}2jA_j - j^{1/2}(2j+3)C_j + (j+1)^{1/2}B_j\big],\\
T_j \to -T_j,
\end{cases}
\tag{2.3б}
$$

Сечение $d\sigma(\boldsymbol{\nu})$ остается инвариантным при замене $F_{sm}(\boldsymbol{\nu})$ на $F'_{sm}(\boldsymbol{\nu}) = R(\boldsymbol{\nu}, \pm\pi)F_{sm}$ в силу унитарности оператора $R(\boldsymbol{\nu}, \pm\pi)$. Это означает, что $d\sigma(\boldsymbol{\nu})$ инвариантно и относительно подстановок (2.3). Однако подстановки (2.3а) и (2.3б), приводящие к требуемому преобразованию амплитуд $F_{1,\pm1}(\boldsymbol{\nu})$, с одной стороны, и амплитуды $F_{1,0}(\boldsymbol{\nu})$, — с другой, различны. Они не зависят от знака проекции

полного момента m, но зависят от ее абсолютной величины. Различие подстановок (2.3а) и (2.3б) проще всего увидеть в случае отсутствия тензорных сил ($C_j = 0$; это равенство не ведет к отсутствию поляризационных эффектов, так как допускает существование ядерного спин-орбитального взаимодействия между нуклонами). В этом случае подстановки (2.3) становятся однозначными подстановками над двумя параметрами и принимают вид:

$$m = \pm 1: \quad A_j \to -\frac{1}{2j+1}[A_j + 2jB_j], \qquad B_j \to -\frac{1}{2j+1}[2(j+1)A_j - B_j], \qquad T_j \to -T_j; \tag{2.4а}$$

$$m = 0: \quad A_j \to -\frac{1}{2j+1}[A_j - 2(j+1)B_j], \quad B_j \to \frac{1}{2j+1}[2jA_j + B_j], \qquad T_j \to -T_j. \tag{2.4б}$$

Различие в (2.4а) и (2.4б) очевидно. Причина его кроется в различии весов, с которыми угловые волновые функции $Y^m_{j,l,s}$ с различными значениями $|m|$ входят в разложение начальных плоских волн (первый член в (1.1)). Различие подстановок (2.3а) и (2.3б) в общем случае следует непосредственно из несовместимости системы четырех уравнений для трех не зависящих от значения проекции элементов новой матрицы рассеяния S'. Эти уравнения получаются из (2.3а) и (2.3б) путем замены знака $\to$ знаком равенства и замены A_j, B_j и C_j в левых частях равенств на элементы $S' - 1$.

Различие подстановок, соответствующих различным значениям $|m|$, означает, что элементы матрицы рассеяния становятся зависящими от $|m|$ после выполнения указанного преобразования. Этот факт не совместим с симметрией системы и, следовательно, невозможно построить при помощи поворотов полного спина физически допустимый набор элементов матрицы рассеяния из набора, полученного при анализе данных по рассеянию неполяризованных протонов.

Аналогичным путем можно подойти к задаче исследования преобразований амплитуд рассеяния при поворотах спина одного из протонов. Эти преобразования, как и преобразования амплитуд при поворотах полного спина, не дают физически допустимых подстановок над элементами матрицы рассеяния. Во-первых, амплитуда, возникающая в результате преобразований поворота одного из спинов, соответствует матрице рассеяния с отличными от нуля элементами синглет-триплетных переходов (оператор $\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\nu}$ не коммутирует с оператором квадрата полного спина $\mathbf{s}^2$) и не удовлетворяет, следовательно, принципу Паули. Во-вторых, подстановки, приводящие к требуемому преобразованию амплитуды, зависят от $|m|$, как и в случае поворотов полного спина. Однако в частном случае, когда в рассеянии принимают участие только $^1S_0$ и $^3P_0$ состояния (только нулевая проекция полного момента), возникает известная инвариантность сечения относительно замены фаз $\delta(^1S_0)$ и $\delta(^3P_0)$ друг другом (поворот спина одного из протонов на угол $\pm\pi$).

Заметим, наконец, что ничего существенно нового не дает и рассмотрение столкновений нетождественных нуклонов, где отсутствуют ограничения, накладываемые принципом Паули на случаи рассеяния протонов протонами. Кроме того, результаты исследования поведения амплитуд рассеяния при поворотах полного спина системы из двух нуклонов могут быть непосредственно перенесены на случай рассеяния дейтонов частицами с нулевым спином.

Единственной системой (в случае нерелятивистских частиц), для которой вращение спинов приводит к неоднозначности фаз при анализе данных по рассеянию неполяризованных частиц, является система с полным спином $1/2$, так как в этом случае имеется только одно значение $|m|$.

Литература

1. *Minami S.* Progr. Theor. Phys., **11**, 213, 1954.
2. *Hayakawa S. et al.* Progr. Theor. Phys., **11**, 332, 1954.
3. *Fukuda N. et al.* Progr. Theor. Phys., **12**, 79, 1954.
4. *Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* ДАН СССР, **103**, 69, 1955.
5. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М., 1953. С. 67.
6. *Bethe H., Hoffmann F.* Mesons and Fields. **II**, New York, 1955. P. 72.
7. *Blatt J. M., Biedenharn L. C.* Rev. Mod. Phys., **24**, 258, 1952.
8. *Blatt J. M., Biedenharn L. C.* Phys. Rev., **86**, 399, 1952.

О соотношениях унитарности для упругих столкновений частиц с произвольными спинами

Р. М. Рындин, Я. А. Смородинский

Рассмотрим столкновения частиц без спина. Пусть энергия налетающих частиц такова, что возможно только упругое рассеяние. Тогда, как показали Глаубер и Шомакер [1], амплитуда рассеяния $f(\vartheta)$ подчиняется интегральному соотношению

$$4\pi \operatorname{Im} f(\vartheta) = k \int f^*(\vartheta'') f(\vartheta')\, d\omega(\mathbf{k}''). \tag{1}$$

Здесь ϑ означает угол между векторами начального $\mathbf{k}$ и конечного $\mathbf{k}'$ импульсов; ϑ' — угол между $\mathbf{k}$ и переменным вектором $\mathbf{k}'$; ϑ'' — между $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ ($k = k' = k''$, с. ц. и.); а интегрирование производится по всем направлениям $\mathbf{k}''$. Из (1) при $\vartheta \to 0$ вытекает так называемая оптическая теорема — соотношение между мнимой частью амплитуды рассеяния вперед и полным сечением σ. Ниже мы обобщим (1) на случай упругих столкновений частиц с произвольными спинами s_1 и s_2 и покажем, что помимо оптической теоремы возникает еще ряд соотношений, связывающих неисчезающие при $\mathbf{k}' \to \mathbf{k}$ элементы матрицы рассеяния с различными спиновыми характеристиками.

Процесс упругого рассеяния полностью описывается матрицей $M(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ в $(2s_1+1)(2s_2+1)$-мерном спиновом пространстве, определяющей амплитуду рассеянной волны

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} \to \infty) \sim \varphi_{\mathbf{k}'}^{\text{пад}} + \varphi_{\mathbf{k}}^{\text{расс}} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\chi + M(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\frac{\chi e^{ikr}}{r}. \tag{2}$$

Индексы полного спина системы и его проекции у спиновых функций χ опущены для простоты написания. Условие унитарности S-матрицы приводит к тому, что волновые функции $\Psi_{\mathbf{k}}$ удовлетворяют тем же требованиям ортогональности и нормировки, что и начальные функции падающей волны, и образуют при $r \to \infty$ полную систему функций по отношению к угловым переменным

$$\int \varphi_{\mathbf{k}'}^{+\text{пад}} \varphi_{\mathbf{k}}^{\text{пад}}\, d\omega = \int \Psi_{\mathbf{k}'}^{+} \Psi_{\mathbf{k}}\, d\omega. \tag{3}$$

Знак $+$ означает, как обычно, эрмитово сопряжение.

Воспользовавшись выражением (2), асимптотическим представлением плоской волны

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{\text{пад}} \sim \frac{i}{k}\delta\left(1 + \frac{\mathbf{kr}}{kr}\right)\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{i}{k}\delta\left(1 - \frac{\mathbf{kr}}{kr}\right)\frac{e^{ikr}}{r}$$

и полнотой системы спиновых функций, легко получить из (3) искомое интегральное соотношение для матрицы рассеяния

$$2\pi\left[M(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - M^+(\mathbf{k}', \mathbf{k})\right] = ik \int M^+(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') M(\mathbf{k}, \mathbf{k}'')\, d\omega(\mathbf{k}''). \tag{4}$$

Из (4) немедленно следуют интегральные соотношения для коэффициентов разложения $M(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ по инвариантным спиновым матрицам, приведенные в работе [2] для рассеяния нуклонов нуклонами и примененные там к анализу полного набора опытов по восстановлению матрицы рассеяния.

Если при $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ воспользоваться разложением $M(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \sum\limits_{\mu} \alpha_\mu S_\mu$ по ортогональным и нормированным эрмитовым операторам S_μ [операторы ортогональны и нормированы, если $\operatorname{Sp} S_\mu S_\nu = (2s_1+1)(2s_2+1)\delta_{\mu\nu}$], то из (4) можно получить следующие соотношения:

$$4\pi \operatorname{Im}\alpha_\nu(2s_1+1)(2s_2+1) = 4\pi \operatorname{Im}\operatorname{Sp} S_\nu M(\mathbf{k},\mathbf{k}) = k\int \operatorname{Sp} S_\nu M^+(\mathbf{k},\mathbf{k}'')M(\mathbf{k},\mathbf{k}'')\,d\omega(\mathbf{k}''). \quad (5)$$

В частности, полагая S_ν равным единице, получаем обобщение оптической теоремы на случай частиц со спинами

$$4\pi \operatorname{Im}\operatorname{Sp} M(\mathbf{k},\mathbf{k}) = k(2s_1+1)(2s_2+1)\sigma.$$

Из последнего соотношения вытекает неравенство [3] $\sigma(0) \geqslant (k/2\pi)^2\sigma^2$, ограничивающее значения сечения упругого рассеяния на 0°. При S_ν соотношения (5) связывают $\operatorname{Im}\alpha_\nu$ с интегралом от величины $\operatorname{Sp} S_\nu M^+M$, определяющей добавку

$$(2s_1+1)^{-1}(2s_2+1)^{-1}\langle S_\nu\rangle_{\text{пад}} \operatorname{Sp} S_\nu M^+M$$

к сечению рассеяния неполяризованного пучка на неполяризованной мишени, обусловленную начальной поляризацией сталкивающихся частиц (в начальном состоянии отлично от нуля среднее значение $\langle S_\nu\rangle_{\text{пад}}$ величины S_ν).

Число соотношений (5) совпадает с числом отличных от нуля при $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ коэффициентов α_ν. Так, в случае рассеяния мезонов нуклонами получаем только оптическую теорему [коэффициент при $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})$ в разложении амплитуды рассеяния обращается в нуль при $\mathbf{k}' \to \mathbf{k}$]. При рассеянии нуклонов нуклонами получаем 3 соотношения. В этом случае в качестве S_ν следует выбрать операторы

$$I, \quad 2^{-1/2}\left[(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2) - (\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{l})(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{l})\right], \quad (\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{l})(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{l})$$

(из векторов $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$ и $\mathbf{l} = \mathbf{k}/k$ невозможно построить большего числа скалярных выражений). Благодаря инвариантности матрицы рассеяния $M(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ относительно обращения времени следы, содержащие операторы

$$2^{-1/2}\left[(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2) - (\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{l})(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{l})\right], \quad (\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{l})(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{l})$$

и определяющие добавки к сечению, могут быть выражены [2] через компоненты тензора корреляции поляризации, возникающие при столкновениях неполяризованных нуклонов.

Авторы благодарны Л. И. Лапидусу, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний.

Литература

1. *Glauber R., Schomaker V.* Phys. Rev., **89**, 667, 1953.
2. *Пузиков Л., Рындин Р., Смородинский Я.* ЖЭТФ, **32**, 592, 1956.
3. *Wiek G.* Phys. Rev., **A75**, 1459, 1949.

Аналитичность нерелятивистской амплитуды рассеяния и потенциал

Я. А. Смородинский

Как известно, амплитуда рассеяния частицы в центральном поле сил, при заданном моменте количества движения l, не может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость переменной k. Представляет интерес указать на способ доказательства этого утверждения, связанный с обратной задачей теории рассеяния (Гельфанд и Левитан [1], Марченко [2]).

Для краткости предположим, что отсутствуют связанные состояния и что рассеяние происходит в s-состоянии; обобщение задачи очевидно.

Следуя Марченко [2], решение уравнения

$$\frac{d^2\psi(x,k)}{dx^2} + \big(k^2 - V(x)\big)\psi(x,k) = 0 \tag{1}$$

может быть представлено в виде разложения в интеграл по системе функций

$$\varphi(y,k) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin\left[ky + \delta(k)\right] \tag{2}$$

($\delta(k)$ — фаза рассеяния, известная из опыта) следующим образом:

$$\psi(x,k) = \varphi(x,k) + \int_x^\infty A(x,y)\varphi(y,k)\,dy. \tag{3}$$

В этом уравнении $A(x,y)$ определяется из интегрального уравнения, ядро и неоднородность которого выражаются через компоненту Фурье от амплитуды рассеяния $M(k) = \exp\{2\pi i\delta(k)\} - 1$:

$$m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} M(k)e^{ikz}\,dk, \quad \text{при} \quad z > 0. \tag{4}$$

Если $m(z) = 0$ при $z > 0$, то из уравнения Марченко следует, что $A(x,y) = 0$ и согласно (1) волновая функция $\psi(x,k)$ совпадает с решением свободного уравнения везде, кроме начала координат (контактное взаимодействие). С другой стороны, обращение $m(z)$ в нуль при $z > 0$ означает, согласно (3), что амплитуда рассеяния не имеет полюсов при $\operatorname{Im} k > 0$ и растет при $k \to \infty$ ($\operatorname{Im} k > 0$) не быстрее степени k, так как в этом случае можно замкнуть контур интегрирования полуокружностью большого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости.

Отсюда следует, что если рассеяние описывается потенциалом, то либо амплитуда имеет полюса (так называемые «лишние полюса», ибо мы предположили, что система не имеет уровней), либо же она растет быстрее полинома при $k \to \infty$ ($\operatorname{Im} k > 0$).

Если потенциал ограничен в пространстве [$V(x) = 0$ при $x > a$], то $m(z)$ обращается в нуль при $z > 2a$. Это следует из соотношения

$$\int \varphi(y,k)\varphi(x,k)\,dk = \delta(y-x) - m(x+y). \qquad (5)$$

Действительно, при (x и y) $> a$, $\varphi(x,k)$ и $\varphi(y,k)$ совпадают с решением уравнения Шредингера и должны быть поэтому ортогональны. Но тогда из (4) следует, что функция

$$M_a(k) = M(k)e^{2ika} \qquad (6)$$

аналитична в верхней полуплоскости. Этот результат был получен из других соображений Ван Кампеном [3].

Если амплитуда рассеяния известна при всех энергиях, то, как наиболее строго показано в работе Хури [4], функция

$$g(E) = M(E,\tau) - \frac{V_\tau}{4\pi} \qquad (7)$$

(где $M(E,\tau)$ — амплитуда рассеяния, рассматриваемая как функция энергии E и переданного импульса τ, а V_τ — компонента Фурье от потенциала) может быть аналитически продолжена на комплексную плоскость E (или верхнюю полуплоскость k) и для нее могут быть написаны дисперсионные соотношения [1)].

Из дисперсионного соотношения для функции (7), полученного Хури, видно, что если известна амплитуда рассеяния, то потенциал определяется по амплитуде без решения интегральных уравнений.

Подчеркнем, что это утверждение справедливо, если амплитуда рассеяния известна при всех энергиях. Так как само уравнение Шредингера справедливо лишь в ограниченной области энергии, то амплитуда рассеяния может быть задана только для некоторого интервала энергии. Этому вопросу будет посвящено другое сообщение.

Литература

1. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Изв. АН СССР, сер. матем., **15**, 309, 1951.
2. *Марченко В. А.* ДАН СССР, **104**, 695, 1955.
3. *van Kampen N. G.* Phys. Rev., **91**, 1267, 1953.
4. *Khiri N. N.* Phys. Rev., **107**, 1148, 1957.

1) Условия, которые при этом накладываются на потенциал, совпадают с условием, что при $k \to \infty$ амплитуда рассеяния определяется первым борновским приближением. При этом дисперсионные соотношения справедливы для $\tau < 2\alpha$, где α — максимальное положительное число, при котором существует интеграл

$$\int_0^\infty e^{2\alpha}|V(y)|\,dy.$$

Заметим еще, что если этот интеграл существует при любом α, то амплитуда рассеяния «не имеет лишних полюсов».

«Полный опыт» в β-распаде

Я. А. Смородинский

В работе Пузикова, Рындина и автора [1] было определено необходимое число опытов («полный опыт») для восстановления матрицы рассеяния нуклонов нуклонами. Результаты этой работы были обобщены и для случая произвольных спинов сталкивающихся частиц [2], а также и на случай неупругих процессов [3]. Аналогичная задача может быть решена и для β-распада.

Здесь мы рассмотрим только распад нейтрона. Если спиральность лептонов сохраняется, то гамильтониан β-взаимодействия записывается в виде

$$H_\beta = (V_\alpha + A_\alpha)\langle e|\gamma_\alpha(1+\gamma_5)|\nu\rangle, \qquad (1)$$

где V_α и A_α — нуклонные «токи», отвечающие соответственно векторному и псевдовекторному взаимодействию. Если потребовать, чтобы нейтрон и антипротон (имеющие одинаковую проекцию изотопического спина) распадались одинаково, то можно показать (ср. [4]), что

$$V_\alpha = \langle p|a(k)\gamma_\alpha + b(k)\sigma_{\alpha\beta}k_\beta|n\rangle, \qquad (2)$$

$$A_\alpha = \langle p|c(k)\gamma_5\gamma_\alpha + d(k)\gamma_5 k_\alpha|n\rangle; \qquad (3)$$

$\sigma_{\alpha\beta} = i(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)/2$. Здесь $\langle p|$ и $|n\rangle$ — волновые функции свободных нуклонов, k — четырехмерный переданный импульс (сумма импульсов электрона и антинейтрино). Отсюда видно, что все свойства β-распада нейтрона описываются четырьмя функциями $a(k), b(k), \ldots$. При этом $b(k)$ описывает то, что Гелл-Манн [5] назвал «слабым магнетизмом». Обычно в разрешенном приближении k полагается равным нулю, и измеряют две постоянные $a(0) = g_F$ и $c(0) = g_{GT}$. В принципе, при более точных измерениях можно измерить и зависимость этих коэффициентов от k. Однако, так как «размеры» нуклона $\sim \hbar/Mc$, а максимальное $k \sim \hbar/mc$, то отклонения от «разрешенного» приближения будет порядка $m/M \sim 0{,}1\%$. В таких опытах мы получим значения формфакторов в интервале значений k, определяемых энергией распада. Измерения этих коэффициентов в более широком интервале энергий может быть проведено тогда, когда можно будет изучать захват антинейтрино различных энергий протонами.

В этом случае при каждом значении переданного импульса (или для каждого значения суммарного импульса лептонов в β-распаде) надо производить четыре опыта. Положение упрощается, если принять во внимание теорему Гелл-Манна [5, 6], из которой следует, что для легких ядер формфакторы $a(k)$ и $b(k)$ совпадают с теми, которые определяют рассеяние электронов на протоне и нейтроне. Поэтому, если использовать данные по рассеянию электронов, то для β-распада остается определить только два формфактора, т. е. необходимо произвести два опыта при каждом значении переданного импульса.

Очевидно, что сказанное остается справедливым и для любого β-распада между ядрами со спином $1/2$. Однако, если зарядовая инвариантность нарушается (не зеркальные переходы), то число формфакторов увеличивается в каждом из токов на единицу.

Сформулируем еще и результат для общего случая перехода между зеркальными ядрами.

Если рассмотреть переход $I' \to I''$ (нет), число формфакторов в векторном токе равно $2I+1$, где I — наименьший из спинов I', I''. Эти формфакторы для легких ядер определяются из неупругого рассеяния электронов с переходом ядра в состояние, изотопически подобное конечному состоянию в β-переходе. Число формфакторов в псевдовекторном токе равно $2I$. В случае перехода $I \to I'$ (да) число формфакторов для каждого тока равно $2I$ и $2I+1$. Эти же числа определяют число опытов, составляющих полный опыт.

Таким образом, изучение «запрещенных» приближений и запрещенных β-переходов определяет набор формфакторов. Обычно запрещенные переходы описываются в литературе набором ядерных матричных элементов, что в действительности есть лишь приближенный способ задания формфакторов [1]. Простые, но несколько громоздкие вычисления дают возможность выразить результаты различных опытов через формфакторы. Соответствующие формулы будут даны в следующем сообщении, посвященном общим свойствам β-формфакторов.

Те же соображения справедливы и для захвата μ-мезона. По крайней мере для легких ядер надо ожидать, что формфакторы векторного тока будут те же, что и для электронов (при соответствующем k). В случае псевдовекторного тока есть указания, что β и μ-формфакторы разные [7]. Это обстоятельство делает опыты с μ-мезонами еще более интересными.

Автор благодарен Р. Рындину и С. Биленькому за полезное обсуждение результатов.

Литература

1. *Пузиков Л. Д., Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **32**, 592, 1957.
2. *Биленький С. М., Лапидус Л. И., Пузиков Л. Д., Рындин Р. М.* ЖЭТФ, **35**, 959, 1958.
3. *Пузиков Л. Д.* ЖЭТФ, **44**, 947, 1958.
4. *Goldberger M. L., Treimann S. B.* Phys. Rev., **111**, 354, 1958.
5. *Gell-Mann M.* Phys. Rev., **111**, 362, 1958.
6. *Feinman R. P., Gell-Mann M.* Phys. Rev., **109**, 193, 1958.
7. *Burgmann J. O., Fisch J., Leontic B., Lundby A., Meunier W., Stroot J. P., Tcja J. D.* Phys. Rev. Lett., **1**, 469, 1958.

[1] Отметим, что формфакторы описывают «коллективные» переходы, которые, например, могут вносить существенный вклад в переходы в вытянутых ядрах с большими квадрупольными моментами.

К теории β-распада нейтрона

С. И. Биленький, Р. М. Рындин,
Я. А. Смородинский, Хэ Цзо-сю

1. Введение

В результате интенсивных теоретических и экспериментальных исследований последних лет был, по-видимому, однозначно установлен $V-A$-вариант слабого взаимодействия [1–3]. Основываясь на равенстве константы μ-распада G_μ и фермиевской константы G_F β-распада, Файнман и Гелл-Манн высказали предположение о глубокой аналогии между векторной частью слабого взаимодействия и нуклонным током в электродинамике. Как показал в дальнейшем Гелл-Манн [4], это приводит к появлению дополнительных членов («слабый магнетизм») в формулах для наблюдаемых эффектов в β-распаде. Обнаружение этих поправок на опыте явилось бы сильным подтверждением гипотезы. Связанные с гипотезой Файнмана и Гелл-Манна поправки к β-распаду ядер обсуждались и в других работах [5–6].

В настоящей работе рассматривается влияние сильных взаимодействий на простейший случай β-распада — распад нейтрона. Феноменологический учет сильных взаимодействий приводит, как известно [7], в случае $V-A$-варианта к появлению шести формфакторов, зависящих, благодаря локальности слабого взаимодействия, лишь от квадрата четырехмерной передачи импульса. При рассмотрении матричного элемента мы учитываем только члены порядка m/M (m и M — массы электрона и нуклона) и опускаем члены более высокого порядка. Оказывается, что 1) зависимостью формфакторов от передачи 4-импульса можно пренебречь и считать их постоянными; 2) кроме обычных постоянных β-распада G и λ, в теорию входит только постоянная, соответствующая «слабому магнетизму». Остальные члены в амплитуде оказываются второго порядка малости.

Существенно, что величина новой постоянной определяется аномальными магнитными моментами нуклонов. Поэтому окончательные формулы в этом приближении не содержат никаких неопределенных параметров.

Поправки к наблюдаемым эффектам, которые при этом получаются, возникают как от «слабого магнетизма», так и от учета отдачи протона в обычных матричных элементах. Хотя эти поправки и невелики и составляют, вообще говоря, $\sim 0{,}1\,\%$ от основного эффекта, в некоторых случаях (корреляция электрон—нейтрино и асимметрия электронов при распаде поляризованных нейтронов) они достигают нескольких процентов и могут быть измерены, если увеличить точность современных экспериментов в несколько раз. Измерение таких эффектов представляется существенным, потому что оно обеспечит проверку современной теории слабых взаимодействий с точностью до $\sim 1\,\%$, свободную от каких-либо предположений о свойствах ядра.

Может быть уместно подчеркнуть различие в постановке вопроса о проверке гипотезы $V-A$-взаимодействия и электродинамической аналогии Гелл-Манна—Файнмана. Последняя предсказывает численное значение эффекта «слабого магнетизма», первая устанавливает лишь форму амплитуды. Исследование распада нейтрона дает достаточную информацию для проверки обеих гипотез.

Если теория окажется подтвержденной опытом, то можно будет существенно продвинуться в понимании законов слабого взаимодействия, в частности, можно будет получить сведения об отношении постоянных взаимодействия для μ-распада и для β-распада с учетом различных поправок, происходящих от взаимодействия с полем излучения и полем π-мезонов. Этому вопросу была посвящена работа Бермана [8].

Следует подчеркнуть, что до тех пор, пока влияние упомянутых выше эффектов на β-распад не будет исследовано с достаточной подробностью теоретически, нельзя поставить вопрос о строгой проверке $V-A$-варианта теории с помощью изучения β-распада ядер.

2. Матричный элемент

Согласно теории Файнмана и Гелл-Манна гамильтониан β-распада нейтрона имеет вид произведения лептонного и нуклонного «токов». Сильные взаимодействия нуклонов могут быть учтены в матричном элементе феноменологически введением формфакторов, которые вследствие локальности лептонного взаимодействия зависят лишь от одного инварианта — квадрата передачи 4-импульса нуклона. При этом наиболее общее выражение для матричного элемента имеет вид

$$S = (2\pi)^4 i\delta(n-p-e-\nu)\left[\frac{m}{e_0}\frac{m_\nu}{\nu_0}\frac{M_p}{p_0}\frac{M_n}{n_0}\right]^{1/2} R, \tag{1}$$

$$R = \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)\left[\bar{u}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu\right]\left[\bar{u}_p(a_1\gamma_\mu+a_2\sigma_{\mu\nu}k_\nu+ia_3k_\mu+b_1\gamma_\mu\gamma_5+b_2\sigma_{\mu\nu}\gamma_5k_\nu+ib_3\gamma_5k_\mu)u_n\right].$$

Здесь n и p—4-импульсы нейтрона и протона, ν и e—4-импульсы антинейтрино и электрона, a_i и b_i — произвольные функции квадрата передачи импульса $k=p-n$, $p_0=-ip_4$, $n_0=-in_4$ и т. д., а $\sigma_{\mu\nu}=(1/2i)(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)$. Мы используем инвариантную нормировку спиноров ($\bar{u}u=+1$) и с этим связано появление множителей в (1). Отметим также, что для инвариантной нормировки спинора u_ν мы ввели массу нейтрино m_ν, которая в конечных результатах полагалась равной нулю.

Инвариантность взаимодействия относительно обращения времени приводит к соотношению

$$R_{\alpha\beta} = R_{-\beta-\alpha}, \tag{2}$$

где состояния $(-\beta)$ и $(-\alpha)$ получаются из β и α изменением знака у спинов и пространственных компонент импульсов. Условие унитарности S-матрицы в первом порядке по константе слабого взаимодействия дает

$$R_{\alpha\beta} = R^*_{\beta\alpha}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует действительность формфакторов, входящих в амплитуду (1).

Если ограничиться рассмотрением только поправок порядка m/M, то выражение (1) существенно упрощается. Это происходит по следующим причинам.

1) Если считать, что для сильных взаимодействий справедлива G-инвариантность [9, 10], то

$$a_3 = b_2 = 0. \tag{4}$$

Поскольку в наших вычислениях мы хотим принять во внимание поправки, происходящие от разности масс нейтрона и протона Δ, (4) означает, что отношения a_3/a_2 и b_2/b_3 порядка Δ/M (это подтверждается также расчетами в низшем порядке теории возмущений). Кроме того, в матричном элементе члены с b_2 и a_3 умножаются

на величины порядка Δ. Поэтому они дают лишь вклад порядка $(\Delta/M)^2$ и могут быть опущены.

2. Член с b_3 также порядка $(\Delta/M)^2$, так как в него, во-первых, входит k_μ и, во-вторых, матричный элемент от γ_5 порядка Δ/M.

3. Зависимостью формфакторов от k^2 в рассматриваемом нами случае можно пренебречь (см. [7]). Это связано с тем, что разложение формфакторов в ряд по k^2 (например, для a_1) имеет вид $a_1(k^2) = 1 - {}^1\!/_6 r^2 k^2 + \ldots$ Здесь r характеризует размеры нуклона и соответствующая поправка более высокого порядка, чем Δ/M.

4. Таким образом, в приближении, учитывающем только линейные члены по Δ/M, в матричном элементе остается лишь один дополнительный член, обусловленный сильными взаимодействиями (a_2). В соответствии с гипотезой Файнмана и Гелл-Манна об аналогии с электродинамикой a_2 следует заменить на $-\mu_0/2M$, где μ_0 — разность аномальных магнитных моментов протона и нейтрона.

Итак, окончательное выражение для R приобретает вид

$$R = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu]\left[\bar{u}_p\left(\gamma_\mu - \frac{\mu_0}{2M}\sigma_{\mu\nu}k_\nu + \lambda\gamma_\mu\gamma_5\right)u_n\right], \quad (5)$$

где λ — отношение гамов-теллеровской и фермиевской констант.

При вычислении с помощью (5) наблюдаемых эффектов мы пользовались аппаратом ковариантной матрицы плотности [11, 12]. Матрица плотности начального состояния имеет вид

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\left(1 + i\gamma_5\gamma_\mu\xi_\mu^n\right)\Lambda_+(n). \quad (6)$$

Здесь $\Lambda_+(n) = (n_\mu\gamma_\mu + iM_n)/2iM_n$ — проецирующий оператор, а $\xi_\mu^\nu = \mathrm{Sp}\, i\gamma_5\,\gamma_\mu\rho_0$ — четырехмерный псевдовектор поляризации нейтрона, удовлетворяющий условию

$$\xi_\mu^n n_\mu = 0. \quad (7)$$

Степень поляризации определяется как $\sqrt{\xi_\mu^n\xi_\mu^n}$.

Матрица плотности конечного состояния равна

$$\rho = \rho_{\alpha\beta}^L\rho_{\alpha\beta}^N, \quad (8)$$

где

$$\rho_{\alpha\beta}^L = -\Lambda_+(e)O_\alpha\Lambda_-(\nu)\overline{O}_\beta\Lambda_+(e) \quad \rho_{\alpha\beta}^N = \Lambda_+(p)N_\alpha\rho_0\overline{N}_\beta\Lambda_+(p).$$

В этих формулах

$$\overline{O}_\beta = \gamma_4 O_\beta^+\gamma_4, \qquad \overline{N}_\beta = \gamma_4 N_\beta^+\gamma_4,$$

$$O_\alpha = \gamma_\alpha(1+\gamma_5), \qquad N_\alpha = \frac{G}{\sqrt{2}}\left(\gamma_\alpha - \frac{\mu_0}{2M}\sigma_{\alpha\varkappa k_\varkappa + \lambda\gamma_\alpha\gamma_5}\right).$$

При этом следует иметь в виду, что матрицы, входящие в $\rho_{\alpha\beta}^L$, действуют на спиновые переменные лептонов, а матрицы, входящие в $\rho_{\alpha\beta}^N$, — на спиновые переменные нуклонов. Кроме того, в выражении (8) для матрицы плотности опущен общий множитель, происходящий от матричного элемента (1). Этот множитель мы учтем в конечных выражениях.

В заключение отметим, что определение поляризации (6) отличается от обычного множителем m/E, который связан с принятой ковариантной нормировкой (в частности, при таком определении мы получим в двухкомпонентной теории для трехмерного вектора поляризации электрона не $-\beta$, а $-\mathbf{p}/m$).

3. Корреляция электрон—нейтрино

Перейдем теперь к обсуждению наблюдаемых эффектов. Вначале рассмотрим корреляцию электрон—нейтрино при распаде неполяризованного нейтрона. Для этого необходимо вычислить Spρ при $\xi_\mu^n = 0$ и плотность конечных состояний. Как уже отмечалось, в этих вычислениях мы оставляем члены $\sim \Delta/M$ и опускаем члены более высокого порядка. Выражение для статистического веса имеет в рассматриваемом приближении следующий вид:

$$\frac{2}{(2\pi)^5}\left(1+\frac{3(E-p\cos\theta)-\Delta}{M}\right)pE(E_0-E)^2 dE\,d\Omega. \tag{9}$$

Здесь $d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta$, θ — угол между направлениями вылета электрона и нейтрино, E и p — полная энергия и импульс электрона, а E_0 — максимальная энергия электрона, в рассматриваемом приближении равная

$$E_0 = \frac{\Delta - (\Delta^2 - m^2)}{2M}.$$

Вычисления выражения для корреляции электрон—нейтрино весьма громоздки и мы приведем лишь окончательный результат

$$dW(E,\cos\theta) = A(E)\left(1+\beta a(E)\cos\theta + \beta^2 b(E)\cos^2\theta\right) dE\,d\Omega, \tag{10}$$

где β-скорость электрона,

$$A(E) = \frac{2G^2}{(2\pi)^4}pE(E_0-E)^2\left\{1+3\lambda^2+\left[3(1+3\lambda^2)+4\lambda\mu\right]\frac{E}{M} - \right.$$
$$\left. -\left[1+\lambda^2+2\lambda\mu\right]\frac{m^2}{ME} - 2\lambda(\lambda+\mu)\frac{\Delta}{M},\right\}$$

$$a(E) = \frac{1-\lambda^2}{1+3\lambda^2} + \frac{1}{(1+3\lambda^2)^2}\left\{4\lambda(1+\lambda^2)(\lambda+\mu)\frac{\Delta}{M} + \right.$$
$$\left. +(1-\lambda^2)(1+\lambda^2+2\lambda\mu)\frac{m^2}{ME} - \left[8\lambda(1+\lambda^2)\mu + 3(1+6\lambda^2+9\lambda^4)\right]\frac{E}{M}\right\},$$

$$b(E) = 3\,\frac{\lambda^2-1}{1+3\lambda^2}\,\frac{E}{M},$$

а μ — разность полных магнитных моментов протона и нейтрона. Как видно из приведенных формул, поправки $\sim\Delta/M$ происходят как от «слабого магнетизма», так и от учета отдачи протона. Интересно отметить появление члена с $\cos^2\theta$, который

Таблица 1

Поправки к $(e—\nu)$-корреляции в %

Полная энергия электрона, MeV	От учета «слабого магнетизма»	От учета отдачи
0,71	0,4	1,9
0,91	1,4	2,7
1,11	2,4	3,5
1,20	3,3	4,2

отсутствует в обычных формулах для $(e-\nu)$-корреляции и появляется вследствие учета отдачи. Величины поправок к основному эффекту приведены в табл. 1. Видно, что поправки достигают нескольких процентов. Частично это связано с тем, что член $(1-\lambda^2)$ в основном эффекте достаточно мал вследствие близости λ к единице $(\lambda = 1,2)$.

4. Спектр электронов и вероятность распада

Интегрируя (10) по углу между электроном и нейтрино, получаем следующее выражение для спектра электронов:

$$dW(E) = 4(2\pi)^{-3}G^2pE(E_0-E)^2\left\{1+3\lambda^2-\frac{2\lambda(\lambda+\mu)\Delta}{M}+\right.$$
$$\left.+\frac{2(5\lambda^2+2\lambda\mu+1)E}{M}-\frac{2\lambda(\mu+\lambda)m^2}{ME}\right\}dE. \tag{11}$$

Поправки к спектру оказываются малыми (основной эффект определяется членом $1+3\lambda^2$) и достигают нескольких десятых процента. Например, при энергиях электрона 0,91, 1,11 и 1,29 MeV суммарные поправки равны соответственно 0,3, 0,4 и 0,6 %.

Из (11) получаем следующее выражение для полной вероятности распада:

$$W = \frac{4G^2}{(2\pi)^3}\left\{\frac{m^4}{4}\ln\frac{E_0+\sqrt{E_0^2-m^2}}{m}\left[\left(1+3\lambda^2-2\lambda(\lambda+\mu)\frac{\Delta}{M}\right)E_0-\right.\right.$$
$$-\frac{1}{2}(1+3\lambda^2)\frac{m^2}{M}-(1+\lambda^2-2\lambda\mu)\left.\frac{E_0^2}{M}\right]+\sqrt{E_0^2-m^2}\left[(5\lambda^2+1+2\lambda\mu)\frac{E_0^5}{30M}+\right.$$
$$+\frac{1}{5}\left(1+3\lambda^2-2\lambda(\lambda+\mu)\frac{\Delta}{M}\right)\left(\frac{1}{6}E_0^4-\frac{3}{4}m^2E_0^2-\frac{2}{3}m^4\right)-$$
$$\left.\left.-\left(\frac{3}{10}\lambda\mu+\frac{1}{15}+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\frac{m^2E_0^3}{M}+\left(\frac{23}{24}\lambda^2+\frac{49}{120}-\frac{4}{15}\lambda\mu\right)\frac{m^4E_0}{M}\right]\right\}. \tag{12}$$

Поправка к вероятности мала и составляет $\sim 0{,}2$ %.

5. Асимметрия и поляризация электронов

Рассмотрим теперь асимметрию вылета электронов при распаде поляризованного нейтрона. В результате не сложных, но длинных выкладок можно получить приведенную ниже формулу для углового распределения электронов

$$dW(E,\cos\theta_e) = \frac{1}{4\pi}\to(\text{спектр})\to[1+P\beta c(E)\cos\theta_e]\,d\Omega_e, \tag{13}$$

где

$$c(E)=\frac{2\lambda(1-\lambda)}{1+3\lambda^2}+\frac{2(\lambda+\mu)}{(1+3\lambda^2)^2}\left[(3\lambda^2+2\lambda-1)\frac{\Delta}{3M}-(3\lambda^3+9\lambda^2+5\lambda-1)\frac{E}{3M}-2\lambda^2(\lambda-1)\frac{m^2}{ME}\right],$$

P — степень поляризации нейтрона, а θ_e — угол между направлением поляризации нейтрона и импульсом электрона. Из табл. 2 видно, что поправки к асимметрии электронов достигают нескольких процентов, что, как и в случае корреляции электрон—нейтрино, частично связано с малостью основного эффекта (множитель $\lambda(\lambda-1)$).

Таблица 2

Поправки к асимметрии электронов в %

Полная энергия электрона, MeV	От учета «слабого магнетизма»	От учета отдачи
0,71	1,3	0,3
0,91	1,8	0,5
1,11	2,4	0,6
1,29	3,0	0,8

Отметим, что поправки к асимметрии нейтрино, где основной эффект велик, оказываются малыми. В заключение приведем подсчитанное с помощью амплитуды (5) выражение для поляризации электрона P_e (при обычной нормировке):

$$P_e = -\beta\left(1 + 2\lambda\frac{\lambda+\mu}{1+3\lambda^2}\,\frac{m^2}{ME}\right). \tag{14}$$

Поправки к поляризации малы и при энергиях 0,71, 0,91 и 1,11 MeV составляют соответственно 0,14, 0,08 и 0,07 %.

Отметим, наконец, что, как показывают вычисления, радиационные поправки хотя и изменяют эффективное значение постоянной β-распада, практически не влияют на рассматриваемые нами эффекты.

Авторы благодарны проф. В. Телегди за обсуждение результатов этой работы.

Литература

1. *Sudarshan E. C. G., Marshak R. E.* Phys. Rev., **109**, 1860, 1958.
2. *Feynman R. P., Gell-Mann M.* Phys. Rev., **109**, 193, 1958.
3. Proceedings of 1958 Annual International Conference on High Energy Physics at CERN.
4. *Gell-Mann M.* Phys. Rev., **111**, 362. 1958.
5. *Bernstein J., Lewis R. R.* Phys. Rev., **112**, 232, 1958.
6. *Morita M.* Bull. Am. Phys. Soc., **4**, 230, D11, 1959.
7. *Goldberger M. L., Treiman S. B.* Phys. Rev., **111**, 354, 1958.
8. *Berman S. M.* Phys. Rev., **112**, 267, 1958.
9. *Lee T. D., Yang C. N.* Nuovo Cim., **3**, 749, 1956.
10. *Weinberg S.* Phys. Rev., **112**, 1375, 1958.
11. *Michel L., Wightman A. S.* Phys. Rev., **98**, 1190, 1955.
12. *Биленький С. М., Рындин Р. М.* ЖЭТФ, 36, **1609**, 1959.

8 Зак. 198

К статье С. М. Биленького, Р. М. Рындина, Я. А. Смородинского и Хэ Цзо-сю «К теории β-распада нейтрона»

В работе Вайнберга [1] доказана теорема, из которой следует, что полная вероятность процесса типа $\alpha \to \beta + l + \bar{\nu}$ (α и β — произвольные сильно взаимодействующие частицы, l — лептон) не содержит VA-интерференции. Легко видеть, что выражение (12) для полной вероятности распада нейтрона, приведенное в нашей работе [2], удовлетворяет этому требованию, а зависимость от первой степени λ является кажущейся. Действительно, в рассматриваемом нами приближении $E_0/M = \Delta/M$ и выражение (12) может быть переписано в следующем виде:

$$W = \frac{G^2}{(2\pi)^3}(1+3\lambda^2)\left\{ m^4\left(E_0 - \frac{m^2+2E_0^2}{2M}\right)\ln\frac{E_0+\sqrt{E_0^2-m^2}}{m} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{15}\sqrt{E_0^2-m^2}\left[E_0^4 - \frac{9}{2}E_0^2m^2 - 4m^4 + \frac{E_0}{M}\left(E_0^4 - 2E_0^2m^2 + \frac{49}{4}m^4\right)\right]\right\}.$$

Мы благодарны проф. Дж. Бернстайну, обратившему наше внимание на работу Вайнберга.

Литература

1. *Weinberg S.* Phys. Rev., **115**, 481, 1959.
2. *Биленький С. М., Рындин Р. М., Смородинский Я. А., Хэ Цзо-сю.* ЖЭТФ, **37**, 1758, 1959.

Ковариантное разложение электромагнитного поля

В. Л. Любошиц, Я. А. Смородинский

1. Введение

В нерелятивистской квантовой механике широко используются разложения амплитуд процессов по шаровым функциям — неприводимым представлениям трехмерной группы вращений. Однако обобщение этого разложения на релятивистский случай, вернее ковариантная форма такого разложения, обычно не рассматривается. Для того чтобы найти такую форму, надо использовать известные в литературе неприводимые представления группы Лоренца. В ряде работ, например в работах Ю. Широкова [1], Чжоу Гуан-чжао и М. И. Широкова [2], Долгинова [3], аппарат неприводимых представлений группы Лоренца применяется к ковариантному описанию релятивистских систем. Методы, развитые в этих работах, с успехом использовались авторами для получения общих формул. Однако эти формулы либо не являются непосредственным обобщением нерелятивистских, либо же используют не вполне ковариантную запись.

Нам кажется полезным привести другой вариант ковариантных разложений, который непосредственно обобщает нерелятивистские формулы. В этой работе мы ограничимся ковариантным разложением свободного электромагнитного поля. При этом мы рассмотрим две задачи: а) разложение излучения по электрическим и магнитным мультиполям; б) разложение источников поля (тока) по мультипольным моментам. Кроме того, мы кратко изложим и свойства ковариантной поляризации фотонов (рассмотренные несколько иначе в работах Мишеля и Руханинежад [4, 5]). Аналогичные разложения могут быть полезны для описания β-распада и других процессов.

Для вывода формул фактически используется аппарат неприводимых тензоров группы Лоренца, в то время как в большинстве работ авторы пользуются аппаратом бесконечно малых поворотов. При этом оказывается очень полезным понятие малой группы Лоренца (little groupe, ср. [6–8, 4]). В книге Гельфанда и др. [9] она называется стационарной подгруппой.

Малой группой L_q, связанной с вектором q (который мы будем считать всегда либо времениподобным, либо лежащим на световом конусе) [1], называется подгруппа несобственных преобразований Лоренца, оставляющая неподвижным 4-вектор q (по величине и направлению). По представлению L_q преобразуется, например, любой пространственноподобный 4-вектор, ортогональный q. Примером такого вектора является, очевидно, спин частицы (ср. [5, 7]). Векторы (и тензоры), ортогональные заданному времениподобному вектору, и будут использованы в дальнейшем.

---

[1] Ненужный нам здесь случай пространственно-подобного вектора рассмотрен в работе Ю. Широкова [10] с точки зрения представления неоднородной группы. Этот случай может оказаться полезным при рассмотрении более сложных диаграмм (например, комптон-эффекта).

Из сказанного ясно, что малая группа L_q, если q времениподобный вектор, изоморфна группе сферической симметрии.

Если масса частицы равна нулю (например, фотон), то обычно указывают, что в этом случае надо изменить определение спина фотона, так как не существует системы покоя. В действительности положение скорее обратное: из-за градиентной инвариантности волновая функция фотона может быть сделана ортогональной любому времениподобному вектору (см. [11]), а поэтому в этом случае все системы отсчета просто эквивалентны. Конкретный выбор системы отсчета при этом определяется удобством вычислений. Например, при мультипольном разложении в качестве вектора, определяющего систему отсчета, следует выбрать 4-импульс центра инерции фотона и излучателя, так как равномерное движение системы не влияет на свойства излучения.

Отметим, что если импульс k лежит на световом конусе (масса покоя равна нулю), то малая группа L_k становится изоморфной пространственной группе двухатомной молекулы, состоящей из двумерных поворотов в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$, и отражений в плоскостях, проходящих через $\mathbf{k}$. Это приводит к тому, что поляризацию частицы с нулевой массой покоя и любым конечным спином можно характеризовать с помощью скаляра (интенсивности), псевдоскаляра и плоского вектора (ср. работу Мишеля [4]). Полный момент частицы с нулевой массой аналогичен (в смысле закона преобразования) моменту импульса двухатомной молекулы, причем спину частицы соответствует квантовое число Λ — значение проекции момента импульса на ось молекулы.

2. Ковариантные параметры Стокса

Комплексный 4-вектор поляризации фотона удовлетворяет условию нормировки

$$ee^* = \mathbf{e}\mathbf{e}^* - e_0 e_0 = 1 \tag{1}$$

и четырехмерному условию поперечности

$$ek = 0. \tag{2}$$

Градиентная инвариантность позволяет наложить на вектор e условие

$$eP = 0, \tag{3}$$

где P — некоторый 4-импульс. Тогда в системе координат, где $\mathbf{P} = 0$, соотношения (2) и (3) приводят к трехмерному условию поперечности

$$\mathbf{e}\mathbf{k} = 0. \tag{4}$$

4-вектор e, удовлетворяющий (1) и (2), можно задать двумя скалярами $e\chi^{(1)}$ и $e\chi^{(2)}$ по формуле

$$e = (e\chi^{(1)})\chi^{(1)} + (e\chi^{(2)})\chi^{(2)}, \tag{5}$$

где $\chi^{(1)}$ и $\chi^{(2)}$ — два единичных 4-вектора, удовлетворяющих соотношениям (3) и (2). Эти векторы удобно строить из импульсов других частиц, участвующих в рассматриваемом процессе.

Потребуем, чтобы трехмерное условие поперечности (4) выполнялось в любой системе координат. Для этого под вектором P будем понимать импульс, определяющий систему координат (например, полный импульс системы). Ясно, что такое обобщение условия (3) может иметь смысл только вследствие градиентной инвариантности. Градиентная инвариантность позволяет изменить вид преобразования

Лоренца для фотона. Будем считать, что при переходе в другую систему отсчета вектор поляризации электромагнитного поля преобразуется с помощью градиентного преобразования и обычного преобразования Лоренца так, чтобы в новой системе координат сохранилось условие (4). Таким образом, вектор e преобразуется по формуле

$$e' = G(P')L(P')e, \tag{6}$$

где $L(P')$ — матрица преобразования Лоренца для 4-вектора, а

$$G(P')e = e - \frac{k(eP')}{kP'}. \tag{7}$$

Заметим, что градиентное преобразование (7) не меняет ни четырехмерного условия поперечности, ни нормировки. В дальнейшем преобразование (6) мы и будем называть преобразованием Лоренца для 4-вектора потенциала фотона[2)].

Частично поляризованный пучок задается с помощью двухрядной матрицы плотности фотона

$$\rho^{(ik)} = \overline{\left(e\chi^{(i)}\right)\left(e^*\chi^{(k)}\right)} \quad (i, k = 1, 2) \tag{8}$$

или параметров Стокса

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \mathrm{Sp}\sigma_1\rho, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \varepsilon_2 &= \mathrm{Sp}\sigma_2\rho, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \\ \varepsilon_3 &= \mathrm{Sp}\sigma_3\rho, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

При переходе к новым базисным векторам $\chi^{(1)'}$ и $\chi^{(2)'} (\chi^{(1)'}\chi^{(2)'} = 0)$, что отвечает лоренцовскому преобразованию, матрица плотности преобразуется по формуле

$$\rho' = U\rho U^+; \tag{10}$$

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}; \tag{11}$$

$$\alpha = \chi^{(1)'}\chi^{(1)} = -\chi^{(2)'}\chi^{(2)}, \quad \beta = \chi^{(1)'}\chi^{(2)} = \chi^{(2)'}\chi^{(1)}. \tag{12}$$

Матрицы U осуществляют гомоморфное отображение собственной группы Лоренца на группу двумерных вращений, причем любому чистому преобразованию Лоренца вдоль импульса k сопоставляется единичная матрица.

Представление (11) можно рассматривать как представление собственной малой группы L'_k. Инвариантами преобразования (11) являются степень круговой поляризации ε_2 и степень линейной поляризации $r = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2}$. Представление собственной группы L'_k вида (11) приводимо и распадается на одномерные представления. В данном случае базисом одномерных представлений являются состояния с полной правой и полной левой круговыми поляризациями.

Относительно несобственной группы Лоренца 4-вектор e преобразуется по двумерному неприводимому представлению несобственной малой группы L_k, изоморфной пространственной группе двухатомной молекулы, причем ε_2 ведет себя как псевдоскаляр.

[2)] Аналогичное обобщение преобразований Лоренца встречалось по существу еще в старой работе Гейзенберга и Паули [12].

Заметим для полноты, что параметры Стокса просто связаны со спиновой поляризацией и квадруполяризацией фотона. Для частицы с массой покоя, равной нулю [7], спин определяется с помощью 4-вектора $\Gamma = \varepsilon_2 k$, где ε_2 — псевдоскаляр. В случае фотона ε_2 — степень круговой поляризации.

Трехмерный вектор спина в любой системе координат определим следующим образом:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{n}\Gamma_0}{k_{\;0}} = \varepsilon_2 \mathbf{n} = i[\mathbf{e}\mathbf{e}^*], \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}_0}. \tag{13}$$

Для тензора квадруполяризации (оси x, y, z направлены соответственно вдоль $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$) будем иметь

$$\frac{1}{2}\langle S_\alpha S_\beta + S_\beta S_\alpha \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\varepsilon_3) & \frac{1}{2}\varepsilon_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1 & \frac{1}{2}(1+\varepsilon_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{14}$$

Квадруполяризация фотона связана только с линейной поляризацией.

3. Ковариантное разложение поля фотона на электрические и магнитные мультиполи

В трехмерных обозначениях электрические и магнитные мультиполи выражаются через сферические функции $Y_{LM}(\mathbf{n})$ следующим образом [13] ($\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{LM}(\mathbf{k}) &= L^{-1/2}(L+1)^{-1/2}|\mathbf{k}|\nabla_{\mathbf{k}} Y_{LM}(\mathbf{n}), \\ \mathbf{M}_{LM}(\mathbf{k}) &= L^{-1/2}(L+1)^{-1/2} i[\mathbf{k}\nabla_k] Y_{LM}(\mathbf{n}). \end{aligned} \tag{15}$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{k}\mathbf{E}_{LM}(\mathbf{k}) = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{M}_{LM}(\mathbf{k}) = 0, \quad \nabla_k \mathbf{M}_{LM}(\mathbf{k}) = 0, \quad \mathbf{E}_{LM}(\mathbf{k})\mathbf{M}_{LM}(\mathbf{k}) = 0 \tag{16}$$

и условиям ортогональности

$$\begin{aligned} &\int \mathbf{E}_{LM}(\mathbf{k})\mathbf{E}^*{}_{L'M'}(\mathbf{k})\, d\Omega_{\mathbf{k}} = \delta_{LL'}\delta_{MM'}, \\ &\int \mathbf{M}_{LM}(\mathbf{k})\mathbf{M}^*{}_{L'M'}(\mathbf{k})\, d\Omega_{\mathbf{k}} = \delta_{LL'}\delta_{MM'}, \\ &\int \mathbf{E}_{LM}(\mathbf{k})\mathbf{M}^*{}_{L'M'}(\mathbf{k})\, d\Omega_{\mathbf{k}} = 0. \end{aligned} \tag{16a}$$

Сначала рассмотрим релятивистские функции, переходящие в нормированные сферические функции в системе, где $\mathbf{P} = 0$ (P — полный 4-импульс системы фотон + излучатель). Чтобы найти явный вид таких релятивистских сферических функций, введем 4-вектор n, удовлетворяющий условиям

$$n^2 = 1, \quad nP = 0. \tag{17}$$

Его можно однозначно построить из импульса фотона k ($k^2 = 0$) и P:

$$n = -\left(\frac{\sqrt{-P^2}}{kP}\right)\left(k - \frac{(Pk)P}{P^2}\right). \tag{18}$$

При этом $nk = -(kP)/\sqrt{-P^2}$ и в системе центра инерции

$$n = \left\{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}_0},\ 0\right\}.$$

С помощью 4-вектора n построим симметричный тензор L-го ранга $T^{(L)}_{ik\ldots lm}$, удовлетворяющий условиям (везде $T_iP_i = \mathbf{TP} - T_0P_0$)

$$T_{ik\ldots lm}P_i = 0, \quad T_{ii\ldots lm} = 0. \tag{19}$$

Этот тензор при преобразованиях Лоренца, очевидно, преобразуется по представлению малой группы L_p и имеет вид

$$T^{(L)}_{ik\ldots lm} = \frac{(2L-1)!!}{\sqrt{(2L)!}}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\left\{n_in_k\ldots n_ln_m - \frac{1}{2L-1}\left(\delta_{ik} - \frac{P_iP_k}{P^2}\right)\ldots n_ln_m - \right.$$
$$\left. - \ldots - \frac{1}{2L-1}n_in_k\ldots\left(\delta_{lm} - \frac{P_lP_m}{P^2}\right) + \ldots\right\}.$$

От тензора $T^{(L)}_{ik\ldots lm}$ перейдем к релятивистскому спинору с L пунктирными и L непунктирными индексами [9]:

$$Z_{s_1s_2\ldots s_L\dot r_1\dot r_2\ldots\dot r_L} = \left(\prod_{i=1}^{L}\sigma_{\mu_i;\,s_i\dot r_i}\right)T^{(L)}_{\mu_1\mu_2\ldots m_L}, \tag{20}$$

где $\sigma_{\mu_i;\,s_i\dot r_i} = (\sigma_{\mu_i})_{s_i\dot r_i}$ — матрицы Паули при $\mu_i = 1,2,3$; $(-\sigma_0)$ есть единичная матрица.

Относительно преобразований группы вращений спиноры с нижними непунктирными и верхними пунктирными индексами ведут себя одинаково. Легко видеть, что в системе центра инерции, где все временные компоненты тензора $T^{(L)}_{ik\ldots l}$ равны нулю, спинор $Z^{\dot r_1\dot r_2\ldots\dot r_L}_{s_1s_2\ldots s_L}$ переходит в полностью симметричный спинор $2L$-го ранга. В дальнейшем для краткости мы будем обозначать такой спинор Z_L.

Спинору Z_L поставим в соответствие функцию

$$Y^{(i)}_{LM}(n) = (-1)^{L-M}\sqrt{\frac{(2L)!}{(L+M)!(L-M)!}}\,Z_L. \tag{21}$$

Переставив пунктирные и непунктирные индексы у спинора Z_L, запишем

$$\widetilde{Y}^{(i)}_{LM}(n) = (-1)^{L}\sqrt{\frac{(2L)!}{(L+M)!(L-M)!}}\,\widetilde{Z}_L. \tag{22}$$

Здесь $L+M$ — число индексов, равных 1, $L-M$ — число индексов, равных 2. Индекс i нумерует функции, соответствующие одинаковым L и M и отличающиеся друг от друга распределением между пунктирными и непунктирными индексами значений 1 и 2. Число таких функций для заданных L и M равно $L-|M|+1$.

В системе, где $\mathbf{P} = 0$, функции $Y^{(i)}_{LM}(n)$ для всех i равны друг другу:

$$Y^{(i)}_{LM}(n) = Y_{LM}(\mathbf{n}), \quad \widetilde{Y}^{(i)}_{LM}(n) = Y^*_{LM}(\mathbf{n}),$$

где $Y_{LM}(\mathbf{n})$ — обычные сферические функции. Приведем величины тензора $T^{(L)}_{ik\ldots lm}$ для первых значений L [3]:

$$L \;=\; 0 \qquad 1 \qquad 2$$

$$T^{(L)}_{ik\ldots lm} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, n_i \quad \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\left\{n_i n_k - \frac{1}{3}\left(\delta_{ik} - \frac{P_i P_k}{P^2}\right)\right\}.$$

Соответствующие значения функций $Y^{(i)}_{LM}(n)$ приведены в таблице.

Перейдем теперь к разложению свободного электромагнитного поля на мультиполи. В k-пространстве на гиперповерхости $k^2 = 0$ определим электрический мультиполь условиями

$$k_m E^{(i)}_{mLM}(k) = 0, \quad P_m E^{(i)}_{mLM}(k) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, 4), \tag{23}$$

а магнитный

$$k_m M^{(i)}_{mLM}(k) = 0, \quad P_m M^{(i)}_{mLM}(k) = 0 \quad \frac{\partial M^{(i)}_{mLM}(k)}{\partial k_m} = 0. \tag{23a}$$

При этом

$$\frac{\partial M_m}{\partial k_m} = \nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{M} + \frac{\partial M_0}{\partial k_0}, \quad E^{(i)}_{mLM}(k) M^{(i)}_{mLM}(k) = 0. \tag{24}$$

Заметим, что тензоры $T^{(L)}$, рассмотренные выше, удовлетворяют соотношению $k_m \partial T^{(L)}/\partial k_m = 0$, поскольку $\partial n_s/\partial k_m = \delta_{ms}/kP - P_m k_s/(kP)^2$ и $k_m \partial n_s/\partial k_m = 0$. Учитывая это и используя условия (23), (23a) и (24), можно с помощью релятивистских функций (21) получить для ковариантных мультиполей выражения

$$E^{(i)}_{mLM}(k) = L^{-1/2}(L+1)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{-P^2}}\left[k_m\left(P_n \frac{\partial}{\partial k_n}\right) - (kP)\frac{\partial}{\partial k_m}\right] Y^{(i)}_{LM}(n), \tag{25}$$

$$M^{(i)}_{mLM}(k) = \frac{1}{i\sqrt{-P^2}} L^{-1/2}(L+1)^{-1/2} \varepsilon_{mlst} k_l \left(\frac{\partial}{\partial k_s} Y^{(i)}_{LM}(n)\right) P_t. \tag{26}$$

Формулы (25) и (26) в системе $\mathbf{P} = 0$ переходят в (15) (везде $\varepsilon_{1230} = 1$).

Разложение по мультиполям компоненты Фурье электромагнитного поля

$$A_m(x) = \int A_m(k) e^{ikx} \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|} + \text{к. с.}$$

будет иметь вид

$$A_m(k) = \sum_{LMi} e^{(i)}_{LM} E^{(i)}_{mLM}(k) + \sum_{LMi} m^{(i)}_{LM} M^{(i)}_{mLM}(k) \tag{27}$$

или, возвращаясь к спинору Z_L, получим

[3] Пространственноподобные функции $Z(\alpha,\theta,\varphi)$, введенные Долгиновым [3] (α,θ,φ — углы вектора n в четырехмерном пространстве), в системе, где $\mathbf{P} = 0$, не переходят в сферические функции с определенным L, так как в общем случае им соответствует тензор, не ортогональный никакому постоянному вектору P. Следует отметить, что соответствие между функциями Долгинова и функциями (21) имеет место только для $L = 1$, когда они совпадают с точностью до множителя.

$$A_m(k) = \sum_{L=1}^{\infty} e_L \frac{1}{\sqrt{-P^2}} L^{-1/2}(L+1)^{-1/2}\left[k_m\left(P_n \frac{\partial}{\partial k_n}\right) - (kP)\frac{\partial}{\partial k_m}\right] Z_L + \\ + \sum_{L=1}^{\infty} m_L \frac{1}{\sqrt{-P^2}} \frac{1}{i} L^{-1/2}(L+1)^{-1/2} \varepsilon_{mlst} k_l \left(\frac{\partial}{\partial k_s} Z_L\right) P_t. \quad (28)$$

Здесь e_L, m_L — спиноры с L пунктирными и L непунктирными индексами, по которым свернуты соответственно произведения $e_L Z_L$ и $m_L Z_L$. Величины $e^{(i)}_{LM}$, $m^{(i)}_{LM}$ в (27) преобразуются как компоненты спиноров e_L, m_L. В системе центра инерции они равны для всех i при одинаковых L и M.

Таблица 1

Значения функций $Y^{(i)}_{LM}(n)$

M	L		
	0	1	2
0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$Y^{(1)}_{10} = -\sqrt{2} Z_2^{\dot 1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}(n_z - n_0)$ $Y^{(2)}_{10} = -\sqrt{2} Z_1^{\dot 2} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}(n_z + n_0)$	$Y^{(1)}_{20} = \sqrt{6} Z_{22}^{\dot 1 \dot 1} = -\sqrt{\frac{45}{16\pi}}\left\{n_x^2 + n_y^2 - \frac{2}{3} - 2n_0 n_z + \frac{1}{3p^2}(p_x^2 + p_y^2 - 2p_0 p_z)\right\}$ $Y^{(2)}_{20} = \sqrt{6} Z_{21}^{\dot 1 \dot 2} = -\sqrt{\frac{45}{16\pi}}\left\{n_x^2 + n_y^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3p^2}(p_x^2 + p_y^2)\right\}$ $Y^{(3)}_{20} = \sqrt{6} Z_{11}^{\dot 2 \dot 2} = -\sqrt{\frac{45}{16\pi}}\left\{n_x^2 + n_y^2 - \frac{2}{3} + 2n_0 n_z + \frac{1}{3p^2}(p_x^2 + p_y^2 + 2p_0 p_z)\right\}$
1		$Y^{(1)}_{11} = Z_1^{\dot 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(n_x + i n_y)$	$Y^{(1)}_{21} = -2 Z_{12}^{\dot 1 \dot 1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\left\{n_z n_x + i n_z n_y - n_0 n_x - i n_0 n_y - \frac{1}{3p^2}(p_z p_x + i p_z p_y - p_0 p_x - i p_0 p_y)\right\}$ $Y^{(2)}_{21} = -2 Z_{11}^{\dot 1 \dot 2} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\left\{n_z n_x + i n_z n_y + n_0 n_x + i n_0 n_y + \frac{1}{3p^2}(p_z p_x + i p_z p_y + p_0 p_x + i p_0 p_y)\right\}$
−1		$Y^{(1)}_{1-1} = Z_2^{\dot 2} = -Y^{(1)*}_{11}$	$Y^{(1)}_{2-1} = -2 Z_{22}^{\dot 1 \dot 2} = -Y^{(1)*}_{21}$ $Y^{(2)}_{2-1} = -2 Z_{12}^{\dot 2 \dot 2} = -Y^{(2)*}_{21}$
2			$Y^{(1)}_{22} = Z_{11}^{\dot 1 \dot 1} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\left\{n_x^2 - n_y^2 - 2i n_x n_y + \frac{1}{3p^2}(p_x^2 - p_y^2 - 2i p_x p_y)\right\}$
−2			$Y^{(1)}_{2-2} = Z_{22}^{\dot 2 \dot 2} = Y^{(1)*}_{22}$

4. Ковариантное разложение тока заряженных частиц по мультипольным моментам

Для классической системы зарядов плотность тока $j_k(\mathbf{x}, t)$, определяется формулой [14]

$$j_k(\mathbf{x}, t) = \sum_i e_{(i)} v_{(i)k} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(i)}(t)), \tag{29}$$

$$\frac{\partial j_k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} = 0. \tag{29a}$$

Здесь $\mathbf{x}_{(i)}(t)$ — траектория j-го заряда, $v_{(i)} = \{\mathbf{v}_{(i)}, 1\}$. Обозначим через P 4-вектор энергии-импульса системы зарядов и рассмотрим сначала задачу в системе, для которой $\mathbf{P} = 0$.

Перейдем на время к трехмерным обозначениям (удобным ввиду видимой несимметрии (29) относительно координат и времени). Обозначим координаты центра инерции через $\mathbf{x}_c$. Тогда

$$\mathbf{x}_{(i)}(t) = \mathbf{x}_c + \boldsymbol{\xi}_{(i)}(t). \tag{30}$$

В системе $\mathbf{P} = 0$, очевидно, $\mathbf{x}_c$ не зависит от t и можно положить $\mathbf{x}_c = 0$. Разлагая (29) по степеням $\xi_{(i)}$, можно формально записать

$$j_k(\mathbf{x}, t) = \sum_i e_{(i)} \dot{\xi}_{(i)k} \exp\left[-(\boldsymbol{\xi}_{(i)} \nabla)\right] \delta^3(\mathbf{x}) \tag{31}$$

или в компонентах ($\dot{\boldsymbol{\xi}}_{(i)} = \partial \boldsymbol{\xi}_{(i)}/\partial t$)

$$\mathbf{j} = \sum_i \left\{ \dots + e_{(i)} \dot{\boldsymbol{\xi}}_{(i)} - e_{(i)} \dot{\boldsymbol{\xi}}_{(i)} (\boldsymbol{\xi}_{(i)} \nabla) + \dots \right\} \delta^3(\mathbf{x}), \tag{32}$$

$$\rho = \sum_i \left\{ e_{(i)} - e_{(i)} (\boldsymbol{\xi}_{(i)} \nabla) + \frac{1}{2} e_{(i)} (\boldsymbol{\xi}_{(i)} \nabla)^2 - \dots \right\} \delta^3(\mathbf{x}). \tag{33}$$

В этих формулах друг под другом расположены члены, которые совместно удовлетворяют условию (29а) — в этом смысле их можно называть членами одного порядка. Обозначим

$$\sum_i e_{(i)} = Z, \quad \sum_i e_{(i)} \xi_{(i)\alpha} = Q^{(1)}_\alpha(t), \quad \frac{1}{2} \sum_i e_{(i)} \xi_{(i)\alpha} \xi_{(i)\beta} = Q^{(2)}_{\alpha\beta}(t)$$

и вообще

$$\sum_i \frac{1}{L!} \xi_{(i)\alpha} \xi_{(i)\beta} \dots \xi_{(i)\gamma} = Q^{(L)}_{\alpha\beta\dots\gamma}(t). \tag{34}$$

В этих обозначениях разложение плотности заряда записывается просто в виде

$$\rho = \sum_L (-1)^L Q^{(L)} \nabla^L \delta^3(\mathbf{x}), \tag{35}$$

где ∇^L обозначает тензор $\underbrace{\nabla_\alpha \nabla_\beta \dots}_{L \text{ раз}}$; он свернут с тензором $Q^{(L)}$.

Формула (35) есть разложение плотности заряда по мультипольным моментам.

В выражении для тока (32) первое слагаемое приводит, очевидно, к производной от дипольного момента. Во втором слагаемом выделим симметричную и антисимметричную части. Симметричная часть $1/2(\dot{\boldsymbol\xi}(\boldsymbol\xi\nabla)+\boldsymbol\xi(\dot{\boldsymbol\xi}\nabla))$ вместе с квадрупольным членом в (33) удовлетворяет уравнению неразрывности. Антисимметричная часть соленоидальна и отвечает магнитному моменту, так как ее можно записать в виде — $1/2[[\boldsymbol\xi\dot{\boldsymbol\xi}]\nabla]$. (В дальнейшем мы будем опускать зарядовые множители.)

В общем случае для L-го члена в разложении (32) будем иметь

$$\mathbf{B}_L=\frac{(-1)^{L-1}}{(L-1)!}\dot{\boldsymbol\xi}(\boldsymbol\xi\nabla)^{L-1}\delta^3(\mathbf{x}). \tag{36}$$

В формуле (33) вектору $\mathbf{B}_L$ будет соответствовать скаляр

$$B_L=(-1)^L Q^{(L)}\nabla^L\delta^3(\mathbf{x}). \tag{37}$$

Симметричная часть $\mathbf{B}_L$ равна

$$\mathbf{B}_{Lc}=(-1)^{L-1}\frac{1}{L!}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol\xi(\boldsymbol\xi\nabla)^{L-1}\delta^3(\mathbf{x})=(-1)^{L-1}\frac{\partial}{\partial t}Q^{(L)}\nabla^{L-1}\delta^3(\mathbf{x}) \tag{38}$$

и удовлетворяет условию

$$\dot{B}_L+\nabla\mathbf{B}_{Lc}=0. \tag{39}$$

Антисимметричная часть

$$\mathbf{B}_{La}=(-1)^{L-1}\frac{L-1}{L!}\{\dot{\boldsymbol\xi}(\boldsymbol\xi\nabla)-\boldsymbol\xi(\dot{\boldsymbol\xi}\nabla)\}(\boldsymbol\xi\nabla)^{L-2}\delta^3(\mathbf{x}) \tag{40}$$

удовлетворяет условию

$$\nabla\mathbf{B}_{La}=0 \tag{41}$$

и связана с 2^L-польным магнитным моментом системы (после суммирования по зарядам).

Перепишем теперь (32) с учетом (38) и (40) $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$

$$j_\alpha=\Bigg\{\sum_{L=1}^{\infty}(-1)^{L-1}\frac{\partial}{\partial t}Q^{(L)}_{\alpha\beta\gamma\ldots}\underbrace{\nabla_\beta\nabla_\gamma\ldots}_{L-1}+$$
$$+\sum_{L=2}^{\infty}\sum_i\frac{L-1}{L!}e_{(i)}(\boldsymbol\xi_{(i)}\nabla)^{L-2}(-1)^L[[\dot{\boldsymbol\xi}_{(i)}\boldsymbol\xi_{(i)}]\nabla]_\alpha\Bigg\}\delta^3(\mathbf{x}). \tag{42}$$

Соотношения (35) и (42) можно записать вместе следующим образом:

$$\rho=-\operatorname{div}\mathbf{N},\quad \mathbf{j}=\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial t}+\operatorname{rot}\mathbf{M}, \tag{43}$$

где

$$N_\alpha=\Bigg\{\sum_{L=1}^{\infty}(-1)^{L-1}Q^{(L)}_{\alpha\beta\gamma\ldots\delta}\nabla_\beta\nabla_\gamma\ldots\nabla_\delta\Bigg\}\delta^3(\mathbf{x}),$$
$$M_\alpha=\Bigg\{\sum_{L=1}^{\infty}(-1)^{L-1}M^{(L)}_{\alpha\beta\gamma\ldots\delta}\nabla_\beta\nabla_\gamma\ldots\nabla_\delta\Bigg\}\delta^3(\mathbf{x}). \tag{44}$$

Здесь

$$M^{(L)}_{\alpha\beta\gamma\ldots\delta}=\sum_i\frac{L}{(L+1)!}e_{(i)}\xi_{(i)\beta}\xi_{(i)\gamma}\ldots\xi_{(i)\delta}[\dot{\boldsymbol\xi}\boldsymbol\xi]_\alpha; \tag{45}$$

N соответствует электрической, а $\mathbf{M}$ — магнитной частям тока.

Чтобы записать разложение (32), (33) в релятивистском виде, сопоставим мультипольным моментам симметричные четырехмерные тензоры, ортогональные P, подобно тому, как это делалось в разделе 3. Эти тензоры должны удовлетворять соотношениям[4)]

$$Q^{(L)}_{mn\ldots l}P_m = 0, \quad M^{(L)}_{mn\ldots l}P_m = 0, \tag{46}$$

т. е. преобразовываться по представлению малой группы L_p.

Тензоры Q и M вычисляются в системе $\mathbf{P} = 0$ или, что то же самое, на пространственно подобной гиперповерхности, ортогональной P. Для ковариантности записи в формуле (45) векторное произведение $[\dot{\xi}\xi]_\alpha$ надо заменить на $-(-P^2)^{-1/2}\varepsilon_{klmp}\dot{\xi}_l\xi_m P_p$, где точка обозначает теперь дифференцирование по собственному времени системы.

Мы можем теперь написать для электрической части 4-вектора плотности тока[5)]

$$j_i^{\text{эл}} = \left[ZP_i + \frac{\partial}{\partial x_k}(P_k N_i - P_i N_k)\right]P_0^{-1}\delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)], \tag{47}$$

где $\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{P}t/P_0$, а N_i в системе $\mathbf{P} = 0$ определяется первой из формул (44). В произвольной системе определение аналогично определению дипольного момента (условие $PN = 0$!).

Для магнитной части тока получим

$$j_i^{\text{м}} = -\varepsilon_{iklm}M_k P_l \frac{\partial}{\partial x_m} P_0^{-1}\delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)], \tag{48}$$

где M определяется при $\mathbf{P} = 0$ по второй из формул (44) и условием $PM = 0$.

Формулы (47) и (48) являются релятивистским обобщением соотношений (43) и (44). Они могут быть применены при рассмотрении электромагнитных свойств системы зарядов.

5. Мультипольное излучение

В качестве примера рассмотрим излучение электромагнитных волн системой зарядов. Источнику электромагнитного поля с плотностью тока $j_i(y)$ соответствует вектор-потенциал

$$A_i(x) = 4\pi \int D_R(x - y) j_i(y)\, d^4y, \tag{49}$$

где $D_R(x - y)$ — запаздывающая функция Грина. Разложив ток по мультипольным моментам, мы можем записать

$$A_i(x) = \sum_{L=1}^{\infty} A_i^{(L)\text{эл}} + \sum_{L=1}^{\infty} A_i^{(L)\text{м}}, \tag{50}$$

$$A_i^{(L)}(x) = 4\pi \int D_R(x - y) j_i^{(L)}(y)\, d^4y. \tag{51}$$

---

4) Кроме того, имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_n} Q^{(L)}_{\ldots n \ldots}(xP) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} M^{(L)}_{\ldots n \ldots}(xP) = 0.$$

5) $P_0^{-1}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t))$ является инвариантом. Если у системы все мультипольные моменты равны нулю, то $j_i = ZP_iP_0^{-1}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t))$, что совпадает с формулой для плотности тока точечного заряда.

В импульсном пространстве равенство (51) запишется в виде

$$A_i^{(L)}(k) = 4\pi(2\pi)^4 j_i^{(L)}(k) D_R(k); \tag{52}$$

$$j_i^{(L)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int j_i^{(L)}(y) e^{iky}\, d^4y, \tag{53}$$

$$D_R(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \mathrm{P}\frac{1}{k^2} + i\pi\delta(k^2)\varepsilon(k_0) \right\} \tag{54}$$

(P — символ главного значения, $\varepsilon(k_0) = k_0/|k_0|$).

В формуле (54) член, содержащий $\delta(k^2)$, очевидно, описывает излучение электромагнитных волн. Проинтегрируем этот член по энергии. При этом мы получим

$$A_i^{(L)}(x) - \mathrm{P} \int j_i^{(L)}(k) \frac{e^{-ikx}}{k^2}\, d^4k = \int a_i^{(L)}(k) e^{ikx} \frac{d^3k}{k_0} + \text{к. с.}, \tag{55}$$

где $k_0 = |\mathbf{k}|$, т. е. $k^2 = 0$. Как обычно, на $a_i^{(L)}(k)$ наложим условие $a_i^{(L)}(k)P_i = 0$.

Вычисления приводят к следующим значениям для $a^{(L)}(k)$ (мы пользуемся длинноволновым приближением в системе, где $\mathbf{P} = 0$):

$$a_i^{(L)\text{эл}}(k) = B\frac{(kP)^L}{(-P^2)^{L/2+1/2}} \left\{ (kP)\frac{\partial}{\partial k_i} T^{(L)}_{lm\ldots n}(k) - k_i \left(P_k \frac{\partial}{\partial k_k} T^{(L)}_{lm\ldots n}(k) \right) \right\} Q^{(L)}_{lm\ldots n}(x), \tag{56}$$

$$a_i^{(L)\text{м}}(k) = B\frac{(kP)^L}{(-P^2)^{L/2+1/2}} \frac{1}{i} \varepsilon_{istr} k_s \left(\frac{\partial}{\partial k_t} T^{(L)}_{lm\ldots n}(k) \right) P_r M^{(L)}_{lm\ldots n}(x), \tag{57}$$

где $x = kP/(-P^2)^{1/2}$; $T^{(L)}_{lm\ldots n}(k)$ — тензоры (19) (раздел 3), $Q^{(L)}(x) M^{(L)}(x)$ — коэффициенты Фурье по переменной x от тензоров электрического и магнитного мультипольных моментов, у которых следы по всем парам индексов сделаны равными нулю.

Если от 4-тензоров $T^{(L)}$, $M^{(L)}$ и $Q^{(L)}$ перейти к релятивистским спинорам, то придем к формуле (28), где

$$e_L(x) = -2^{-L} B (kP)^L (P^2)^{-L/2} Q_L(x), \tag{58}$$

$$m_L(x) = -2^{-L} B (kP)^L (P^2)^{-L/2} M_L(x), \tag{59}$$

$$B = \frac{i^{L+1}}{L(2L-1)!!} \sqrt{\frac{(2L)!L(L+1)}{(2L+1)4\pi}}. \tag{60}$$

Формулы (56), (57) выражают связь между разложением излучения по мультиполям (25), (26) и разложением плотности тока излучателя по мультипольным моментам.

Литература

1. *Широков Ю. М.* ЖЭТФ, **35**, 1005, 1958.
2. *Чжоу Гуан-чжао*, *Широков М. И.* ЖЭТФ, **34**, 1230, 1958; *Чжоу Гуан-чжао*. ЖЭТФ, **36**, 906, 1959.
3. *Долгинов А.* 3. ЖЭТФ, **30**, 746, 1956.
4. *Michel L.* Suppl. Nuovo Cim., **14**, 95, 1959.
5. *Michel L.*, *Rouhaninejad H.* Phys. Rev., **122**, 242, 1961.
6. *Fradkin D. M.*, *Good R. H.* Rev. Mod. Phys., **33**, 343, 1961.

7. *Wightman A. S.* Suppl. Nuovo Cim., **19**, 81, 1959.
8. *Bargmann V.*, *Wigner E. P.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **34**, 211, 1948.
9. *Гельфанд И. М.*, *Минлос Р. А.*, *Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. Гостехиздат, 1958.
10. *Широков Ю. М.* ЖЭТФ, **33**, 1208, 1957.
11. *Бадалян А. М.*, *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **40**, 1231, 1961.
12. *Heisenberg W.*, *Paulli W.* Zs. Phys., **59**, 168, 1930.
13. *Ахиезер А. И.*, *Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. Гостехиздат, 1959.
14. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Теория поля. Физматгиз, 1960.

Восстановление матрицы рассеяния вблизи порога

А. И. Базь, Л. Д. Пузиков, Я. А. Смородинский

1. Случай бесспиновых частиц

Мы проведем сначала анализ рассеяния бесспиновых частиц вблизи порога реакции, следуя методу, изложенному в [2]. В случае частиц со спином 0 реакция идет через s-состояние исходной системы, и наиболее заметному изменению подвергнется s-фаза упругого рассеяния. Разложим ее по степеням волнового числа k_1 рождающихся частиц и ограничимся первыми членами разложения:

$$e^{2i\delta_0} = e^{2i\delta_0(\text{пор})}[1 + ak_1]. \tag{1}$$

Ниже порога фаза δ_0 действительна, k_1 чисто мнимо, и, значит, величина a должна быть действительной. Выше порога условие действительности фаз заменяется условием унитарности матрицы

$$\begin{pmatrix} e^{2i\delta_0} & mk_1^{1/2} \\ mk_1^{1/2} & x \end{pmatrix},$$

откуда следует, в частности, что

$$\left|e^{2i\delta_0}\right|^2 + \left|m^2\right|k_1 = 1.$$

Подставляя сюда разложение фазы, получим, что $\operatorname{Re} a = -\left|m^2\right|/2$ или, в силу действительности a,

$$a = -\frac{\left|m^2\right|}{2}.$$

Таким образом, амплитуда рассеяния вблизи порога представляется в следующем виде:

$$f(\vartheta) = f_{\text{пор}}(\vartheta) + \frac{1}{4}\, i|m^2|k_1k^{-1}e^{2i\delta_0(\text{пор})} \tag{2}$$

(k — волновое число в упругом канале).

Перейдем теперь к дифференциальному сечению. Ниже порога

$$\sigma(\vartheta) = \sigma_{\text{пор}}(\vartheta) - \frac{1}{2}|m|^2|k_1|k^{-1}\operatorname{Re}\{e^{-2i\delta_0(\text{пор})}f_{\text{пор}}(\vartheta)\}.$$

Выше порога

$$\sigma(\vartheta) = \sigma_{\text{пор}}(\vartheta) + \frac{1}{2}|m|^2k_1k^{-1}\operatorname{Im}\{e^{-2i\delta_0(\text{пор})}f_{\text{пор}}(\vartheta)\}.$$

Отсюда следует, что, изучая угловое распределение выше и ниже порога, мы получаем с точностью до коэффициента непосредственно амплитуду рассеяния, а не квадрат ее модуля, как при обычных измерениях сечения.

Коэффициенты при амплитуде нетрудно определить. Величина $|m|^2$ определяется по сечению реакции ($\sigma_p = \pi k^{-2}|m|^2 k_1$), а фазу δ_0(пор) можно найти по полному упругому сечению:

$$\sigma = \sigma_{\text{пор}} - \frac{\pi}{k^2}|m|^2|k_1| \times \begin{cases} \sin 2\delta_0(\text{пор}) & (\text{ниже порога}), \\ 2\sin^2\delta_0(\text{пор}) & (\text{выше порога}). \end{cases}$$

2. Роль порога в рассеянии частиц со спином ½ на частицах со спином 0

Случай этот подробно рассмотрен в работе Окуня и одного из авторов [4]. Мы ограничимся здесь простейшим вариантом, когда в результате реакции возникают частицы с теми же спинами, что исходные, и относительные четности не меняются. При изменении относительных четностей формулы несколько усложняются, но выводы остаются теми же.

При сделанных предположениях реакция идет через единственное состояние, именно через состояние с орбитальным моментом 0 и полным, равным ½. Соответствующая фаза $\delta_{1/2\,0}$ упругого рассеяния ниже порога действительна, и вывод соотношения, аналогичного (2), в этом случае дословно совпадает с соответствующим выводом предыдущего раздела. Матрица упругого рассеяния вблизи порога записывается следующим образом:

$$M = a_{\text{пор}}(\vartheta) + b_{\text{пор}}(\vartheta)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) + \frac{1}{4}\, i|m|^2 k_1 k^{-1} \exp\left\{2i\delta_{1/2\,0}(\text{пор})\right\},$$

т. е. меняется лишь коэффициент a, коэффициент b остается неизменным. Отсюда нетрудно получить выражения для сечения и поляризации. Ниже порога имеем

$$\sigma(\vartheta) = \sigma_{\text{пор}}(\vartheta) - \frac{1}{2}|m|^2|k_1|k^{-1}\,\mathrm{Re}\left\{e^{-2i\delta_{1/2\,0}(\text{пор})}a_{\text{пор}}(\vartheta)\right\},$$

$$\sigma(\vartheta)P(\vartheta) = [\sigma(\vartheta)P(\vartheta)]_{\text{пор}} - \frac{1}{2}|m|^2|k_1|k^{-1}\,\mathrm{Re}\left\{e^{-2i\delta_{1/2\,0}(\text{пор})}b_{\text{пор}}(\vartheta)\right\}.$$

Выше порога

$$\sigma(\vartheta) = \sigma_{\text{пор}}(\vartheta) + \frac{1}{2}|m|^2 k_1 k^{-1}\,\mathrm{Im}\left\{e^{-2i\delta_0(\text{пор})}a_{\text{пор}}(\vartheta)\right\},$$

$$\sigma(\vartheta)P(\vartheta) = [\sigma(\vartheta)P(\vartheta)]_{\text{пор}} + \frac{1}{2}|m|^2 k_1 k^{-1}\,\mathrm{Im}\left\{e^{-2i\delta_0(\text{пор})}b_{\text{пор}}(\vartheta)\right\}.$$

Измерение сечения и поляризации как функции энергии позволяет здесь как и в бесспиновом случае, определить полностью матрицу реакции.

Таким образом, в этих случаях фазовый анализ как средство восстановления матрицы рассеяния оказывается излишним. Однако, даже если измерено только сечение вблизи порога, фазовый анализ существенно меняет свой характер. Если обычно приходится анализировать две квадратичные по амплитудам величины $|a|^2 + |b|^2$ и $\mathrm{Re}\, ab^*$, то здесь в дополнение к $|a|^2 + |b|^2$ оказывается известной из опыта одна из амплитуд.

3. pp-рассеяние вблизи порога реакции $p + p \to \pi + d$

Рассмотрим особенности, которые возникают в протон-протонном рассеянии вблизи порога рождения пиона и дейтрона. Здесь относительные четности частиц

до и после реакции различны, и реакция вблизи порога идет только через состояние системы протон—протон с полным моментом количества движения, орбитальным моментом и полным спином, равными единице. Соответствующая фаза упругого рассеяния $\delta^1_{11;11}$ действительна, и вывод соотношения типа (2) такой же, как в бесспиновом случае. Однако поскольку реакция идет через p-состояние исходной системы, добавка к матрице рассеяния зависит от углов и спинов. Вблизи порога

$$M = \{\alpha + \beta(\sigma_1\mathbf{n})(\sigma_2\mathbf{n}) + \gamma(\sigma_1 + \sigma_2, \mathbf{n}) + \delta(\sigma_1\mathbf{m})(\sigma_2\mathbf{m}) + \varepsilon(\sigma_1\mathbf{l})(\sigma_2\mathbf{l})\} +$$
$$+ \eta k_1\left\{\cos\vartheta - \frac{1}{2}i\sin\vartheta(\sigma_1 + \sigma_2, \mathbf{n}) - \sin^2\frac{\vartheta}{2}(\sigma_1\mathbf{m})(\sigma_2\mathbf{m}) + \cos^2\frac{\vartheta}{2}(\sigma_1\mathbf{l})(\sigma_2\mathbf{l})\right\},$$
$$\eta = -\frac{3\pi}{8ik}|m|^2 \exp\left\{2i\delta^1_{11;11}(\text{пор})\right\}.$$

Если перейти от $\alpha, \beta \ldots$ к их комбинациям $a = \alpha+\beta$, $b = \alpha-\beta$, $c = \delta+\varepsilon$, $d = \delta-\varepsilon$, $e = 2\gamma$, то вблизи порога

$$a = a_{\text{пор}} + \eta k_1 \cos\vartheta, \quad b = b_{\text{пор}} + \eta k_1 \cos\vartheta, \quad c = c_{\text{пор}} + \eta k_1 \cos\vartheta,$$
$$d = d_{\text{пор}} - \eta k_1, \quad e = e_{\text{пор}} - i\eta k_1 \sin\vartheta.$$

Если воспользоваться теперь известными выражениями для измеримых величин через $a, b, \ldots$ (см., например, [5]), то нетрудно получить околопороговые добавки к ним. Мы приведем здесь только выражения для сечения и поляризации при рассеянии неполяризованных частиц. Ниже порога имеем

$$\sigma(\vartheta) = \sigma_{\text{пор}}(\vartheta) + [k_1]\,\mathrm{Im}\,\eta^*[(a+b+c)_{\text{пор}}\cos\vartheta - d_{\text{пор}} + ie_{\text{пор}}\sin\vartheta],$$
$$\sigma(\vartheta)P(\vartheta) = [\sigma(\vartheta)P(\vartheta)]_{\text{пор}} + |k_1|\,\mathrm{Im}\,\eta^*[ia_{\text{пор}}\sin\vartheta + e_{\text{пор}}\cos\vartheta].$$

Выше порога

$$\sigma(\vartheta) = \sigma_{\text{пор}}(\vartheta) + k_1\,\mathrm{Re}\,\eta^*[(a+b+c)_{\text{пор}}\cos\vartheta - d_{\text{пор}} + ie_{\text{пор}}\sin\vartheta],$$
$$\sigma(\vartheta)P(\vartheta) = [\sigma(\vartheta)P(\vartheta)]_{\text{пор}} + k_1\,\mathrm{Re}\,\eta^*[ia_{\text{пор}}\sin\vartheta + e_{\text{пор}}\cos\vartheta].$$

Ситуация, как мы видим, та же, что и в рассмотренных ранее случаях, — измерение зависимости от энергии какой-либо величины позволяет найти непосредственно определенную линейную комбинацию из коэффициентов матрицы рассеяния. Расчеты показывают, что если бы удалось произвести измерения пороговых зависимостей каких-либо пяти величин, например величин, специально выделенных в [5], то это позволило бы найти матрицу рассеяния, не прибегая к фазовому анализу или эквивалентному ему использованию соотношений унитарности. Однако даже в неполном виде пороговые измерения являются серьезным подспорьем для фазового анализа, измерения одних только сечений и поляризации дают шесть уравнений и позволяют не проводить труднейшие опыты по тройному рассеянию. Здесь, правда, возникают свои трудности, связанные с достижением достаточного разрешения по энергии и измерениям величин с точностью, необходимой для выделения сравнительно малых, зависящих от энергии слагаемых.

Литература

1. *Wigner E. P.* Phys. Rev., **73**, 1002, 1948.
2. *Базь А. И.* ЖЭТФ, **33**, 923, 1957.
3. *Breit G.* Phys. Rev., **107**, 1612, 1957.
4. *Базь А. И., Окунь Л. Б.* ЖЭТФ, **35**, 757, 1958.
5. *Пузиков Л. Д., Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **32**, 592, 1957.

Инверсия спиральностей в ядерных реакциях

Н. П. Клепиков, Я. А. Смородинский

В известной работе Минами [1] (ср. [2]) было показано, что сечение рассеяния частицы со спином $1/2$ на бесспиновой мишени остается инвариантным относительно перестановки фаз всех пар состояний, относящихся к одному и тому же значению полного углового момента:

$$\delta\,(l = j - 1/2) \rightleftarrows \delta\,(l = j + 1/2). \tag{1}$$

Преобразование Минами, однако, меняет знак поляризации, а поэтому возникающая двузначность снимается, если этот знак известен. В работе Пузикова, Рындина и одного из авторов [3] отмечалось, что перестановка фаз с одновременным изменением их знака [1)]

$$\delta\,(l = j - 1/2) \rightleftarrows -\delta\,(l = j + 1/2) \tag{2}$$

не меняет ни сечения, ни поляризации и может привести к неоднозначности фазового анализа. Такая неоднозначность ликвидируется, например, при повороте поляризации магнитным полем или измерением зависимостей фаз от энергии при малых энергиях.

В последующей работе Заставенко [5] [2)] обсуждал вопрос об обобщении преобразования (1) на случай высших спинов и релятивистских частиц. Во всех этих работах, однако, не выяснен физический смысл преобразования (2). В то же время это преобразование, оказывается, отражает простой тип симметрии.

Именно, (2) есть не что иное как изменение знака спиральности частиц (проекции поляризации частицы на направление ее скорости). Простой факт, что в опытах по рассеянию без применения внешних полей (или поляризованных мишеней) нельзя измерить знак продольной поляризации, и приводит к двузначности. В такой форме утверждение легко обобщается и на случай произвольных спинов. Более неожиданным оказывается переход к релятивистским системам, где «релятивистский поворот спина» нарушает симметрию и приводит при достаточно малой энергии к «тонкой структуре» сечений повторных рассеяний, вычисляемых на основании результатов «полного опыта».

Преобразование (1) можно записать в матричном виде:

$$M \to (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_f)\, M(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_i). \tag{3}$$

Здесь M — матрица (в спиновом пространстве) рассеяния, $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_f$ — единичные вектора в направлениях падающей и рассеянной частиц в системе центра инерции. Так как $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_{i,f} = \exp\,[i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_{i,f})\pi/2] \equiv U(\mathbf{n}_{i,f})$ есть оператор поворота спина на угол π вокруг оси $\mathbf{n}_{i,f}$, то (3) переписывается в виде

$$M \sim U^{+}(\mathbf{n}_f)\, MU(\mathbf{n}_i). \tag{4}$$

---

1) Эта подстановка была недавно использована в работе Науенберга и Пайса [4].

2) См. также [6]. В [7] содержится неверный вывод.

Без вычислений очевидно, что такое преобразование меняет знак поперечной поляризации частиц. Преобразование (4) антикоммутирует с отражением и пространстве,

$$P(\sigma\mathbf{n}) = -(\sigma\mathbf{n})P \tag{5}$$

($\mathbf{n}$ — любой из векторов $\mathbf{n}_i$ или $\mathbf{n}_f$); поэтому оно меняет четность состояния.

Легко видеть, что замена (4) не нарушает условия унитарности

$$i(\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}) = 2k\mathbf{M}^+\mathbf{M}. \tag{6}$$

Кроме того, очевидно, что условие (6) не нарушается при подстановке

$$\mathbf{M} \to -\mathbf{M}^+. \tag{7}$$

Это следует из того, что $\mathbf{M}\mathbf{M}^+ = \mathbf{M}^+\mathbf{M}$ в силу унитарности матрицы $\mathbf{S} = 1 + 2ik\mathbf{M}$.

Преобразование (7) состоит из обращения знака, перехода к эрмитовски сопряженной матрице в пространстве спинов и перестановки конечного и начального импульсов. При этом меняются знаки всех компонент спинов. Это преобразование отвечает изменению знаков всех фаз, что легко видеть, записав матрицу рассеяния в представлении JM, в котором она (в силу симметрии во времени) симметрична.

Последовательное проведение двух преобразований: поворотов всех спинов на π вокруг импульсов и преобразования (7) и даст инверсию спиральностей всех частиц.

Для частицы со спином $1/2$ инверсия спиральностей сводится к подстановке (2). Рассуждения, приведенные выше, непосредственно обобщаются на случай любого спина. При этом меняется только вид операторов. В частности, оператор поворота $U(\mathbf{n})$ для частицы со спином S будет равен $\exp[i(\mathbf{S}\mathbf{n})\pi]$ и его коммутация с оператором пространственного отражения имеет вид

$$UP = (-1)^{2S} PU. \tag{8}$$

В случае систем из нескольких частиц инверсию спиральности надо производить с каждой частицей. Оператор поворота в этом случае распадается на произведение операторов, действующих на каждую из частиц. Поэтому для систем с целым спином преобразование Минами и инверсия спиральностей не меняет четности состояний, а для систем с полуцелым спином четность изменяется.

Если рассматривать любой процесс, происходящий при столкновении произвольно поляризованного пучка с произвольно поляризованной мишенью, то из сказанного ясно, что если в опытах измеряется лишь абсолютная величина компонент поляризации (в начальном и конечном состояниях), то существуют четыре набора амплитуд, удовлетворяющих всем результатам опытов. Если в опытах знак поперечной поляризации определяется, то остаются лишь два набора[3].

Для ликвидации оставшейся двузначности надо измерить знак продольной поляризации. Для этого надо измерить псевдоскаляр $(\mathbf{S}\mathbf{n})$. Это можно сделать, включая либо магнитное поле — измерение скаляра $(\mathbf{S}\mathbf{n})(\mathbf{H}\mathbf{n})$, — либо электрическое поле — скаляр $(\mathbf{S}\mathbf{n})(\mathbf{E}[\mathbf{n}_i\mathbf{n}_f])$, — либо, наконец, исследуя зависимость эффектов от энергии ($(\mathbf{S}\mathbf{n})$ является скаляром относительно отражения времени).

Поляризованный пучок приготовляется обычно рассеянием на мишенях, причем плоскости рассеянии различны. При этом, если частицы нерелятивистские, направление поляризации не меняется при переходах из одной системы в другую и кратные рассеяния не изменяют выводов, сделанных выше. Это сразу видно, если

[3] Знак поляризации определяется обычно, если известны уровни ядра мишени (например, в рассеянии нуклонов гелием).

заметить, что результат n-кратного рассеяния, начатого с рассеяния неполяризованной частицы, описывается следом матрицы плотности

$$\rho = \underbrace{MM\ldots M}_{n} \underbrace{M^{+}\ldots M^{+}M^{+}}_{n} \qquad (9)$$

и что направление падающей частицы совпадает с направлением рассеянной частицы в предыдущем рассеянии.

Положение изменяется, если частицы релятивистские. Стэпп [8] отметил роль этого эффекта в процессах кратного рассеяния. Возникающая при первом рассеянии (на покоящейся мишени) поляризация рассеянной частицы поворачивается на угол Ω (в отрицательном направлении угла рассеяния) при переходе к системе центра инерции второго рассеяния (см. Приложение). Так как поворот на угол Ω, совершаемый вокруг оси, нормальной к плоскости рассеяния, не коммутирует с инверсией спиральности, то этот эффект снимает все неоднозначности, рассмотренные выше. В этом смысле лоренцевское преобразование играет роль, аналогичную роли магнитного поля, включенного между последовательными рассеяниями.

Для частиц без спина повторное рассеяние не дает никакой новой информации по сравнению с первым и не снимает неопределенность знака фаз, связанную с преобразованием (7). Для частиц со спином $1/2$ поляризация, возникающая при рассеянии неполяризованного пучка, нормальна к плоскости рассеяния. Поэтому инвариантность асимметрии второго рассеяния относительно преобразования $M \to -U^{+}MU$ не снимается релятивистским поворотом спина. Нарушение этой инвариантности наступает, начиная с асимметрии третьего рассеяния.

Для частиц со спинами выше $1/2$ векторная часть поляризации после первого рассеяния по-прежнему не меняется при релятивистском повороте вокруг нормали, но тензорная часть поляризации уже не инвариантна относительно вращения. Поэтому в этом случае нарушается инвариантность уже асимметрии второго рассеяния[4)].

Заметим, что указанная инвариантность наблюдаемых величин вовсе не имеет места, если на матрицу рассеяния накладываются условия, не совместимые с обращением спиральностей всех частиц. Так, если в матрице рассеяния частиц со спинами 0, $1/2$ считать отличными от нуля нечетное число первых фаз, то произвести соответствующую замену фаз нельзя, и все величины, наблюдаемые в повторных рассеяниях, различны для всех 2^n наборов фаз [9] (n — число фаз в порядке $s_{1/2}$, $p_{1/2}$, $p_{3/2}$, $d_{3/2}$, ...), совместимых с сечением рассеяния неполяризованного пучка.

Приложение I

О релятивистском повороте спина

Релятивистский поворот спина был рассмотрен в работе Стэппа [8]. Этот кинематический эффект есть не что иное как «прецессия Томаса», и его проще всего описывать в пространстве Лобачевского [10], что и было отмечено в недавней работе Вика [11]. Эффект становится совсем элементарным, если при этом использовать операцию параллельного переноса в этом пространстве [12].

Концы векторов 4-скоростей частицы в силу $v^2 = (p/m)^2 = 1$ лежат на поверхности гиперболоида в четырехмерном пространстве скоростей с псевдоэвклидовой метрикой. Метрика на самой поверхности определяется так, что если a есть «длина» геодезической линии между двумя точками, то $a = \gamma$ — лоренцовский фактор, отвечающий относительной скорости этих точек.

---

4) Это и было обнаружено Заставенко [5] путем непосредственного вычисления.

Преобразование спина из одной системы координат в другую можно описывать как параллельный перенос трехмерного вектора спина вдоль геодезической линии на гиперболоиде, проведенной между двумя соответствующими точками [12]. Таким способом можно сразу показать, что поворот спина в лабораторной системе координат отличается от поворота спина в системе центра масс на поворот, связанный с параллельным переносом вдоль гиперболического треугольника с вершинами, отвечающими 4-скорости частицы до рассеяния R_1, 4-скорости центра масс C и 4-скорости частицы после рассеяния R_2.

Этот поворот равен гиперболическому дефекту Ω (или площади треугольника, если кривизна пространства Лобачевского — скорость света — положена равной единице):

$$\varphi_{\text{лаб}} = \varphi_{\text{ц. м.}} - |\Omega|.$$

Угол поворота Ω можно записать в векторном виде:

$$|\sin\Omega| = \omega|\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{1\beta}C_\gamma R_{2\delta}|,$$
$$\omega = \frac{1+\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}b+\operatorname{ch}c}{8\operatorname{ch}^2(a/2)\operatorname{ch}^2(b/2)\operatorname{ch}^2(c/2)}.$$

Отметим, что

$$\frac{\sin^2\Omega}{\omega^2} = 1 + 2(R_1C)(CR_2)(R_1R_1) - (R_1C)^2 - (CR_2)^2 - (R_2R_1)^2 = $$
$$= 1 + 2\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b\operatorname{ch}c - \operatorname{ch}^2a - \operatorname{ch}^2b - \operatorname{ch}^2c$$

(a, b, c — стороны треугольника).

Вектор поворота в каждой из рассмотренных трех систем оказывается параллельным трехмерному векторному произведению пространственных частей двух 4-скоростей, отличаясь от него на множитель ω. Это и есть результат Стэппа.

При описании кратных рассеяний удобнее всего все вычисления проводить в лабораторной системе, для этого в формуле (9) между каждой парой матриц M следует вставить матрицу поворота на угол Ω.

Приложение II

Преобразование матрицы рассеяния и наблюдаемых величин

Мы рассмотрели три преобразования:

$$M \to -M^+, \qquad \text{(а)}$$
$$M \to U^+MU, \qquad \text{(б)}$$
$$M \to -U^+M^+U. \qquad \text{(в)}$$

Рассмотрим действие этих преобразований для трех систем.

1) Частица без спина. Запишем матрицу рассеяния в виде

$$M = e^{i\alpha}\sqrt{\sigma}.$$

Преобразование (а) приводит к соотношениям

$$\sigma \to \sigma, \quad \alpha \to \pi - \alpha, \quad \delta_l \to -\delta_l.$$

2) Спин ½. Коэффициенты матрицы рассеяния

$$M = a + b(\sigma\mathbf{n});$$
$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma}e^{i\alpha}\left(e^{-i\beta/2}\sqrt{1+P} + e^{i\beta}\sqrt{1-P}\right),$$
$$b = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma}e^{i\alpha}\left(e^{-i\beta/2} - e^{i\beta/2}\sqrt{1-P}\right)$$

(где σ — дифференциальное сечение, P — поляризация) преобразуются по формулам

$$a \to -a^*, \quad b \to b^*, \quad \sigma \to \sigma, \quad P \to P, \quad \alpha \to \pi - \alpha$$

при преобразовании (а),

$$a \to a\cos\theta + ib\sin\theta, \quad b = -ia\sin\theta - b\cos\theta,$$
$$\sigma \to \sigma, \quad P \to -P, \quad \alpha \to \alpha, \quad \beta \to 2\theta - \beta$$

при преобразовании (б) и

$$a \to -a^*\cos\theta + ib^*\sin\theta, \quad b = ia^*\sin\theta - b^*\cos\theta,$$
$$\sigma \to \sigma, \quad P \to P, \quad \alpha \to \pi - \alpha, \quad \beta \to 2\theta - \beta$$

при преобразовании (в).

При преобразовании (в) поперечно-продольные компоненты тензора, связывающие компоненты спина (в плоскости рассеяния) до и после рассеяния, меняют знак. Остальные компоненты не меняются.

3) Рассеяние нуклонов нуклонами. Формулы, аналогичные предыдущим, имеют вид

$$M = \frac{1}{2}a\left[1 + (\sigma_1\mathbf{n})(\sigma_2\mathbf{n})\right] + \frac{1}{2}b\left[1 - (\sigma_1\mathbf{n})(\sigma_2\mathbf{n})\right] + \frac{1}{2}c\left[(\sigma_1\mathbf{m})(\sigma_2\mathbf{m}) + (\sigma_1\mathbf{l})(\sigma_2\mathbf{l})\right] + \frac{1}{2}d\left[(\sigma_1\mathbf{m})(\sigma_2\mathbf{m}) - (\sigma_1\mathbf{l})(\sigma_2\mathbf{l})\right] + \frac{1}{2}e\left[(\sigma_1\mathbf{n}) + (\sigma_2\mathbf{n})\right];$$

$$a = 2^{-3/2}\sqrt{\sigma}e^{i\alpha}(e^{-i\beta}\sqrt{1+D+K+Q+4P} + e^{i\beta}\sqrt{1+D+K+Q-4P}),$$
$$b = 2^{-1/2}\sqrt{\sigma}e^{i(\alpha+\gamma)}\sqrt{1+D-K-Q},$$
$$c = 2^{-1/2}\sqrt{\sigma}e^{i(\alpha+\gamma)}\sqrt{1-D+K-Q},$$
$$d = 2^{-1/2}\sqrt{\sigma}e^{i(\alpha+\varepsilon)}\sqrt{1-D-K+Q},$$
$$e = 2^{-3/2}\sqrt{\sigma}e^{i\alpha}(e^{-i\beta}\sqrt{1+D+K+Q+4P} - e^{i\beta}\sqrt{1+D+K+Q-4P}).$$

Здесь P — поляризация неполяризационного пучка, D — деполяризация в передней полусфере, K — деполяризация в задней полусфере, Q — нормально-нормальная компонента корреляции поляризаций.

При преобразовании (а) имеем:

$$a \to -a^*, \quad b \to -b^*, \quad c \to -c^*, \quad d \to -d^*, \quad e \to e^*,$$
$$\alpha \to \pi - \alpha, \quad P \to -P, \quad \gamma \to -\gamma, \quad \delta \to -\delta, \quad \varepsilon \to -\varepsilon;$$

при преобразовании (б):

$$a \to a\cos 2\theta + ie\sin 2\theta, \quad e \to -ia\sin 2\theta - e\cos 2\theta,$$
$$\beta \to 2\theta - \beta, \quad P \to -P;$$

при преобразовании (в):

$$a \to -a^* \cos 2\theta + ie^* \sin 2\theta, \quad e \to ia \sin 2\theta - e^* \cos 2\theta,$$
$$b \to -b^*, \quad c \to -c^*, \quad d \to -d^*,$$
$$\alpha \to \pi \to \alpha, \quad \beta \to 2\theta - \beta, \quad \gamma \to -\gamma, \quad \delta \to -\delta, \quad \varepsilon \to -\varepsilon.$$

При преобразованиях (б) и (в) меняют знак продольно-поперечные и поперечно-продольные компоненты тензоров (не выписанные явно коэффициенты не изменяются).

В триплетных состояниях преобразование (в) связано с преобразованием фазовой матрицы:

$$S^j_{11} \to (2j+1)^{-2}\left\{S^j_{11} + 4j(j+1)S^j_{22} + 4\sqrt{j(j+1)}\,S^j_{12}\right\},$$
$$S^j_{12} \to 2\sqrt{j(j+1)}\,(2j+1)^{-2}(S^j_{11} - S^j_{22}) + \left[4j(j+1) - 1\right](2j+1)^{-2}S^j_{12},$$
$$S^j_{22} \to (2j+1)^{-2}\left\{4j(j+1)S^j_{11} + S^j_{22} - 4\sqrt{j(j+1)}\,S^j_{12}\right\}.$$

Ее элементы описываются фазами и параметром смешивания:

$$S^j_{11} = \cos^2\varepsilon_j \exp\left(2i\delta^+_j\right) + \sin^2\varepsilon_j \exp\left(2i\delta^-_j\right),$$
$$S^j_{22} = \sin^2\varepsilon_j \exp\left(2i\delta^+_j\right) + \cos^2\varepsilon_j \exp\left(2i\delta^-_j\right),$$
$$S^j_{12} = \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon_j\left[\exp\left(2i\delta^-_j\right) - \exp\left(2i\delta^+_j\right)\right].$$

Преобразование (в) сводится к

$$\delta^+ \to -\delta^-, \quad \varepsilon \to -\varepsilon + \operatorname{arc\,ctg} 2\sqrt{j(j+1)}.$$

Фазы в синглетных состояниях и в состояниях с $j = l$ не изменяются при преобразовании (в) и меняют знак при (а) и (б).

Литература

1. *Minami S.* Progr. Theor. Phys., **11**, 213, 1954.
2. *Рындин Р., Смородинский Я.* ДАН СССР, **103**, 69, 1955.
3. *Пузиков Л.Д., Рындин Р.М., Смородинский Я.А.* ЖЭТФ, **32**, 592, 1957.
4. *Nauenberg M., Pais A.* Phys. Rev., **123**, 1058, 1961.
5. *Заставенко Л.Г.* ЖЭТФ, **35**, 785, 1958.
6. *Заставенко Л.Г., Рындин Р.М., Чжоу Гуан-чжао.* ЖЭТФ, **34**, 526, 1958.
7. *Рындин Р.М., Смородинский Я.А.* ЖЭТФ, **32**, 1200, 1957.
8. *Stapp H.P.* Phys. Rev., **103**, 425, 1956.
9. *Клепиков Н.П.* ЖЭТФ, **41**, 1187, 1961.
10. *Лобачевский Н.И.* Уч. зап. Каз. Имп. Ун-та, **1**, 3, 1835.
11. *Wick G.C.* Ann. of Phys., **18**, 65, 1962.
12. *Смородинский Я.А.* ЖЭТФ, **43**, 2217, 1962.

Introduction

Pavel Winternitz

Symmetries in Physics

A typical feature of the research and even of the personality of Yakov Abramovich Smorodinsky was the broadness of his scientific interests, covering virtually all of theoretical physics (and not only theoretical physics). Probably all of us, who have worked with Ya. A. on some problem, came away with the impression that precisely that field is Ya. A.'s main interest. I was fortunate enough to have worked in Ya. A.'s group in Dubna for several years, mainly on applications of group theory in physics. Not surprisingly, my (biased) opinion is that symmetry theory was his main love in science.

The articles on symmetries in physics, in particular those included in this book, can be subdivided into several categories.

One of them could be called *SU*(3) *and beyond*. Ya. A. was one of the first physicists who recognized the importance of unitary symmetry in elementary particle theory, i. e. the necessity of going beyond Wigner multiplets, related to isotopic spin, to the «supermultiplets» of Gell-Mann's «eightfold way». Ya. A.'s own contributions concerned the representation theory of SU(3) in specific bases and mainly the unification of internal SU(3) symmetries with space-time ones (leading to the sequence of Lie groups SU(3), SU(6), SL(6, C) and SU(6, 6)). This line of work is represented by an influential review article [1]. A second major series of papers could be grouped under the title *Lobachevsky geometry, representations of the Lorentz group and invariant expansions of scattering amplitudes*. This started out from the realization that the Lobachevsky geometry of velocity space provides very efficient tools for describing relativistic kinematics [2]. A seminal paper with N. Ya. Vilenkin [3] followed and laid the basis for several new directions in mathematical physics that are actively pursued to this day. The original purpose of these papers was to develop a mathematical basis for relativistic expansions of scattering amplitudes., e. g. a relativistic energy dependent phase shift analysis. The necessary tools involved harmonic analysis on homogeneous manifolds of the Lorentz group O(3, 1), and later on the group manifold itself. A crucial observation was that reductions of O(3, 1) to different subgroups lead to different bases for group representations, different special functions and hence different expansions. Moreover, different subgroups yield different physical applications. The $O(3,1) \supset O(3)$, $O(3,1) \supset O(2,1)$, and $O(3,1), \supset E(2)$ two-variable expansions incorporated partial wave analysis, Regge pole expansions and eikonal expansions, respectively [4, 5]. For further physical and mathematical developments of this theme see e. g. Ref. [6–12]. Two-variable expansions were later generalized to the case of reactions involving four particles with arbitrary spins [13, 14] and applied to analyze distributions on Dalitz plots and nucleon-nucleon scattering data [15].

The group theoretical and special function theory aspects of this research program induced several lines of further mathematical research. One was a series of papers [16, 17] on basis functions of representations of $O(p, q)$, $SU(p, q)$ and other groups. Others are ongoing series of articles on classifying subgroups of Lie groups [1, 18, 19] and on the separation of variables in Hamilton—Jacobi and Laplace—Beltrami equations [3, 18–23]. The «method

of trees» proposed by Vilenkin [24] and further developed by Ya. A. Smorodinsky and collaborators [25] is now being applied in areas varying from nuclear physics to quantum groups [28]. The third major topic included in this Section is that of finite-dimensional integrable and «superintegrable» systems [29]. The problem originally posed was to find all potentials in two and three dimensions that can be inserted into the Schrödinger, or Hamilton—Jacobi equation and that would allow a «dynamical» symmetry group. A useful way of distinguishing between kinematical and dynamical symmetries for the Schrödinger equation was proposed. Namely, kinematical symmetries correspond to Lie point ones and are generated by sets of first order differential operators, commuting with the Hamiltonian. Dynamical symmetries, on the other hand, are generated by sets of higher order operators, commuting with the Hamiltonian. They correspond to generalized symmetries, or Lie—Bäcklund symmetries, in the theory of differential equations. Second order operators in quantum mechanics, or integrals of motion in classical mechanics that are quadratic in the momenta, turned out to be specially interesting. Indeed, Hamiltonians in n dimensions, allowing n commuting quadratic integrals of motion, will also allow the separation of variables in the Schrödinger and Hamilton—Jacobi equation.

Such a Hamiltonian system will be integrable, both in the classical and in the quantum mechanical sense. A further question that was posed was that of finding «superintegrable» systems with more than n integrals of motion. In classical mechanics a system can have up to $2n - 1$ functionally independent integrals of motion. In quantum mechanics they all commute with the Hamiltonian, but amongst each other they generate some algebraic structure. This may be a finite-dimensional Lie algebra, an infinite-dimensional one, or for instance a quadratic algebra [35]. If the integrals of motion are second-order operators, then superintegrable systems are those that allow a separation of variables in at least two systems of coordinates. A complete classification of superintegrable systems was given for $n = 2$ [29], a partial one for $n = 3$ [30]. The $n = 3$ case was actually completed more than 20 years later by W. Evans [36]. The common features of all known maximally superintegrable systems is the existence of dense sets of periodic orbits in the classical case, degenerate energy levels in the quantum one, and the presence of a nonabelian dynamical symmetry algebra, explaining the degeneracy of energy levels.

When articles [29] and [30] were written, only two «superintegrable» (in the above sense) systems were known: the hydrogen atom, with its O(4) symmetry, discovered by Bargmann [37] and Fock [38] and the harmonic oscillator, with its SU(3) symmetry [39]. This very brief list was significantly extended in Ref. [29] and [30]. By now the theory of integrable systems has been greatly developed and generalized and pervades much of physics. Finite-dimensional systems with more than their proper share of integrals of motion, include such systems as the Calogero—Moser one. For some recent reviews and new results on superintegrable finite dimensional systems, see e. g. Ref. [40–42]. Infinite-dimensional systems with infinitely many integrals of motion describe all of soliton theory. In short, this particular scientific program, started by Ya. A. Smorodinsky and his collaborators in the early sixties, has been incorporated into a vast and extremely active field of research.

References

1. *Kadyshevsky V. G., Muradjan R. M., Smorodinskij Ya. A.* Fortschr. Phys., **13**, 599, 1965.
2. *Smorodinsky Ya. A.* Soviet Physics JETP, **16**, 1566, 1963.
3. *Vilenkin N. Ya., Smorodinsky Ya. A.* Soviet Physics JETP, **19**, 1209, 1964.
4. *Winternitz P., Smorodinsky Ya. A., Sheftel M. B.* Sov. J. Nucl. Phys., **7**, 785, 1968.
5. *Winternitz P., Smorodinsky Ya. A., Sheftel M. B.* Sov. J. Nucl. Phys., **8**, 485, 1969.
6. *Winternitz P., Smorodinsky Ya. A., Uhlir M.* Soviet J. Nucl. Phys., **1**, 113, 1965.

7. *Vilenkin N. Ya., Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A.* Sov. J. Nucl. Phys., **2**, 645, 1966.
8. *Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A.* Sov. J. Nucl. Phys., **3**, 275, 1966.
9. *Smorodinsky Ya. A., Tugov I. I.* Soviet Physics JETP, **23**, 434, 1966.
10. *Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A.* Sov. J. Nucl. Phys., **6**, 949, 1968.
11. *Liberman M. A., Smorodinsky Ya. A., Sheftel M. B.* Sov. J. Nucl. Phys., **7**, 146, 1968.
12. *Kuznetsov G. I., Liberman M. A., Makarov A. A., Smorodinsky Ya. A.* Sov. J. Nucl Phys., **10**, 370, 1970.
13. *Daumens M., Perroud M., Winternitz P.* Phys. Rev., **D19**, 3413, 1979.
14. *Daumens M., Winternitz P.* Phys. Rev., **D21**, 1919, 1980.
15. *Bystricky J., Lafrance P., Lehar F., Perrot F., Winternitz P.* Phys. Rev., **D32**, 575, 1985; Nuovo Cim., **A94**, 319, 1986.
16. *Fischer J., Niederle J., Raczka R.* J. Math. Phys., **7**, 816, 1966.
17. *Limic N., Niederle J., Raczka R.* J. Math. Phys., **8**, 1079, 1967.
18. *Winternitz P., Fris I.* Yad. Fiz., **1**, 889, 1965; Sov. J. Nucl. Phys., **1**, 636, 1965.
19. *Winternitz P.* In: Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theory. Kluwer, Dordrecht, 1993. P. 429–495. (Contains numerous references to the original work).
20. *Winternitz P., Lukač I., Smorodinsky Ya. A.* Sov. J. Nucl. Phys., **7**, 139, 1968.
21. *Patera J., Winternitz P.* J. Math. Phys., **14**, 1130, 1973.
22. *Miller W., Jr., Patera J., Winternitz P.* J. Math. Phys., **22**, 251, 1981; *Miller W., Jr.* Symmetry and Separation of Variables. Addison Wesley, Reading, 1977.
23. *Kalnins E. G.* Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature. Longman Scientific, Essex, 1986.
24. *Vilenkin N. Ya.* Mat Sbornik, **68, 110**, 432, 1965.
25. *Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A.* JETP Letters, **22**, 179, 1975.
26. *Smorodinsky Ya. A.* Izvestiya vuzov. Ser. Radiofizika, **19**, 932, 1976.
27. *Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A.* Sov. J. Nucl. Phys., **29**, 141, 1979.
28. *Kuznetsov G. I., Moskalyuk S. S., Yu. Smirnov F., Shelest V. P.* Graph Theory for Representations of Orthogonal and Unitary Groups. Naukova Dumka, Kiev, 1992. (In Russian.)
29. *Winternitz P., Smorodinsky Ya. A., Uhlir M., Friš I.* Sov. J. Nucl. Phys., **4**, 444, 1967.
30. *Makarov A. A., Smorodinsky Ya. A., Valiev Kh., Winternitz P.* Nuovo. Cim., **A52**, 1061, 1967.
31. *Lukač I., Smorodinsky Ya. A.* Soviet Physics JETP, **28**, 680, 1969.
32. *Lyuboshitz V. L., Smorodinsky Ya. A.* Soviet Physics JETP, **48**, 19, 1978.
33. *Pogosyan G. S., Smorodinsky Ya. A., Ter-Antonyan V. M.* J. Phys. A. Math. Gen., **14**, 769, 1981.
34. *Pogosyan G. S., Smorodinsky Ya. A., Ter-Antonyan V. M.* Multi-Dimensional Isotropic Oscillator: Transition from the Carthesian Basis to Hyperspherical Bases. Dubna, Preprint R2–82–118, 1982.
35. *Vinet L.* Ann. Phys., **243**, 144, 1995.
36. *Evans N. W.* Phys. Rev., **A41**, 5666, 1990; J. Math. Phys., **32**, 3369, 1991; Phys. Lett., **A147**, 483, 1990.
37. *Bargmann V.* Zeitschr. Physik, **99**, 576, 1936.
38. *Fock V.* Zeitschr. Physik, **98**, 145, 1935.
39. *Moshinsky M.* The Harmonic Oscillator in Modern Physics, from Atoms to Quarks. Gordon & Breach, New York, 1969.
40. *Grosche C.* Path Integrals, Hyperbolic Spaces and Selberg Trace Formulas. World Scientific, Singapore, 1995.
41. *Perelomov A. M.* Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras. Birkhausen, Basel, 1990.
42. *Kalnins E. G., Miller W., Jr., Pogosyan G. S.* J. Math. Phys., **37**, 6439, 1996.

Параллельный перенос спина в пространстве Лобачевского

Я. А. Смородинский

1. Введение

Существует много работ (см. [1–5]), посвященных изложению релятивистских преобразований спина. В этих работах спин или, вернее, его среднее значение — поляризация частицы рассматривается обычно как псевдовектор с четырьмя компонентами, удовлетворяющий условию ортогональности к 4-скорости самой частицы. Спин в системе покоя частицы представляет собой трехмерный псевдовектор, четвертая компонента которого тождественно равна нулю в этой системе координат. В любой другой системе отсчета компоненты спина определяются лоренцовым преобразованием; они выражаются формулами

$$\boldsymbol{\omega} \to \frac{(\boldsymbol{\omega}\mathbf{v})\mathbf{v}}{1+\gamma} + \boldsymbol{\omega}, \quad \omega_0 \to \boldsymbol{\omega}\mathbf{v}. \tag{1.1}$$

Здесь $\gamma = \varepsilon/m$; $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$; ε, p — 4-импульс частицы. Формулы (1.1) справедливы, конечно, и для преобразований классического вектора угловой скорости.

Полученный таким образом 4-вектор остается, очевидно, ортогональным 4-скорости, так что он по-существу по-прежнему имеет только три (и притом пространственно-подобные) независимые компоненты. Хотя такое определение 4-вектора спина и правильно, оно представляется неудовлетворительным с физической точки зрения. Задавая три величины в избранной системе координат (в системе покоя в нашем случае), мы должны для определения спина в любой системе координат условиться о его трансформационных свойствах. Принимая, что ω — псевдовектор, мы приходим к (1.1).

Можно считать спин антисимметричным тензором, от которого в системе покоя остались только три компоненты, тогда мы придем к другому определению спина. Можно, наконец, считать компоненты спина в системе покоя компонентами тензора более высокого порядка и также прийти к логически замкнутой схеме. В то же время очевидно, что все эти определения должны быть физически эквивалентными. Преобразование (1.1) зависит от скорости частицы и включает в определение спина орбитальное движение; при другом определении спина скорость будет входить в формулы другим способом, это и приведет к другим трансформационным свойствам.

Далее, определение спина в системе покоя требует отдельного рассмотрения частиц с массой нуль, которое хотя и не приводит к новым результатам, но все же выходит за рамки единой схемы. Наконец, развитие теории спина на основе (1.1) приводит к громоздким и далеко не очевидным правилам сложения спинов нескольких частиц (определение этих правил и составляет основное содержание большинства опубликованных работ).

Можно еще добавить, что вопрос о разделении спина и орбиты (для классификации состояний) почему-то оказался в релятивистской теории не столь тривиальным,

каким он был в теории нерелятивистской. В то же время ясно, что переход к равномерно движущейся системе координат[1] не может внести ничего физически нового в свойства спина, кроме простых кинематических поправок, а потому естественным было попытаться найти другую схему описания спина, которая по-возможности была бы ближе к обычной нерелятивистской теории.

Идея такого описания основывается на том, что спин преобразуется на самом деле не по представлению полной группы Лоренца, а по представлению малой группы, которая изоморфна трехмерной группе вращения. Отсюда сразу следует, что в любой системе координат вектор спина может быть представлен 3-вектором. Для этого следует лишь совершить такое преобразование, которое обращает в нуль четвертую компоненту ω_0.

Это очень просто сделать, если воспользоваться красивым аппаратом геометрии Лобачевского в пространстве скоростей[2]. Нужное нам преобразование спинов есть не что иное как параллельный перенос вектора спина вдоль геодезической линии на поверхности гиперболоида скоростей (с псевдоевклидовой метрикой).

После того как преобразование свелось к параллельному переносу, теория релятивистского спина оказывается совсем простой. Действительно, если спины можно параллельно переносить в любую систему (при этом не существенно, отлична ли масса от нуля или нет), их можно складывать по правилам обычной нерелятивистской теории. При этом разделение спинов от орбиты происходит наиболее естественным образом.

Если совершить параллельный перенос по замкнутому контуру, то в силу свойств пространства Лобачевского мы вернемся в исходную систему с повернутой системой координат (в сторону, обратную направлению обхода). Нетрудно убедиться, что в этом случае результат совпадает с произведением последовательных преобразований Лоренца, а потому при вычислениях физических эффектов результаты, полученные параллельным переносом и при помощи преобразования Лоренца, совпадут. В итоге оказывается, что для величин, преобразующихся по малой группе (тензоры поляризации, мультипольные моменты системы зарядов, формфакторы [9]), следует использовать при переходе из одной системы координат в другую параллельный перенос, а не обычное преобразование Лоренца.

Отметим, что в недавно опубликованной работе Вик [10] развил близкие идеи, использовав классификацию частиц по спиральностям для построения волновых функций из трех частиц. Выбор оси квантования по взаимной скорости двух систем представляет собой простейший случай параллельного переноса вектора, составляющего нулевой угол с геодезической. В этой работе выбор удобных параметров сразу же приводит к значительному упрощению задачи.

2. Параллельный перенос вектора и спинора

Мы получим все существенные результаты, рассмотрев преобразование спинора и вектора. Начнем со спинора. Рассмотрим спинор, описывающий свободную частицу, движущуюся относительно некоторой системы координат со скоростью v. (Здесь и дальше v будет обозначать 4-скорость, так что $v = p/m$ и $v_0^2 - \mathbf{v}^2 = 1$[3].)

---

[1] Для движения не по прямой возникает, как известно, кинематическая связь спина с орбитой (томасовская прецессия), к которой мы еще вернемся ниже.

[2] Использование геометрии Лобачевского для описания кинематики является заслугой Зоммерфельда и Клейна [6, 7]. В последнее время эти идеи возрождены в работах Черникова [8].

[3] Удобно пользоваться именно 4-скоростью, так как в этом случае в формулы не входит масса частицы.

Этот спинор (для состояния с положительной энергией) имеет вид

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}}{1+\gamma} \quad \varphi \end{pmatrix},$$

если через φ обозначен паулевский двухкомпонентный спинор, а γ — лоренцовский фактор.

Преобразование, которое приводит спинор к виду

$$u_0 = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

совпадает с обратным преобразованием Лоренца, переводящим спинор в систему покоя частицы $\boldsymbol{R}$:

$$L^{-1} = \exp\left\{-\frac{i}{2|\mathbf{v}|}\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}\,\mathrm{Arth}\,|\mathbf{v}|\gamma\right\} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{v}}{1+\gamma}\right), \tag{2.3}$$

$$L^{-1}u = u_0. \tag{2.4}$$

Напомним, что L неунитарно и что

$$L^{-1} = \beta L^{+}\boldsymbol{\beta}. \tag{2.5}$$

Существует еще одно преобразование, обладающее тем же свойством, — преобразование Фолди—Востхойзена [11]:

$$F = \exp\left\{-\frac{i}{2|\mathbf{v}|}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}\,\mathrm{arctg}\,|\mathbf{v}|\right\} = \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\mathbf{v}}{1+\gamma}\right), \tag{2.6}$$

$$Fu = u_0 \tag{2.7}$$

(с точностью до нормировки). Это преобразование унитарно:

$$FF^{+} = 1. \tag{2.8}$$

Оно оставляет инвариантным плотность заряда $\psi^{+}\varphi$, в то время как L оставляет инвариантным скаляр $\bar{\varphi}\psi$. Произведение обоих преобразований

$$FL^{-1} = \beta\gamma^{1/2} \tag{2.9}$$

меняет (для состояния с положительной энергией) лишь нормировку спинора.

Для понимания физического смысла этих формул удобно использовать пространство Лобачевского. Рассмотрим четырехмерное пространство, точке которого мы будем сопоставлять 4-скорость. Благодаря условию

$$v^2 = 1 \tag{2.10}$$

все точки будут лежать на одной из полостей двуполостного гиперболоида. Группа движений трехмерной поверхности такого гиперболоида изоморфна, как известно, группе Лоренца. Геометрия на этой поверхности отвечает геометрии векторов скорости в специальной теории относительности.

Отметим две формулы. Скалярное произведение двух векторов скорости — длина геодезической (гиперболы) между двумя точками на поверхности a_{12} — определяется так:

$$v_1v_2 = \mathrm{ch}\,a_{12} = \gamma, \tag{2.11}$$

где γ — лоренцовский фактор, отвечающий относительной 3-скорости v_{12}.

Нам будет еще нужна формула для площади прямоугольника на гиперболоиде. Она выражается через гиперболический дефект (A, B, C — углы треугольника):

$$\Omega = \pi - A - B - C; \tag{2.12}$$

одна из формул для дефекта имеет вид

$$\cos\varphi = \frac{1 + \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} c}{4 \operatorname{ch}(a/2) \operatorname{ch}(b/2) \operatorname{ch}(c/2)}. \tag{2.13}$$

Вектор спина частицы нормален к ее скорости [4], т. е. к радиусу-вектору; поэтому он лежит в гиперплоскости (трехмерной), которая касается гиперболоида в точке R_1, отвечающей этой скорости. В новой системе координат — назовем ее R_2, — скорость которой отвечает другой точке гиперболоида, пространственные оси лежат в новой касательной гиперплоскости (а времениподобная ось нормальна к гиперболоиду). Проекция вектора спина на новые оси и приводит к появлению четвертой компоненты (1.1). Такую же природу имеют и две нижние компоненты спинора.

Нетрудно видеть, что, не расставаясь с новой системой R_2, можно повернуть вектор спина так, что все три пространственные компоненты улягутся на касательную гиперповерхность в системе R_2. Возможность такого преобразования следует из пространственно-подобного характера вектора спина. Таким преобразованием поворота для спинора и служит преобразование (2.6).

Для иллюстрации преобразования (2.6) напомним, что переход от спинора (2.2) к спинору (2.1) есть гиперболический поворот в плоскости $(v_0, \mathbf{v})$ на угол $\alpha = \operatorname{Arch}\gamma$. При этом единичный пространственно-подобный вектор (0,1) приобретает компоненты $(\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{ch}\alpha) = (v\gamma, \gamma)$. Если теперь совершить в той же плоскости обычный поворот на угол $\beta = \arccos(1/\gamma)$, то пространственная компонента станет равной опять единице. Это и передает геометрический смысл углов в формулах (2.3) и (2.6) [5].

В связи с преобразованием Фолди—Востхойзена можно отметить еще одно унитарное преобразование, рассмотренное в работе Чини и Тушека [13] (ср. также [14]). В плоскости $(v_0, \mathbf{v})$ можно произвести поворот на любой угол; эти повороты порождают группу преобразований (отличную от группы Лоренца). Преобразование Чини—Тушека отвечает такому повороту, который обращает в нуль пространственную компоненту вектора. Согласно сказанному выше, это будет поворот (в обратную сторону, по сравнению с поворотом Фолди—Востхойзена) на угол $\arcsin(1/\gamma) = \operatorname{arctg}(1/|\mathbf{v}|)$.

Преобразование записывается так:

$$C = \exp\left\{\frac{i}{2}\frac{\beta\alpha\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\operatorname{arctg}\frac{1}{|\mathbf{v}|}\right\} = \left(\frac{1+|\mathbf{v}|}{2}\right)^{1/2}\left[1 - \beta\alpha\mathbf{v}\left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} - 1\right)\right]. \tag{2.14}$$

Если ввести еще поворот на угол $\pi/2$:

$$U = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\frac{\alpha\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\beta\alpha\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right), \tag{2.15}$$

то из сказанного ясно, что

$$C = UF. \tag{2.16}$$

[4] Метрика на гиперболоиде псевдоевклидова. На сфере с радиусом i вектор спина нормален радиусу в обычном смысле.

[5] Мы определили два аргумента: угол β и гиперболический угол α. Для них справедливо соотношение $\operatorname{th}(\alpha/2) = \operatorname{tg}(\beta/2)$. В гипергеометрической геометрии β называют гудерманианом α : $\beta = \operatorname{gd}\alpha$; $\operatorname{gd}\alpha$ связан с углом параллельности Лобачевского $\Pi(\alpha)$ соотношением $\operatorname{gd}\alpha = \pi/2 - \Pi(\alpha)$ (см. [12]).

Преобразование Лоренца можно записать в более общем виде. Именно, преобразование Лоренца, переводящее спинор из системы, имеющей скорость v, в систему, имеющую скорость u, записывается в виде

$$L^{-1} = \left(\frac{1+uv}{2}\right)^{1/2}\left[1 + i\frac{\sigma_{\alpha\beta}u_\alpha v_\beta}{1+uv}\right]. \tag{2.17}$$

Для вектора преобразование параллельного переноса между точками u и v записывается в еще более простом виде

$$F_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{2V_\alpha V_\beta}{V^2}, \quad V_\alpha = u_\alpha + v_\alpha. \tag{2.18}$$

Оно обладает следующими свойствами:

$$F^2 = 1, \quad Fu = -v, \quad Fv = -u. \tag{2.19}$$

Легко проверить, что F переводит вектор, ортогональный к v, в вектор, ортогональный к u. Преобразование Лоренца в тех же обозначениях имеет вид (ср. [17])

$$L_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{2V_\alpha V_\beta}{V^2} + 2u_\alpha v_\beta. \tag{2.20}$$

Нетрудно проверить, что в системе $u = (1, 0)$ формула (2.20) дает обычную матрицу Лоренца.

Интересно посмотреть, во что переходит преобразование (2.18) для фотона. Для того чтобы перейти к пределу скорости света, удобно ввести q и p — импульсы фотона и системы координат. Тогда, учитывая, что $eq = 0$, легко находим

$$F_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha q_\beta}{pq}, \tag{2.21}$$

и для преобразования вектора поляризации е (двухкомпонентного) имеем

$$e \to e - (ep)\frac{q}{pq}. \tag{2.22}$$

Это есть градиентное преобразование, рассмотренное в [15].

Таким образом, в случае фотона параллельный перенос сводится к градиентному преобразованию, которое оставляет свободный фотон двухкомпонентным в произвольной системе координат. Обратим внимание, что (2.21) оставляет инвариантным сам вектор q:

$$Fq = q. \tag{2.23}$$

Это связано с тем, что q ортогонален сам себе в неевклидовой метрике $qq = 0$.

3. Рассеяние частиц

Картина параллельного переноса делает очевидным преобразования спинов при рассеянии частиц. В системе центра инерции рассеяние описывается обычной матрицей, которой пользуются в нерелятивистской теории. При этом спиновые операторы действуют на волновые функции (или элементы матрицы плотности), параллельно перенесенные из системы покоя в систему центра инерции. Формально это означает, что матрица рассеяния и матрица плотности преобразуются по формуле

$$S \to FSF^+, \tag{3.1}$$

$$\rho \to F^+\rho F, \tag{3.2}$$

после чего они принимают нерелятивистский вид (может быть с другой нормировкой).

При такой операции «система покоя» фотона или нейтрино — бесконечно удаленная точка пространства Лобачевского — ничем не отличается от точек, находящихся на конечном расстоянии, и спины этих частиц не требуют особого рассмотрения. Поэтому формулы для рассеяния в системе центра инерции могут отличаться от соответствующих нерелятивистских формул только нормировкой.

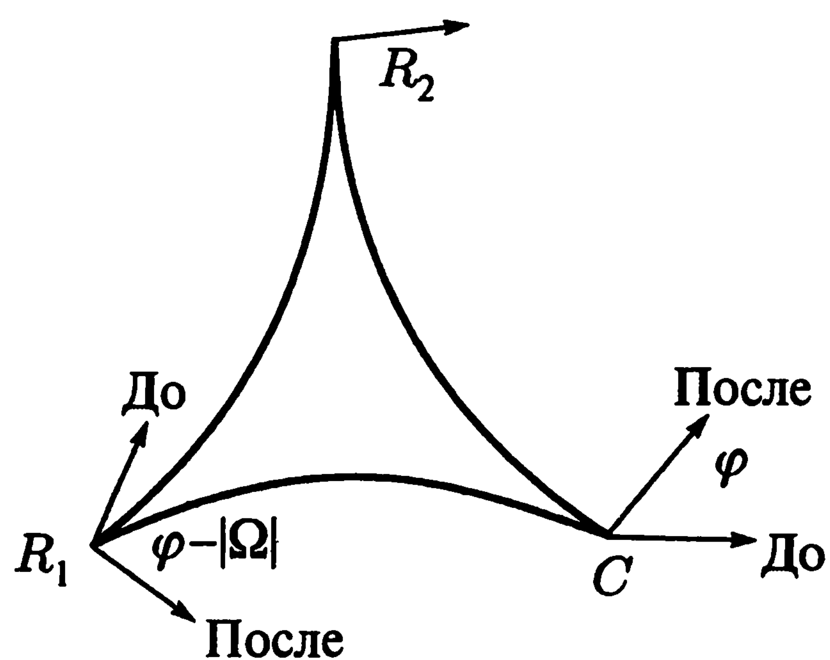


Рис. 1

Для того чтобы выяснить, как поворачивается спин в другой системе, рассмотрим гиперболический треугольник на рис. 1 (он использовался в работах Стэппа [4] и Вика [10]). Три вершины его соответствуют трем системам координат — лабораторной (системе мишени R_1), системе центра инерции C и системе покоя рассеянной частицы R_2. Описание рассеяния происходит следующим образом. Спин из R_1 параллельно переносится в C. В системе C он поворачивается на некоторый угол φ с помощью обычной матрицы рассеяния и переносится в систему R_2. Из системы R_2 происходит еще один параллельный перенос в систему R_1 — в результате мы получаем вектор поляризации после рассеяния в лабораторной системе. Очевидно, что угол поворота в этой системе ψ отличается от угла φ в системе C на гиперболической дефект Ω (он отсчитывается в сторону против часовой стрелки при расположении систем, указанном на рис. 1, т. е. в направлении, противоположном углу рассеяния в системе R_1). Компонента спина, нормальная плоскости треугольника, остается при таком переносе неизменной. Таким образом, мы получаем без вычислений

$$\psi = \varphi - |\Omega| \tag{3.3}$$

(ψ — угол поворота поляризации в системе R_1, φ — тот же угол в системе C).

Поворот происходит вокруг нормали к плоскости рассеяния, которую можно определить ковариантно, как вектор

$$N_\delta = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} R_{1\alpha} R_{2\beta} C_\gamma, \tag{3.4}$$

где R_1, R_2 и C — 4-скорости трех систем. Этот вектор в каждой из трех систем имеет только три пространственные компоненты.

Гиперболический треугольник позволяет непосредственно рассчитать и другие геометрические характеристики. Например, для рассеяния нуклона нуклоном стороны R_2C (скорость частицы в с. ц. и.) и R_1R_2 (скорость системы C относительно лабораторной) равны. Поэтому

$$\angle R_1 = \angle R_2. \tag{3.5}$$

Но угол R_2 равен разности углов между направлениями поляризации и импульса частицы в системе C и лабораторной. Угол же R_1 есть угол рассеяния в лабораторной системе. Это и есть «релятивистский поворот», полученный Стэппом [4]. Если угол R_2 стремится к нулю, т. е. скорость частицы стремится к скорости света, то из треугольника видно, что частица с массой нуль продольно поляризована в любой системе координат[6].

[6] Если рассмотреть гиперболический треугольник, составленный из 3-скорости частицы $\mathbf{V}$ и ее 3-ускорения $\dot{\mathbf{V}}$, то площадь такого треугольника определяет томасовскую процессию волчка (ср. [16]):

$$\Omega = -\gamma(1+\gamma)^{-1}[\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}] \approx -\frac{1}{2}[\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}].$$

4. Сложение спинов

После того как определена операция переноса спина из одной системы координат в другую, при которой спин остается 3-вектором, сложение спина практически сводится к правилам нерелятивистской механики.

Если у нас есть система из нескольких частиц, то их спины всегда можно перенести параллельно в одну из систем. При таком переносе оси квантования для разных частиц, вообще говоря, не будут параллельны, и перед сложением их надо будет с помощью обычных коэффициентов $D_M J_{M'}$, привести к одному направлению. После этого задача сводится к сложению моментов частиц без спина, к которым уже потом следует добавить суммарный спин. Чтобы определить направление осей квантования для разных частиц, проще всего условиться о соответствии осей следующим образом. Одна из осей определяется вдоль относительной 3-скорости частицы и системы C, в которую переносится спин [7]. Вторая ось определяется как нормаль N_γ к плоскости, проходящей через частицу, систему C и еще какую-нибудь систему (лаборатории или ц. и.). Третья ось выбирается ортогональной (в трехмерном смысле) к построенным двум в каждой из систем в отдельности. Такая процедура и есть параллельный перенос. Зная направление оси квантования в этих координатах в системе покоя частицы, мы тем самым определяем ее и в системе C. Дальнейшие действия уже стандартны.

Вик в своей работе [10] выбирает оси квантования вдоль импульсов, т. е. вдоль выбранной нами первой оси. Поэтому метод спиральных амплитуд Вика реализует одну из возможностей параллельного переноса. Выбор системы C зависит от условий задачи и соотношения между разными схемами сложения определяются из элементарных геометрических соотношений.

Автор благодарен Н. А. Черникову и В. Л. Любошицу за интересные обсуждения геометрических вопросов.

Литература

1. *Широков М. И.* ЖЭТФ, **40**, 1387, 1961.
2. *Широков Ю. М.* ЖЭТФ, **35**, 1005, 1958.
3. *Ритус В. И.* ЖЭТФ, **40**, 352, 1961.
4. *Stapp H. P.* Phys. Rev., **103**, 425, 1956.
5. *Tolhouk H. A.* Rev. Mod. Phys., **28**, 277, 1957.
6. *Sommerfeld A.* Phys. Zs., **10**, 826, 1909; *А. Зоммерфельд.* Электродинамика, М., 1958. С. 322.
7. *Клейн Ф.* Сб. Новые идеи в математике. **5**, СПБ., 1909. С. 144.
8. *Черников Н. А.* Научные доклады высшей школы, **2**, 158, 1958.
9. *Любошиц В. Л.* ЖЭТФ, **44**, 1, 1963.
10. *Wick G. C.* Ann. of Phys., **18**, 65, 1962.
11. *Foldy L. L.*, *Wouthuysen S. A.* Phys. Rev., **78**, 29, 1950.
12. *Рыжик И. М.*, *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведении. Гостехиздат, 1951.
13. *Cini M.*, *Touschek B.* Nuovo Cim., **7**, 422, 1958.
14. *Bose S. K.*, *Gamba A.*, *Sudarshan E. C. G.* Phys. Rev., **113**, 1661, 1959.
15. *Бадалян А. М.*, *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **40**, 1232, 1961.
16. *Moller C.* Theory of Relativity. Oxford, 1952. P. 56.
17. *Bacry H.* Thomas classical theory of spin. Preprint, 1962.

---

[7] Система C может и не быть системой центра инерции. Система центра инерции удобна, например, в случае рассеяния нуклон — нуклон, в которой из-за зарядовой симметрии полный спин сохраняется и в релятивистском случае. Если складывать спины, преобразованные по формуле (1.1), то триплетные и синглетные состояния перепутываются.

Инвариантные разложения релятивистских амплитуд

Н. Я. Виленкин, Я. А. Смородинский

1. Введение

При использовании свойств релятивистских инвариантных функций, в частности амплитуды рассеяния, обычно не используются геометрические свойства того многообразия (пространства скоростей), на котором эти функции заданы.

Пространство 4-скоростей в теории относительности, как известно, описывается геометрией Лобачевского. Геометрические свойства пространства определяют те свойства амплитуды рассеяния, которые не зависят от конкретного вида взаимодействия и относятся к ее кинематическим свойствам. Так как пространство скоростей обладает постоянной отрицательной кривизной (равной $1/c$), то кинематические свойства релятивистской амплитуды приводят к ряду интересных задач.

Одной из таких задач является исследование инвариантных разложений функций.

Известно, что в нерелятивистской теории переменные в уравнении Шредингера (или, что то же, в операторе Лапласа) разделяются в любой ортогональной эллиптической системе координат. Частными случаями таких систем являются прямоугольная, цилиндрическая и сферическая. В этих трех системах функции разлагаются соответственно в интеграл Фурье, или по функциям Бесселя или по сферическим функциям. Разложение в других системах приводит к более сложным функциям (например, в задаче о рассеянии в кулоновом поле, рассмотренной в параболических координатах).

Релятивистская амплитуда разлагается в интеграл Фурье в четырехмерном пространстве; при этом связь компонент вектора 4-импульса (или 4-скорости) обеспечивается включением δ-функции. Удобно, однако, использовать только независимые компоненты скорости и перейти от пространства Минковского к пространству Лобачевского, которое реализуется на верхней поле двухполостного гиперболоида $u^2 = 1$.

В настоящей работе мы и рассмотрим задачу о разложении релятивистских функций в ряды и интегралы по собственным функциям оператора Лапласа в пространстве Лобачевского.

Задача состоит в изучении оператора Лапласа на двухполостном гиперболоиде (угловой части оператора Даламбера) в различных системах координат. Позже будет рассмотрена аналогичная задача для однополостного[1] гиперболоида. При исследовании этих задач очень полезно использовать геометрические образы, делающие наглядными весь путь рассуждений. Существенную роль в этом изложении играет разложение на конусе, полученное впервые Шапиро [1, 2]. Гельфанд и Граев [3, 4], использовав методы интегральной геометрии, построили общую теорию таких разложений. Эти методы позволяют перейти от изучения функций на гиперболоиде к изучению функций на конусе, где разложения по сути дела сводятся к обычному

[1] Однополостной гиперболоид отвечает нефизической области переменных, что также представляет интерес.

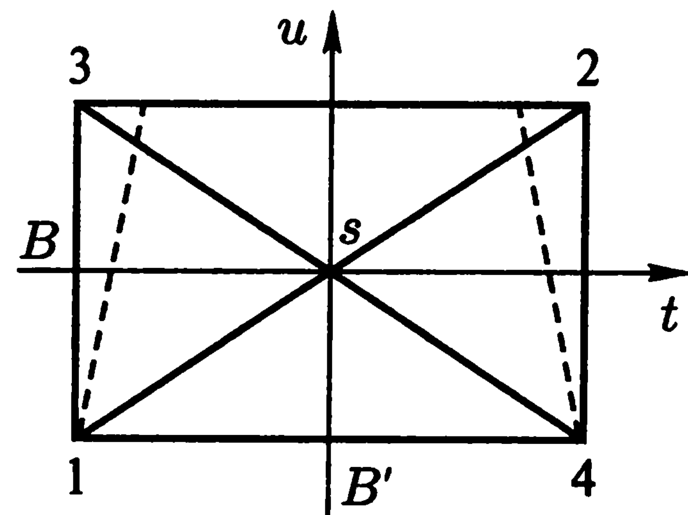
преобразованию Фурье. При этом устанавливается связь с теорией представлений группы Лоренца[2].

Построенные системы собственных функций представляют собой обобщения нерелятивистских систем — сферической, цилиндрической и декартовой. Однако одна из описанных здесь систем, названная в работе цилиндрической, не имеет аналога в нерелятивистской механике. Ее собственные функции не выражаются через функции Лежандра и Бесселя, а выражаются через гипергеометрическую функцию общего вида.

Функция, заданная на конусе ($k^2 = 0$), описывает частицу с массой нуль. Поэтому можно сказать, что задача данной работы состоит в нахождении разложения амплитуды частицы с массой, не равной нулю, по амплитудам частицы с $m = 0$.

2. Амплитуда рассеяния

Рассеяние частиц, или бинарная реакция, описывается функцией от четырех переменных — скоростей двух частиц в начальном и двух в конечном состояниях. Из двенадцати скалярных переменных десять могут быть выбраны произвольно вследствие инвариантности амплитуд относительно преобразований группы Лоренца. Удобным способом описания кинематики оказалась рассмотренная в предыдущих работах [7, 8] кинематическая диаграмма. Скорости четырех частиц изображаются четырьмя точками на верхней половине однополостного гиперболоида. В силу инвариантности образовавшийся таким образом четырехугольник можно расположить любым образом (для этого используются шесть параметров). Будем располагать его так, чтобы центр его находился в вершине гиперболоида — точка с координатами $(1, 0, 0, 0)$. Одну из осей координат направим по нормали к гиперболоиду, две другие оси построим следующим образом. Три 4-вектора[3] $A_s = p_1 + p_2$, $A_t = p_1 - p_4$ и $A_u = p_1 - p_3$ и им ортогональный 4-вектор A_m образуют ортогональную систему координат. Линии пересечения этих координатных поверхностей с нашим гиперболоидом мы и выберем за оси координат на нем.



Четырехугольник скоростей изображен на рисунке. Точки 1, 2 отвечают скоростям частицы до рассеяния, точки 4, 3 — скоростям после рассеяния. Точка s есть скорость центра инерции системы. Одна из координатных осей делит угол рассеяния пополам. Как было показано в [8], точки пересечения сторон 14 и 23 лежат на однополостном гиперболоиде и отвечают скорости центра инерции кросс-реакции. В случае равных масс точка пересечения сторон 13 и 24 отвечает скорости центра инерции u-канала. В этом случае координатные оси совпадают с направлениями линий st и su, и три точки s, t, u образуют так называемый автополярный треугольник. В случае неравенства масс (пунктирные линии на рисунке) связь координатных осей с u-системой не столь наглядна.

Направление координатных осей A_s, A_t, A_u и A_n изменяется с изменением энергий и углов рассеяния. Задание скорости одной из частиц (например, первой) в такой системе координат полностью определяет остальные три скорости — для этого надо использовать законы сохранения энергии-импульса (еще четыре параметра группы Лоренца).

[2] Разложение релятивистских функций изучалось также Долгиновым [5, 6], но в его работах не была построена вся система функций.

[3] Квадраты $A_s^2 = s$, $A_t^2 = t$ и $A_u^2 = u$ суть переменные Мандельстама.

Таким образом, аргумент амплитуды рассеяния задается положением точки на гиперболоиде в системе, заданной векторами A. Условимся угол между направлением скорости и одной из осей обозначать через $\theta/2$ (θ — угол рассеяния, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). Координаты точки 1 можно выбрать разными способами. Это и приводит к различным системам собственных функций.

3. Система координат и оператор Даламбера

Как мы уже говорили, пространство скоростей Лобачевского реализуется в форме трехмерной поверхности верхней полости двухполостного гиперболоида $u^2 = 1$ в пространстве Минковского. Рассечем такой гиперболоид плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей. В сечении мы получим опять гиперболоид (двумерную поверхность), если плоскость не проходит через ось 0, либо двумерную сферу, если плоскость пересекает эту ось. Во втором случае, мы можем построить на сфере сферическую координатную систему. В случае гиперболоида можно продолжить рассечение двумя способами — по окружности или по гиперболе. Таким образом, мы получим еще две гиперболические системы координат, которым, как мы увидим, отвечают разные собственные функции оператора Даламбера.

Существует еще одна система координат, связанная с тем, что в пространстве Минковского можно построить две ортогональные друг другу плоскости — одну с евклидовой метрикой, другую с псевдоевклидовой. Строя в первой плоскости полярную систему координат, а во второй — гиперболическую, получим четвертую систему координат пространства Лобачевского, которую можно назвать (по причинам, которые будут ясны из дальнейшего) цилиндрической. Этими системами исчерпываются все ортогональные системы, координатные поверхности которых суть сферы или гиперболоиды (гиперсферы в пространстве Лобачевского, т. е. сферы с центром в мнимом пространстве Лобачевского — на однополостном гиперболоиде). Если поместить центр сферы на световой конус, то координатной поверхностью будет так называемая орисфера — поверхность, геометрия которой изоморфна геометрии евклидовой плоскости. Такая орисферная система координат также будет описана в этой работе.

Физический смысл описанных систем координат легко понять, если заметить, что переход из одной системы отсчета в любую другую можно совершить с помощью трех преобразований, по крайней мере одно из которых есть преобразование Лоренца.

В сферической системе координат точка характеризуется двумя пространственными поворотами и одним лоренцевым, остальные системы содержат два или три преобразования Лоренца. Заметим, что для описания бинарных реакций без спинов, амплитуда которых не зависит от одного (пространственного) угла, чисто гиперболическая система координат (три лоренцевых поворота) неудобна[4].

Системы координат в пространстве скоростей мы будем описывать, задавая четыре однородные декартовы координаты скорости u_0, $\mathbf{u}$ через углы. Так как при этом трехмерная точка задается четырьмя числами, то эти числа представляют собой проективные координаты точки. Наряду с проективными координатами введем неоднородные координаты, получаемые делением проективных координат на u_0.

Так как отношения u_i/u_0, $i = 1, 2, 3$ изменяются в пределах от 0 до 1, то удобно их обозначать через $\operatorname{th} z_i$, где уже $0 \leqslant z_i \leqslant \infty$. Таким образом, в качестве

[4] Вопрос о системах координат, в которых разделяются переменные уравнения Клейна—Гордона, был рассмотрен в работах Олевского [9] и Шума [10].

неоднородных координат мы выберем координаты z_i, определяемые формулой

$$\operatorname{th} z_i = \frac{u_i}{u_0} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{3.1}$$

Наконец, условимся обозначать углы пространственных поворотов греческими буквами, а гиперболические углы — латинскими.

Перейдем теперь к описанию систем координат.

Сферическая система S

Система S задается формулами

$$\begin{aligned} u_0 &= \operatorname{ch} a, & u_2 &= \operatorname{sh} a \sin\theta \cos\varphi, \\ u_3 &= \operatorname{sh} a \cos\theta, & u_1 &= \operatorname{sh} a \sin\theta \sin\varphi, \end{aligned} \tag{3.2}$$

или

$$\operatorname{th} z_3 = \operatorname{th} a \cos\theta, \quad \operatorname{th} z_2 = \operatorname{th} a \sin\theta \cos\varphi, \quad \operatorname{th} z_1 = \operatorname{th} a \sin\theta \sin\varphi. \tag{3.3}$$

Неоднородные координаты совпадают с трехмерными сферическими координатами, в которых роль радиуса-вектора играет $\operatorname{th} a$. Поэтому формулы в системе S оказываются наиболее похожими на нерелятивистские. Оператор Даламбера в четырехмерном пространстве Минковского можно записать в виде

$$\Box = \frac{1}{U^3} \frac{\partial}{\partial U} U^3 \frac{\partial}{\partial U} - \Delta_L, \tag{3.4}$$

где U — длина 4-вектора в пространстве Минковского, а Δ_L — оператор Лапласа на гиперболоиде[5], собственные функции которого мы должны найти.

В системе S

$$\Delta_L = \operatorname{sh}^{-2} a \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{sh}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{sh}^{-2} a \left(\sin^{-1}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \sin^{-2}\theta \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right). \tag{3.5}$$

Гиперболические системы координат (система Лобачевского L)

Гиперболическая система координат была рассмотрена еще Лобачевским, и соответствующие координаты называются координатами Лобачевского (координаты a, b и c):

$$\begin{aligned} u_0 &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c, & u_3 &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{sh} c, \\ u_2 &= \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b, & u_1 &= \operatorname{sh} b; \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\operatorname{th} z_3 = \operatorname{th} c, \quad \operatorname{th} z_2 = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{ch} c}, \quad \operatorname{th} z_1 = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c}. \tag{3.7}$$

Однородные координаты u_0, u называются координатами Вейерштрасса. В этой системе все три угла — гиперболические.

Оператор Лапласа определяется формулой

$$\Delta_L = \operatorname{ch}^{-2} a \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{ch}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{ch}^{-2} a \left(\operatorname{ch}^{-1} b \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{ch} b \frac{\partial}{\partial b} + \operatorname{ch}^{-2} b \frac{\partial^2}{\partial c^2} \right). \tag{3.8}$$

[5] Т. е. оператор второго порядка на гиперболоиде, коммутирующий с преобразованиями Лоренца.

Гиперболическая система H

Эта система отличается от предыдущей тем, что в ней один угол пространственный:

$$u_0 = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b, \qquad u_3 = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \cos\varphi,$$
$$u_2 = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \sin\varphi, \qquad u_1 = \operatorname{sh} a \tag{3.9}$$

и неоднородные координаты имеют вид

$$\operatorname{th} z_3 = \operatorname{th} b \cos\varphi, \quad \operatorname{th} z_2 = \operatorname{th} b \sin\varphi, \quad \operatorname{th} z_1 = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{ch} b}. \tag{3.10}$$

В неоднородных координатах система координат похожа на цилиндрическую с радиусом-вектором (в плоскости) $\operatorname{th} b$. Координатная плоскость $z_1 = 0$ ортогональна оси z_1, и расстояние a измеряется от этой плоскости.

Для оператора Лапласа получим

$$\Delta_L = \operatorname{ch}^{-2} a \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{ch}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{ch}^{-2} a \left(\operatorname{sh}^{-1} b \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{sh} b \frac{\partial}{\partial b} + \operatorname{sh}^{-2} b \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \tag{3.11}$$

Цилиндрическая система C

Система C очень похожа на H:

$$u_0 = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} a, \qquad u_3 = \operatorname{sh} b \cos\varphi,$$
$$u_2 = \operatorname{sh} b \sin\varphi, \qquad u_1 = \operatorname{ch} b \operatorname{sh} a. \tag{3.12}$$

Сходство обнаруживается при записи в неоднородных координатах:

$$\operatorname{th} z_3 = \operatorname{th} b \cos\varphi, \quad \operatorname{th} z_2 = \operatorname{th} b \sin\varphi, \quad \operatorname{th} z_1 = \operatorname{th} a. \tag{3.13}$$

Мы видим, что отличие заключено в третьей (аксиальной) координате. В системе C расстояние между плоскостями отсчитывается по оси цилиндра, так что координатными поверхностями служат эквидистантные поверхности.

Оператор Δ_L в этой системе имеет вид

$$\Delta_L = \operatorname{ch}^{-1} b \operatorname{sh}^{-1} b \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{ch} b \operatorname{sh} b \frac{\partial}{\partial b} + \operatorname{ch}^{-2} b \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \operatorname{sh}^{-2} b \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{3.14}$$

Орисферическая система координат O

Наконец, рассмотрим орисферическую систему координат:

$$u_0 = \frac{1}{2}\left[e^{-a} + (r^2+1)e^a\right], \qquad u^3 = \frac{1}{2}\left[e^{-a} + (r^2-1)e^a\right],$$
$$u_2 = re^a \cos\varphi, \qquad u_1 = re^a \sin\varphi. \tag{3.15}$$

В этой системе координат при постоянном a координатная поверхность является орисферой в пространстве Лобачевского.

Оператор Лапласа в орисферической системе координат имеет следующий вид:

$$\Delta_L = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2\frac{\partial}{\partial a} + e^{-2a}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \tag{3.16}$$

Нетрудно видеть, что из системы O можно получить систему C следующим преобразованием координат:

$$re^a = \operatorname{sh} b, \qquad \frac{e^a}{\operatorname{ch} b} = \operatorname{ch} a_C, \tag{3.17}$$

где через a_C обозначена координата a в (3.12). После преобразования (3.17) системы будут отличаться только перестановкой осей.

Рассмотрим теперь кинематическую диаграмму во введенных системах координат. Так как мы ограничиваемся бинарными реакциями и, соответственно, только плоскими диаграммами, то систему Лобачевского мы разбирать не будем.

В системе S координатами будут угол θ (половина угла рассеяния в системе ц. и.) и длина $s1$, которая определяет энергию частицы 1 в системе ц. и.

В системе H точка 1 определяется отрезком sB' — скоростью системы Брейта относительно системы ц. и. и длиной отрезка $B'1$, которая определяет энергию этой частицы в системе Брейта.

В системе C частица 1 задается отрезком sB — скоростью системы Брейта отдачи (системы, в которой равна нулю сумма импульсов частицы 1 и частицы отдачи). Системы S, H и C отражают, таким образом, симметрию s-, t- и u-каналов.

В системе O координата a есть расстояние до орисферы с центром в точке $k(1,1,0,0)$, определяемое формулой $a = \ln(ku)$. Скалярное произведение типа ku часто используется в качестве независимой переменной в задачах квантовой электродинамики. Две другие переменные u_2 и u_1 определяют вместе с a инвариантную прямоугольную трехмерную декартову систему в пространстве Лобачевского.

4. Собственные функции

В этом разделе мы получим собственные функции оператора Лапласа на гиперболоиде в пяти системах S, L, H, C и O. Мы используем для этой цели обычный метод разделения переменных. Как известно (ср. [11, 12]), собственные значения многомерного оператора Лапласа равны $-l(l+n-2)$, где n — размерность пространства. Для $n=4$ собственное значение равно $-l(l+2)$. Переход от сферы к гиперболоиду приводит к тому, что l перестает быть целым и может быть любым комплексным числом. Так как в этом случае знак Δ (см. формулу (3.4)) отрицателен, то уравнение собственных значений будет иметь вид

$$\Delta_L f = \sigma(\sigma+2)f. \tag{4.1}$$

Для того чтобы $\sigma(\sigma+2)$ было вещественным, необходимо чтобы либо

$$\sigma = -1 + ip \quad (p \text{ — вещественно}), \tag{4.2}$$

либо

$$\sigma \text{ — вещественно}. \tag{4.3}$$

Из теории представлений известно, что этим значениям отвечают унитарные представления группы Лоренца. При этом (4.2) отвечает представлениям основной серии, а (4.3) — побочной серии представлений (см. [13]).

Удобно сделать подстановку $\sigma = -1 + ip$, после которой вещественным значениям p соответствуют унитарные представления группы Лоренца (основной серии). В этом случае собственное значение $\sigma(\sigma+2) = -(p^2+1)$ и мы можем записать (4.1) в виде

$$\Delta_L f_p = -\left(p^2+1\right)f_p. \tag{4.4}$$

Задача дальнейших вычислений будет состоять в нахождении других квантовых чисел. Заметим, что в случае двумерного гиперболоида собственные значения будут $\sigma(\sigma+1)$; условие вещественности дает $\sigma = -1/2 + iq$ (q — вещественное), и собственное значение $\sigma(\sigma+1) = -\left(q^2 + 1/4\right)$.

Начнем с системы S. Отделяя координаты θ и φ обычной шаровой функцией — множителем $P_{lm}(\theta,\varphi)e^{im\varphi}$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, получим уравнение

$$\left[\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}\frac{d}{da}\mathrm{sh}^2 a\frac{d}{da} - \frac{l(l+1)}{\mathrm{sh}^2 a}\right]A(a) = -\left(p^2+1\right)A(a). \tag{4.5}$$

Легко проверить, что решение этого уравнения имеет вид

$$A(a) = (\mathrm{sh}\,a)^{-1/2}P^{-(l+1/2)}_{-1/2+ip}(\mathrm{ch}\,a). \tag{4.6}$$

Таким образом, собственные функции (ненормированные) в системе S имеют вид

$$\langle p, l, m|a, \theta, \varphi\rangle = (\mathrm{sh}\,a)^{-1/2}P^{-(l+1/2)}_{-1/2+ip}(\mathrm{ch}\,a)P_{lm}(\theta\varphi)e^{im\varphi}. \tag{4.7}$$

Разложение по координате a представляет собой обобщение известного разложения Меллера—Фока [14].

В системе Лобачевского координату c исключим с помощью функций e^{imc} (m вещественно; разложение представляет собой разложение Фурье). Тогда получим для определения собственных функций в системе L два уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{2}{\mathrm{cth}\,a}\frac{d}{da} - \frac{q^2+1/4}{\mathrm{ch}^2 a}\right)A(a) = -\left(p^2+1\right)A(a), \tag{4.8}$$

$$\left(\frac{d^2}{db^2} + \frac{1}{\mathrm{cth}\,b}\frac{d}{db} - \frac{m^2}{\mathrm{ch}^2 b}\right)B(b) = -\left(q^2+\frac{1}{4}\right)B(b). \tag{4.9}$$

Решение этих уравнений можно представить в виде

$$A(a) = (\mathrm{ch}\,a)^{-1}P^{-ip}_{-1/2+iq}(\mathrm{th}\,a), \tag{4.10}$$

$$B(b) = (\mathrm{ch}\,b)^{-1/2}P^{-iq}_{-1/2+im}(\mathrm{th}\,b), \tag{4.11}$$

и для собственной функции получим

$$\langle p, q, m\,|\,a, b, c\rangle = \left(\mathrm{ch}\,a\sqrt{\mathrm{ch}\,b}\,\right)^{-1}P^{-ip}_{-1/2+iq}(\mathrm{th}\,a)P^{-iq}_{-1/2+im}(\mathrm{th}\,b)e^{imc}. \tag{4.12}$$

В следующей системе — системе H, оператор, стоящий в скобках формулы (3.11), имеет собственное значение $-\left(q^2+1/4\right)$ и собственные функции

$$P^{im}_{-1/2+iq}(\mathrm{ch}\,b)e^{im\varphi}, \tag{4.13}$$

где m — целое число. Заменяя скобку собственным значением, придем к уравнению

$$\left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{2}{\mathrm{cth}\,a}\frac{d}{da} - \frac{q^2+1/4}{\mathrm{ch}^2 a}\right)A(a) = -\left(p^2+1\right)A(a). \tag{4.14}$$

Решением этого уравнения будут функции

$$A(a) = (\mathrm{ch}\,a)^{-1}P^{ip}_{-1/2+iq}(\mathrm{th}\,a). \tag{4.15}$$

Таким образом, мы получаем для системы H:

$$\langle p, q, m|a, b, \varphi\rangle = (\mathrm{ch}\,a)^{-1}P^{ip}_{-1/2+iq}(\mathrm{th}\,a)P^{im}_{-1/2+iq}(\mathrm{ch}\,b)e^{im\varphi}. \tag{4.16}$$

В орисферической системе координат отделим переменные r и φ с помощью функции Бесселя $J_m(\varkappa r)e^{im\varphi}$. Тогда уравнение (3.18) приведется к виду

$$\left[\frac{d^2}{db^2} - \frac{1}{b}\frac{d}{db} + \left(-\varkappa^2 + \frac{p^2+1}{b^2}\right)\right]B(b) = 0. \tag{4.17}$$

Решением этого уравнения будет функция Макдональда (функция Бесселя от мнимого значка и мнимого аргумента):

$$B(b) = \varkappa b\, K_{i\nu}(\varkappa b). \tag{4.18}$$

Таким образом, собственными функциями в системе O будут функции

$$\langle \nu, \varkappa, m \,|\, b, r, \varphi \rangle = \varkappa b\, K_{i\nu}(\varkappa b)\, J_m(\varkappa r) e^{im\varphi}. \tag{4.19}$$

Наконец, рассмотрим цилиндрическую систему. Отделяя переменные φ и a в операторе (3.14) с помощью функций $e^{\sin\varphi}$ и $e^{i\tau a}$, придем к уравнению

$$\frac{d^2B}{db^2} + (\operatorname{th} b + \operatorname{cth} b)\frac{dB}{db} + \left[p^2 + 1 - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 b} - \frac{\tau^2}{\operatorname{ch}^2 b}\right] B = 0. \tag{4.20}$$

Решением (4.20) оказывается произведение гипергеометрической функции на гиперболическую:

$$B(b) = \operatorname{th}^m b \operatorname{ch}^{1+ip} b F\left(\frac{m+1-ip+i\tau}{2}, \frac{m+1-ip-i\tau}{2}, m+1;\ \operatorname{th}^2 b\right), \tag{4.21}$$

и собственные функции в системе C оказываются равными

$$\langle p, \tau, m \,|\, b, a, \varphi \rangle = e^{i(\tau a + m\varphi)} \frac{\operatorname{sh}^m b}{\operatorname{ch}^{m+1-ip} b} F\left(\frac{m+1-ip+i\tau}{2}, \frac{m+1-ip-i\tau}{2}, m+1;\ \operatorname{th}^2 b\right). \tag{4.22}$$

Этим заканчивается построение ортогональных систем функций в пяти системах координат. Можно показать, что четырьмя системами S, H, O и C исчерпываются все системы, обладающие аксиальной симметрией и построенные из сфер, орисфер и гиперболоидов. (Система L этим свойством не обладает и приведена здесь лишь как очень сходная с другими — остальные системы включают в себя эллипсоидальные координатные поверхности.) Ниже будет показано, что ограничение ортогональными системами является необязательным, и разложение можно проводить по неунитарным представлениям (квантовое число p — любое комплексное число).

5. Метод орисферы и разложение на конусе

Мы построили различные системы собственных функций оператора Лапласа на двухполостном гиперболоиде. Теперь надо нормировать эти функции, или, что то же самое, найти формулы обращения для разложения по этим собственным функциям. В основе вывода всех этих формул лежит общий метод орисфер, разработанный Гельфандом и Граевым.

Чтобы выяснить суть метода, рассмотрим классическое преобразование Фурье в n-мерном пространстве:

$$F(k) = \int f(x) e^{ikx}\, d^n x, \tag{5.1}$$

где (только в этой и следующей формулах)

$$kx = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n.$$

Выражение (5.1) можно свести к интегрированию по плоскостям:

$$\Phi(k, p) = \int f(x)\, \delta(kx - p)\, d^n x \tag{5.2}$$

и последующему одномерному преобразованию

$$F(k) = \int \Phi(k, p) e^{ipk}\, dp. \tag{5.3}$$

Интегральное преобразование (5.2) (интегрирование по плоскостям) называют преобразованием Радона.

Гельфанд и Граев [3] показали, что аналогичным образом разбиваются инвариантные разложения функций на любом однородном многообразии. При этом роль плоскостей играют так называемые орисферы. Для верхней полы двухполостного гиперболоида $u^2 = 1$, $u^2 = u_0^2 - u_1^2 - \ldots - u_n^2$ орисферами являются сечения гиперболоида плоскостями вида $uk = 1$, где k — точка конуса $k^2 = 0$ (эти плоскости параллельны образующим конуса).

Каждой функции $f(u)$, заданной на гиперболоиде, сопоставим функцию на конусе:

$$h(k) = \int f(u)\delta(uk - 1)\frac{d^n u}{u_0}, \tag{5.4}$$

$$d^n u = du_1 \ldots du_n, \tag{5.5}$$

где $d^n u/u_0$ — инвариантная мера на гиперболоиде. Переход от $f(u)$ к $h(k)$ назовем интегральным преобразованием Гельфанда—Граева.

Формула обращения для этого преобразования при $n = 2m + 1$ имеет вид

$$f(u) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} \int \delta^{(n-1)}(uk - 1) h(k)\frac{d^n k}{k_0}, \tag{5.6}$$

а при $n = 2m$ — вид[6]

$$f(u) = \frac{(-1)^{n/2}\Gamma(n)}{(2\pi)^n} \int (ku - 1)^{-n}\, h(k)\frac{d^n k}{k_0}. \tag{5.7}$$

Здесь

$$\frac{d^n k}{k_0} = \frac{dk_1 \ldots dk_n}{k_0} \tag{5.8}$$

— инвариантная мера на конусе.

Рассмотрение функций на конусе удобно тем, что на конусе имеет смысл понятие однородной функции. Разложение функции на однородные компоненты $\Phi(k, \sigma)$ имеет вид[7]:

$$h(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi i}^{\delta + i\infty} \Phi(k, \sigma)\, d\sigma, \tag{5.9}$$

$$\Phi(k, \sigma) = \int h(tk) t^{-\sigma - 1}\, dt. \tag{5.10}$$

Из формул (5.4) и (5.10) вытекает, что

$$\Phi(k, \sigma) = \int f(u)(uk)^\sigma \frac{d^n u}{u_0}. \tag{5.11}$$

[6] Расходящийся интеграл понимается здесь в смысле значения, регуляризованного путем аналитического продолжения по показателю степени.

[7] Значение δ выбирается так, чтобы все полюса функции $\Phi(k, \sigma)$ лежали вне полосы $0 \leqslant \operatorname{Re}\sigma \leqslant \delta$.

Из формул же (5.6), (5.7) и (5.9) следует, что при $n = 2m + 1$

$$f(u) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n-1)}{\Gamma(\sigma)} \int\limits_{\Gamma} \Phi(k,\sigma)(uk)^{-\sigma-n+1} d^{n-1}k\, d\sigma \tag{5.12}$$

и при $n = 2m$

$$f(u) = -\frac{(-1)^{n/2-1}}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n-1)}{\Gamma(\sigma)} \operatorname{ctg} \pi\sigma \int\limits_{\Gamma} \Phi(k,\sigma)(uk)^{-\sigma-n+1} d^{n-1}k\, d\sigma. \tag{5.13}$$

Контур интегрирования Γ — любой контур на конусе, пересекающий все образующие конуса, а $d^{n-1}k$ — мера на этом контуре, определяемая равенством $d(tk) = t^{n-3}\,dt\,dk$. При $\sigma = -(n-1)/2 + i\rho$, где ρ — вещественно, интегральное преобразование (5.11), (5.12) унитарно.

Полученные формулы[8] и являются для двухполостного гиперболоида аналогом разложения функций Фурье в n-мерном евклидовом пространстве. Аналогия становится еще более наглядной, если заметить, что $uk = e^{l(u,k)}$, где $l(u,k)$ — расстояние от точки u до орисферы $uk = 1$.

Дальнейшее разложение функции ведется уже на контуре Γ. При этом различным выборам контура соответствуют различные разложения. Мы ограничимся лишь важным для физики случаем $n = 3$. В этом случае представляют интерес следующие выборы контура:

а) Γ — сечение конуса плоскостью $k_0 = 1$, т. е. сфера $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$, $k_0 = 1$;

б) Γ — сечение конуса плоскостями $k_3 = 1$ и $k_3 = -1$, т. е. верхние полы гиперболоидов;

в) Γ — сечение конуса плоскостью $k_0 + k_3 = 2$ (параболоид);

г) Γ — сечение конуса цилиндром $k_0^2 - k_1^2 = 1$.

Этим видам сечений соответствуют разобранные выше системы координат S, H, O и C. Именно, случаю а) соответствует система S, случаю б) — система H, случаю в) — система O и случаю г) — система C.

6. Вывод формул обращения

Перейдем к выводу формул обращения, связанных с найденными в разделе 4 собственными функциями оператора Лапласа.

Формула обращения в системе S

Начнем со случая, когда сечение Γ является сферой $k_0 = 1$. В этом случае функция $\Phi(k,\sigma)$ задана на сфере и потому разлагается в ряд по сферическим функциям

$$\Phi(k,\sigma) = \sum_{l,m} a_{lm}(\sigma) Y_{lm}(k), \tag{6.1}$$

где k — точка сферы. Подставим разложение (6.1) в формулу (5.12). Получим, что

$$f(u) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \sum_{l,m} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1) a_{lm}(\sigma) \int\limits_{\Gamma} (uk)^{-\sigma-2} Y_{lm}(k)\, d^2k\, d\sigma, \tag{6.2}$$

где d^2k — обычная евклидова мера на сфере Γ.

[8] При $n = 3$ эти формулы (5.11) и (5.12) были до Гельфанда и Граева получены И. Шапиро [1].

Нам надо вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} (uk)^{-\sigma-2} Y_{lm}(k)\, d^2k. \tag{6.3}$$

Пусть $u = (u_0, u')$, где $u_0 = \operatorname{ch} a$. Выберем полярную ось в направлении u' и перейдем к сферическим координатам; после несложных вычислений получим

$$I = \frac{(-1)^l (2\pi)^{3/2} \Gamma(-\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma-l-1)(\operatorname{sh} a)^{1/2}} P^{-(l+1/2)}_{-\sigma-3/2}(\operatorname{ch} a)\, Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{6.4}$$

Подставляя значение I в формулу (6.2), получаем

$$f(u) = \sum_{l,m} \frac{(-1)^{l+1}}{2i(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(-\sigma-l-1)} \frac{a_{lm}(\sigma)}{(\operatorname{sh} a)^{1/2}} P^{-(l+1/2)}_{-\sigma-3/2}(\operatorname{ch} a)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)\, d\sigma. \tag{6.5}$$

Перейдем к вычислению коэффициентов a_{lm}. Из формул (6.1) вытекает, что

$$a_{lm} = \int\limits_{\Gamma} \Phi(k, \sigma)\, Y^*_{lm}(k)\, d^2k. \tag{6.6}$$

Подставим в эту формулу выражение (5.11) для $\Phi(k, \sigma)$. Получим

$$a_{lm}(\sigma) = \int f(u) \int\limits_{\Gamma} (uk)^{\sigma} Y^*_{lm}(k) d^2k\, \frac{d^3u}{u_0}. \tag{6.7}$$

Повторяя вычисления интеграла (6.4), найдем

$$a_{lm}(\sigma) = \frac{(-1)^l (2\pi)^{3/2} \Gamma(\sigma+1)}{2\Gamma(\sigma-l+1)} \int f(u) (\operatorname{sh} a)^{-1/2} P^{-(l+1/2)}_{\sigma+1/2}(\operatorname{ch} a)\, Y^*_{lm}(\theta, \varphi) \frac{d^3u}{u_0}. \tag{6.8}$$

В координатах a, θ, φ имеем

$$u_0^{-1} d^3u = \operatorname{sh}^2 a \sin\theta\, da\, d\theta\, d\varphi. \tag{6.9}$$

Формулы (6.5), (6.8) дают разложение функции $f(u)$ по собственным функциям оператора Лапласа.

Выведенные формулы упрощаются, если $\sigma = -1 + ip$, т. е. если рассматривать лишь унитарный случай. В этом случае они принимают вид

$$f(u) = \sum_{l,m} \frac{(-1)^l}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(ip-l)} \frac{a_{lm}(p)}{(\operatorname{sh} a)^{1/2}} P^{-(l+1/2)}_{-1/2+ip}(\operatorname{ch} a)\, Y_{lm}(\theta, \varphi) p^2\, dp, \tag{6.10}$$

$$a_{lm}(p) = \frac{(-1)^l (2\pi)^{3/2} \Gamma(-ip)}{2\Gamma(-ip-l)} \int f(u) (\operatorname{sh} a)^{-1/2} P^{-(l+1/2)}_{-1/2+ip}(\operatorname{ch} a)\, Y^*_{lm}(\theta, \varphi) \frac{d^3u}{u_0}. \tag{6.11}$$

Система Лобачевского неудобна для исследования столкновений двух частиц, так как в ней нет азимутального угла. Поэтому мы не будем в этом случае выводить формул обращения.

Разложение в системе H

Совершенно аналогично производится разложение в системе координат H. Выберем в качестве контура Γ сечение конуса плоскостями $u_3 = \pm 1$. Это сечение распадается на верхние полы двух двумерных гиперболоидов Γ_+ и Γ_-. Обозначим через $\Phi_+(k,\sigma)$ и $\Phi_-(k,\sigma)$ значения $\Phi(k,\sigma)$ на этих гиперболоидах и применим к функциям $\Phi_+(k,\sigma)$ и $\Phi_-(k,\sigma)$ разложение на двумерном гиперболоиде (см. Приложение). Подставляя полученный результат в формулу (5.12), находим

$$f(u) = -\frac{1}{8}\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\sigma(\sigma+1)\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{\Gamma(1-\tau)}{\Gamma(m-\tau)}\tau\operatorname{ctg}\pi\tau\,\times$$
$$\times\, a_m(\tau,\sigma)\int_{\Gamma_++\Gamma_-}(uk)^{-\sigma-2}\mathfrak{Y}^m_{-\tau-1}(k)d^2k\,d\tau\,d\sigma, \tag{6.12}$$
$$\mathfrak{Y}^m_{-\tau-1}(k) = P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch} b)e^{im\varphi} \equiv \mathfrak{Y}^m_{-\tau-1}(b,\varphi).$$

На этот раз надо вычислить интегралы

$$I_\pm = \int_{\Gamma_\pm}(uk)^{-\sigma-2}\mathfrak{Y}^m_{-\tau-1}(k)\,d^2k. \tag{6.13}$$

Они вычисляются аналогично интегралу (6.4) и дают результат

$$I_\pm = \frac{\Gamma(\sigma+\tau+2)\Gamma(\sigma-\tau+1)}{\Gamma(\sigma+2)}(\operatorname{ch} a)^{-1}P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(\mp\operatorname{th} a)\mathfrak{Y}^m_{-\tau-1}(b,\varphi). \tag{6.14}$$

Поэтому

$$f(u) = -\frac{1}{8(2\pi)^4\operatorname{ch} a}\sum_m\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma+\tau+2)\Gamma(1-\tau)\Gamma(\sigma-\tau+1)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(m-\tau)}\tau\operatorname{ctg}\pi\tau\,\times$$
$$\times\,\mathfrak{Y}^m_{-\tau-1}(b,\varphi)\left\{a^+_m(\tau,\sigma)\,P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(-\operatorname{th} a) + a^-_m(\tau,\sigma)\,P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(\operatorname{th} a)\right\}d\tau\,d\sigma. \tag{6.15}$$

Вычисление a^+_m и a^-_m дает

$$a^\pm_m(\tau,\sigma) = \frac{\Gamma(\tau)\Gamma(-\sigma-\tau-1)\Gamma(\tau-\sigma)}{\Gamma(\tau-m+1)\Gamma(-\sigma)}\int f(u)\,P^{\sigma+1}_\tau(\mp\operatorname{th} a)\mathfrak{Y}^{-m}_\tau(b\varphi)\,d^3u, \tag{6.16}$$
$$d^3u = \operatorname{sh}^2 a\operatorname{sh} b\,da\,db\,d\varphi.$$

Как было отмечено в разделе 5, унитарному случаю соответствуют значения $\sigma = -1+ip$, $\tau = -1/2+iq$. При этих значениях формулы (6.15), (6.16) принимают вид

$$f(u) = \frac{1}{2}\frac{(\operatorname{ch} a)^{-1}}{(2\pi)^4}\sum_m\int_0^\infty p^2\int_0^\infty\frac{\Gamma(1/2+ip+iq)\Gamma(1/2+ip-iq)\Gamma(1/2-iq)}{\Gamma(1+ip)\Gamma(m+1/2-iq)}q\operatorname{cth}\pi q\,\times$$
$$\times\,\mathfrak{Y}^m_{-1/2+iq}(b,\varphi)\left\{a^+_m P^{-ip}_{-1/2+iq}(-\operatorname{th} a) + a^-_m P^{-ip}_{-1/2+iq}(\operatorname{th} a)\right\}dp\,dq, \tag{6.17}$$

$$a^\pm_m(p,q) = \frac{\Gamma(-1/2+iq)\Gamma(1/2-ip-iq)\Gamma(1/2-ip+iq)}{\Gamma(1/2+iq-m)\Gamma(1-ip)}\,\times$$
$$\times\int f(u)\,P^{ip}_{-1/2+iq}(\mp\operatorname{th} a)\mathfrak{Y}^{-m}_{-1/2+iq}(b,\varphi)\,d^3u. \tag{6.18}$$

Разложение в системе O

В орисферической системе координат вычисление проходит так же, как и выше. Выберем в качестве контура Г сечение конуса плоскостью $k_0 - k_3 = 2$ и параметризуем это сечение:

$$k_0 = 1+\rho^2, \quad k_2 = 2\rho\cos\alpha, \quad k_3 = -1+\rho^2, \quad k_1 = 2\rho\sin\alpha.$$

Положим

$$\Phi(k,\sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Psi(\varkappa,\theta,\sigma)\, e^{i\varkappa\rho\cos(\theta-\alpha)}\varkappa\, d\varkappa\, d\theta \tag{6.19}$$

(преобразование Ганкеля) и подставим в формулу (5.12). После несложных преобразований получим

$$f(u) = -\frac{1}{2i(2\pi)^3}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1)\, e^{-a(\sigma+2)} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Psi(\varkappa,\theta,\sigma)\, e^{i\varkappa r\cos(\theta-\varphi)} \times$$
$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{i\varkappa\rho\cos(\theta-\alpha)}(e^{-2a}+\rho^2)^{-\sigma-2}\varkappa\rho\, d\rho\, d\varkappa\, d\alpha\, d\theta\, d\sigma. \tag{6.20}$$

Имеем далее

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{i\varkappa\rho\cos(\theta-\alpha)}(e^{-2a}+\rho^2)^{-\sigma-2}\rho\, d\rho\, d\alpha = \frac{2\pi}{\Gamma(\sigma+2)}\left(\frac{\varkappa}{2}e^a\right)^{\sigma+1} K_{-\sigma-1}(e^{-a\varkappa}), \tag{6.21}$$

где K — цилиндрическая функция Макдональда. Поэтому (полагая еще $e^{-a} = b$), находим

$$f(u) = -\frac{b}{i(2\pi)^2}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Psi(\varkappa,\theta,\sigma)\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{\sigma+2} e^{i\varkappa\rho\cos(\theta-\varphi)} K_{-\sigma-1}(b\varkappa)\, d\varkappa\, d\theta\, d\sigma. \tag{6.22}$$

Коэффициенты $\Psi(\varkappa,\theta,\sigma)$ вычисляются по формуле Фурье:

$$\Psi(\varkappa,\theta,\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \Phi(k,\sigma)\, e^{-i\varkappa\rho\cos(\theta-\alpha)}\, d^2k,$$

где $d^2k = 4\rho\, d\rho\, d\alpha$. Подставляя сюда (5.11), получим

$$\Psi(\varkappa,\theta,\sigma) = \frac{2}{\pi\Gamma(-\sigma)}\left(\frac{2}{\varkappa}\right)^{\sigma+1}\int f(u)\, e^{-i\varkappa r\cos(\theta-\varphi)} K_{\sigma+1}(b\varkappa) b^{-2}\, d^3u,$$
$$d^3u = r\, dr\, d\varphi\, db. \tag{6.23}$$

В унитарном случае $\sigma = -1 + ip$.

Разложение в цилиндрической системе координат C

Рассмотрим, наконец, цилиндрическую систему координат. Ей соответствует сечение Г гиперболоида цилиндром $k_0^2 - k_1^2 = 1$. Выберем на Г параметры c и a:

$$k_0 = \operatorname{ch} c, \quad k_3 = \cos\alpha, \quad k_1 = \operatorname{sh} c, \quad k_2 = \sin\alpha. \tag{6.24}$$

Сделаем преобразование Фурье функции $\Phi(k,\sigma)$ по параметрам c и a:

$$\Phi(k,\sigma)=\sum_m\int a_m(\tau,\sigma)\,e^{i(m\alpha+\tau c)}\,d\tau. \tag{6.25}$$

Подставим это разложение в формулу (5.12). Полагая

$$u_0=\operatorname{ch}b\operatorname{ch}a,\quad u_1=\operatorname{ch}b\operatorname{sh}a,\quad u_3=\operatorname{sh}b\cos\varphi,\quad u_2=\operatorname{sh}b\sin\varphi, \tag{6.26}$$

получим

$$f(u)=-\frac{1}{2i(2\pi)^3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(m\varphi+\tau a)}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\sigma(\sigma+1)a_m(\tau,\sigma)\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(\operatorname{ch}b\operatorname{ch}c-\operatorname{sh}b\cos\alpha)^{-\sigma-2}e^{i(m\alpha+\tau c)}\,dc\,d\alpha\,d\sigma\,d\tau. \tag{6.27}$$

Нам надо вычислить интеграл

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(\operatorname{ch}b\operatorname{ch}c-\operatorname{sh}b\cos\alpha)^{-\sigma-2}e^{i(m\alpha+\tau c)}\,dc\,d\sigma. \tag{6.28}$$

Вынесем $\operatorname{ch}b\operatorname{ch}c$ за скобки и разложим $(1-\operatorname{th}b\cos\alpha/\operatorname{ch}c)^{-\sigma-2}$ по биному Ньютона. После почленного интегрирования получим

$$I=2^{\sigma+2}\pi\frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\sigma+2)}F(A,B,m+1;\ \operatorname{th}^2b)\frac{\operatorname{sh}^m b}{\operatorname{ch}^{m+\sigma+2}b},$$
$$A=\frac{m+\sigma+i\tau}{2},\quad B=\frac{m+\sigma-i\tau}{2}. \tag{6.29}$$

Поэтому

$$f(u)=-\frac{1}{16\pi^2 i}\sum_m\frac{\operatorname{th}^m a e^{im\varphi}}{\Gamma(m+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\tau a}\times$$
$$\times\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{a_m(\tau,\sigma)}{\Gamma(\sigma)}\Gamma(A')\,\Gamma(B)\left(\frac{2}{\operatorname{ch}a}\right)^{\sigma+2}F\big(A,B,m+1;\ \operatorname{th}^2b\big)\,d\sigma\,d\tau. \tag{6.30}$$

Коэффициенты $a_m(\tau,\sigma)$ выражаются по формуле

$$a_m(\tau,\sigma)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k,\sigma)\,e^{-i(m\varphi+\tau a)}\,d^2k,\qquad d^2k=d\varphi\,da. \tag{6.31}$$

Подставим вместо $\Phi(k,\sigma)$ выражение (5.11). После простых преобразований найдем

$$a_m(\tau,\sigma)=\frac{\Gamma(A')\Gamma(B')}{4\pi\Gamma(m+1)\Gamma(-\sigma)}\int\operatorname{th}^m a\left(\frac{2}{\operatorname{ch}a}\right)^{-\sigma}F\big(A',B',m+1;\ \operatorname{th}^2b\big)\,e^{-i(m\varphi+\tau a)}\,d^3u, \tag{6.32}$$

где

$$d^3u = \operatorname{sh}^2 a\, da\, db\, d\varphi,$$

$$A' = \frac{m - \sigma + i\tau}{2},$$

$$B' = \frac{m - \sigma - i\tau}{2}.$$

Унитарному случаю отвечает $\sigma = -1 + p$. Этими формулами исчерпывается задача о разложении амплитуды в описанных четырех системах координат.

Приложение

При разложении в системе H были использованы разложения функций на двумерном гиперболоиде. Вводя координаты

$$u_0 = \operatorname{ch} b, \quad u_2 = \operatorname{sh} b \cos\varphi, \quad u_1 = \operatorname{sh} b \sin\varphi,$$

имеем

$$f(u) = -\frac{1}{8\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} a_m(\sigma) \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(m-\sigma)} \mathfrak{Y}^m_{-\sigma-1}(b, \varphi)\, \sigma \operatorname{ctg} \pi\sigma\, d\sigma,$$

$$a_m(\sigma) = \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma - m + 1)} \int f(u) \mathfrak{Y}^{-m}_{\sigma}(b, \varphi)\, d^2u, \quad d^2u = \operatorname{sh} b\, db\, d\varphi.$$

Литература

1. *Шапиро И. С.* ДАН СССР, **106**, 647, 1956.
2. *Shapiro I.* Phys. Lett., **1**, 253, 1962.
3. *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Труды Моск. матем. общества, **11**, 243, 1962.
4. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1963.
5. *Долгинов А. З.* ЖЭТФ, **30**, 746, 1956.
6. *Долгинов А. З., Топтыгин И. Н.* ЖЭТФ, **35**, 794, 1958; **37**, 1441, 1959.
7. *Смородинский Я. А.* Сб. Вопросы физики элементарных частиц. **3**. Изд-во АрмССР, 1963. С. 242.
8. *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **43**, 2217, 1962.
9. *Олевский М. П.* Матем. сб., **27**, 379, 1950.
10. *Шум А. И.* Матем. сб., **47**, 495, 1959.
11. *Magnus, Oberhettinger.* Formulen and Sätze für die spezielle Funktionen der mathematischen Physik. Springer, 1950.
12. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
13. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представление группы вращения и группы Лоренца. Физматгиз, 1946.
14. *Лебедев Н. А.* Специальные функции и их приложения. Изд. 2-е. Физматгиз, 1963.

К теории четырехмерного момента количества движения*

П. Винтерниц, Я. А. Смородинский, М. Углирж

1. Введение

В работе Виленкина и одного из авторов [2] рассмотрены разложения амплитуды рассеяния по собственным функциям оператора Лапласа в пространстве Лобачевского (в пространстве релятивистских скоростей). Олевским [3] найдены все ортогональные системы координат в трехмерном пространстве постоянной кривизны, в которых уравнение Лапласа допускает полное разделение переменных, и получена их классификация по форме линейного элемента. Из 34 систем, приведенных Олевским [3], четыре особенно удобны для исследования бинарных столкновений частиц со спином нуль [4] и они исследованы ранее [2]. В настоящей работе мы рассмотрим более подробно эти четыре системы, обладающие аксиальной симметрией и тем свойством, что среди координатных линий нет кривых второго порядка с двумя центрами (и их вырождений). Все они могут быть получены при рассмотрении одной из трех типов связок прямых в пространстве Лобачевского и поверхностей, ортогональных к ним. В дальнейшем будем придерживаться обозначений и терминологии, уже использованных в [2]. Сферическая система S получается рассмотрением сходящейся связки с центром в начале координат (в вершине гиперболоида). Поверхности, ортогональные к такой связке, образуют семейство сфер. Рассматривая расходящуюся связку с плоскостью (2, 3) в качестве базиса, получим гиперболическую систему H. В качестве ортогональных поверхностей получаем семейство гиперсфер (эквидистантных поверхностей). Аналогично в цилиндрической системе C имеем связку расходящихся прямых, и в качестве базиса фигурирует плоскость, определенная ортами u_1 и $-u_3 \sin\varphi + u_2 \cos\varphi$. Наконец, взяв параллельную связку с направляющим лучом вдоль оси u_3, получаем семейство орисфер (предельных поверхностей) и орисферическую систему O.

В теории поля для описания рассеяния часто используются параметры Мандельстама s, t, u. Для наших целей эти переменные неудобны, так как соответствующие им координатные кривые в пространстве Лобачевского не ортогональны и оператор Лапласа в них не допускает разделения переменных Покажем, как связаны параметры s, t, u с переменными в S-, H- и C-системах, и нарисуем соответствующие кинематические диаграммы (для случая равных масс). Имеем (см. рис. 1–3):

S-система:

$$\begin{aligned} u_0 &= \operatorname{ch} a, & s &= 4m^2 \operatorname{ch}^2 a,\\ u_3 &= \operatorname{sh} a \cos\vartheta, & t &= -4m^2 \operatorname{sh}^2 a \sin^2\vartheta,\\ u_2 &= \operatorname{sh} a \sin\vartheta \cos\varphi, & u &= -4m^2 \operatorname{sh}^2 a \cos^2\vartheta,\\ u_1 &= \operatorname{sh} a \sin\vartheta \sin\varphi, \end{aligned}$$

$$0 \leqslant a < \infty, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

* Часть результатов этой работы была предварительно опубликована ранее [1].

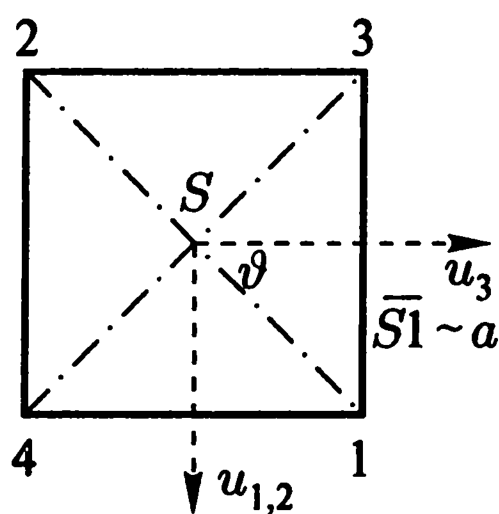


Рис. 1. Параметры рассеяния в S-системе

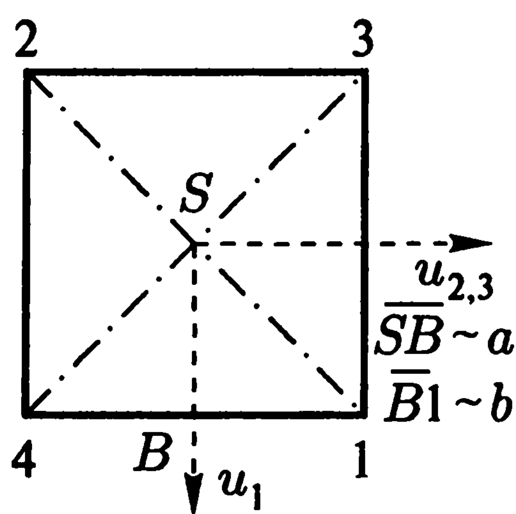


Рис. 2. Параметры рассеяния в H-системе

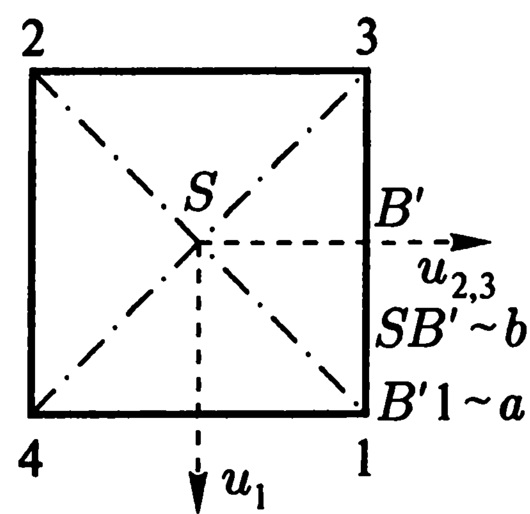


Рис. 3. Параметры рассеяния в C-системе

H-система:

$$u_0 = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b, \qquad s = 4m^2 \operatorname{ch}^2 a \operatorname{ch}^2 b,$$
$$u_3 = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \cos\varphi, \qquad t = -4m^2 \operatorname{sh}^2 a,$$
$$u_2 = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \sin\varphi, \qquad u = -4m^2 \operatorname{ch}^2 a \operatorname{sh}^2 b,$$
$$u_1 = \operatorname{sh} a,$$
$$-\infty < a < \infty, \quad 0 \leqslant b < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

C-система:

$$u_0 = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} a, \qquad s = 4m^2 \operatorname{ch}^2 b \operatorname{ch}^2 a,$$
$$u_3 = \operatorname{sh} b \cos\varphi, \qquad t = -4m^2 \operatorname{ch}^2 b \operatorname{sh}^2 a,$$
$$u_2 = \operatorname{sh} b \sin\varphi, \qquad u = -4m^2 \operatorname{sh}^2 b,$$
$$u_1 = \operatorname{ch} b \operatorname{sh} a,$$
$$-\infty < a < \infty, \quad 0 \leqslant b < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Таким образом, мы видим, что в S-системе поверхности $a = \text{const}$ (сферы) соответствуют параметру $s = \text{const}$; в H-системе $a = \text{const}$ (гиперсферы) соответствуют параметру $t = \text{const}$ и в C-системе $b = \text{const}$ (поверхности вращения семейства эквидистант вокруг их общего базиса) — параметру $u = \text{const}$. Орисферическая система непосредственного отношения к переменным Мандельстама не имеет, но она важна по другим соображениям: расстояние между орисферами (переменная a) связано с величиной импульса частицы с ненулевой массой по отношению к импульсу фотона, что часто применяется в квантовой электродинамике.

В дальнейшем рассмотрим некоторые групповые свойства систем S, H, C, O и укажем на их связь с теорией четырехмерного момента количества движения. Будут исследованы классические величины, соответствующие полным наборам коммутирующих операторов в каждой из систем, и поля, в которых они являются интегралами движения.

2. Инфинитезимальные операторы собственной группы Лоренца

Будем работать в пространстве функций, определенных на верхней полости двухполостного трехмерного гиперболоида, который является инвариантной гиперповерхностью в четырехмерном пространстве релятивистских скоростей (это и есть реализация пространства Лобачевского).

Рассмотрим представление собственной группы Лоренца, базисными векторами которого являются собственные функции оператора Лапласа на гиперболоиде,

и выпишем в явном виде инфинитезимальные операторы (в дальнейшем L_i — инфинитезимальные операторы пространственных поворотов, K_i — гиперболических). Инфинитезимальные операторы можно получить, например, решая уравнения Киллинга [5] или, непосредственно, разлагая в ряд по α функцию $T_{g_\alpha} f(x) = f(g_\alpha x)$, где g_α — однопараметрические подгруппы группы Лоренца.

Сферическая система S:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
L_2 &= -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \operatorname{ctg}\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
L_3 &= \frac{\partial}{\partial\varphi},\\
K_1 &= \sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{cth} a\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\operatorname{cth} a\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
K_2 &= \sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{cth} a\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{\sin\vartheta}\operatorname{cth} a\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
K_3 &= \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial a} - \sin\vartheta\operatorname{cth} a\frac{\partial}{\partial\vartheta}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Гиперболическая система H:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial}{\partial\varphi},\\
L_2 &= -\operatorname{sh} b\cos\varphi\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{th} a\operatorname{ch} b\cos\varphi\frac{\partial}{\partial b} - \operatorname{th} a\frac{1}{\operatorname{sh} b}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
L_3 &= \operatorname{sh} b\sin\varphi\frac{\partial}{\partial a} - \operatorname{th} a\operatorname{ch} b\sin\varphi\frac{\partial}{\partial b} - \operatorname{th} a\frac{1}{\operatorname{sh} b}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
K_1 &= \operatorname{ch} b\frac{\partial}{\partial a} - \operatorname{th} a\operatorname{sh} b\frac{\partial}{\partial b},\\
K_2 &= \sin\varphi\frac{\partial}{\partial b} + \operatorname{cth} b\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
K_3 &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial b} - \operatorname{cth} b\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Цилиндрическая система C:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial}{\partial\varphi},\\
L_2 &= -\operatorname{ch} a\operatorname{th} b\cos\varphi\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{sh} a\cos\varphi\frac{\partial}{\partial b} - \operatorname{sh} a\operatorname{cth} b\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
L_3 &= \operatorname{ch} a\operatorname{th} b\sin\varphi\frac{\partial}{\partial a} - \operatorname{sh} a\sin\varphi\frac{\partial}{\partial b} - \operatorname{sh} a\operatorname{cth} b\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
K_1 &= \frac{\partial}{\partial a},\\
K_2 &= -\operatorname{sh} a\operatorname{th} b\sin\varphi\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{ch} a\sin\varphi\frac{\partial}{\partial b} + \operatorname{ch} a\operatorname{cth} b\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
K_3 &= -\operatorname{sh} a\operatorname{th} b\cos\varphi\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{ch} a\cos\varphi\frac{\partial}{\partial b} - \operatorname{ch} a\operatorname{cth} b\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Орисферическая система O:

$$L_1 = r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial a} - \frac{e^{-a}}{2}\left[-e^{-a}+(r^2+1)e^a\right]\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{-a}}{2r}\left[-e^{-a}+(-r^2+1)e^a\right]\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$L_2 = -r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial a} + \frac{e^{-a}}{2}\left[-e^{-a}+(r^2+1)e^a\right]\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{-a}}{2r}\left[-e^{-a}+(-r^2+1)e^a\right]\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$L_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$K_1 = r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial a} - \frac{e^{-a}}{2}\left[-e^{-a}+(r^2-1)e^a\right]\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{-a}}{2r}\left[-e^{-a}+(r^2+1)e^a\right]\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$K_2 = r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial a} - \frac{e^{-a}}{2}\left[-e^{-a}+(r^2-1)e^a\right]\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{e^{-a}}{2r}\left[e^{-a}+(r^2+1)e^a\right]\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$K_3 = -\frac{\partial}{\partial a} + r\frac{\partial}{\partial r}. \tag{4}$$

Заметим, что коммутационные соотношения для этих операторов во всех системах одинаковы ($i, k, m = 1, 2, 3$):

$$[L_i, L_k] = \varepsilon_{ikm}L_m, \quad [L_i, K_k] = \varepsilon_{ikm}K_m, \quad [K_i, K_k] = -\varepsilon_{ikm}L_m. \tag{5}$$

Однако матричный вид инфинитезимальных операторов в различных системах будет различный и только в S-системе будет совпадать с приведенными в работах Гельфанда и др., [6] и Наймарка [7].

Связь с четырехмерным моментом количества движения во всех системах сохраняется, а именно: в нашей (вещественной) метрике имеем ($k, l, m = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} M_{kl} &= -i\left(u_k\frac{\partial}{\partial u_l} - u_l\frac{\partial}{\partial u_k}\right) = i\varepsilon_{klm}L_m,\\ M_{0k} &= u_0\frac{\partial}{\partial u_k} + u_k\frac{\partial}{\partial u_0} = K_k. \end{aligned} \tag{6}$$

3. Инварианты группы Лоренца и ее подгрупп

Как известно [7], из инфинитезимальных операторов собственной группы Лоренца можно построить два инварианта:

$$\Delta_L = \sum_{i=1}^{3}(K_i^2 - L_i^2), \quad \Delta' = -4\sum_{i=1}^{3} L_iK_i. \tag{7}$$

В рассматриваемом случае первый из них равен лапласиану на гиперболоиде (в соответствующих координатах), второй связан со спином и тождественно равен нулю.

Системы S, H, C и O отличаются друг от друга инвариантами, соответствующими не всей группе Лоренца, а определенным подгруппам, т. е. коммутирующим только с частью операторов представления. Именно с этими инвариантами связано разделение переменных в уравнении Лапласа

$$\Delta_L f(u) = -(p^2+1)f(u), \tag{8}$$

и функция $f(u)$ в каждой системе будет собственной функцией соответствующих инвариантов. Собственные значения, возникающие как константы разделения в уравнении, будут играть роль квантовых чисел. Инварианту Δ_L всегда соответствует квантовое число p. Заметим, что все собственные функции, соответствующие одному и тому же p, образуют базис для неприводимого (в общем случае — бесконечномерного) представления группы Лоренца.

Рассмотрим с этой точки зрения все четыре системы координат.

S-система. Инвариантами являются

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad L_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{9}$$

и они соответствуют группе трехмерных вращений и ее подгруппе — вращениям вокруг одной из пространственных осей. Здесь, естественно, получаются квантовые числа l и m (момент количества движения и его проекция).

H-система. Инварианты

$$H^2 = K_2^2 + K_3^2 - L_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \operatorname{ctg} b\frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{\sin^2 b}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad L_1 = \frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{10}$$

соответствуют трехмерной группе Лоренца с инфинитезимальными операторами K_2, K_3, L_1, т. е. «малой группе» Лоренца [8, 9], связанной с пространственным вектором, и ее однопараметрической подгруппе пространственных вращений вокруг оси 1. Так возникают квантовые числа α и m, где $\alpha = -1/2 + iq$ (см. [2]).

C-система. Эта система очень симметрична по отношению к пространственным и гиперболическим поворотам. Инварианты

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad K_1 = \frac{\partial}{\partial a} \tag{11}$$

соответствуют однопараметрическим подгруппам пространственных вращений в плоскости (2, 3) и гиперболических вращений в плоскости (0, 1). Соответствующие квантовые числа — это τ и m.

O-система. Инвариантами являются операторы

$$O^2 = (K_1 + L_2)^2 + (K_2 - L_1)^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad L_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{12}$$

Им соответствует трехпараметрическая группа с инфинитезимальными операторами L_3, $K_1 + L_2$, $K_2 - L_1$. Их коммутационные свойства следующие:

$$[L_3, K_1 + L_2] = K_2 - L_1, \quad [K_2 - L_1, L_3] = K_1 + L_2, \quad [K_1 + L_2, K_2 - L_1] = 0. \tag{13}$$

Операторы (13) определяют группу движений плоскости, т. е. группу вращений и трансляций на обычной евклидовой плоскости (это — «малая группа», связанная с изотропным вектором). В данном случае операторы конечных преобразований этой подгруппы определяют группу движений на орисфере. Оператор O^2 есть как раз оператор Лапласа на плоскости в цилиндрических координатах, и поэтому естественно возникает решение в виде цилиндрических функций. Как всегда, L_3 просто соответствует вращениям вокруг одной оси.

4. Классические аналоги инвариантов подгрупп

Напомним, что найденные инфинитезимальные операторы непосредственно связаны с оператором четырехмерного момента количества движения. Для выяснения физического смысла инвариантов подгрупп рассмотрим координатное пространство, в котором можно ввести те же системы координат; например, S-система имеет вид

$$\begin{aligned} x_0 &= x \operatorname{ch} a, & x_3 &= x \operatorname{sh} a \cos \vartheta, \\ x_2 &= x \operatorname{sh} a \sin \vartheta \cos \varphi, & x_1 &= x \operatorname{sh} a \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned} \tag{14}$$

(для x и a необходимо допустить и комплексные значения). Формулы (1)–(4) остаются в силе.

Пусть x^i — произвольные криволинейные координаты. Инфинитезимальные операторы собственной группы Лоренца можно записать в виде [10]

$$X_\alpha = \xi^i_{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, 4, \quad \alpha = 1, \ldots, 6, \tag{15}$$

где $\xi^i_{(\alpha)}$ — решения уравнений Киллинга. Этим величинам можно сопоставить линейные первые интегралы уравнения геодезической

$$C^{(\alpha)} = \frac{\xi^i_{(\alpha)}\, dx^i}{ds}. \tag{16}$$

Мы здесь не будем выписывать значения всех интегралов в наших системах, однако рассмотрим те комбинации из них, которые соответствуют инвариантам подгрупп.

Инварианту всей группы Δ_L сопоставим классическую величину

$$\mathfrak{M}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} C^{(\alpha)2} - \sum_{\alpha=4}^{6} C^{(\alpha)2}.$$

В декартовых координатах имеем

$$\mathfrak{M}^2 = m^2 \{x_\mu x^\mu - (x_\mu x^\mu)^2\}; \tag{17}$$

это просто квадрат четырехмерного момента количества движения.

Теперь рассмотрим величины, сопоставленные инвариантам подгрупп (m — масса частицы).

S-система:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z &= m x^2 \operatorname{sh}^2 a \sin^2 \vartheta \frac{\partial \varphi}{ds}, \\ \mathcal{L}^2 &= m^2 x^4 \operatorname{sh}^4 a \left[\left(\frac{\partial \vartheta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

H-система:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z &= m x^2 \operatorname{ch}^2 a \operatorname{sh}^2 b \frac{d\varphi}{ds}, \\ \mathcal{H}^2 &= m^2 x^4 \operatorname{ch}^4 a \left[\left(\frac{db}{ds} \right)^2 + \operatorname{sh}^2 b \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{19}$$

C-система:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_z &= m\varkappa^2 \operatorname{sh}^2 b\frac{d\varphi}{ds},\\ \mathcal{K}_z &= m\varkappa^2 \operatorname{ch}^2 b\frac{da}{ds}.\end{aligned} \tag{20}$$

O-система:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_z &= m\varkappa^2 r^2 e^{2a}\frac{d\varphi}{ds},\\ \mathcal{O}^2 &= m^2\varkappa^4 e^{4a}\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, в S-системе получаем квадрат обычного трехмерного момента количества движения и его проекцию. В остальных системах возникают новые интегралы движения, и надо выяснить, в каких полях они сохраняются. Здесь мы ограничимся рассмотрением движения заряженной частицы в электромагнитном поле.

Рассмотрим одну из компонент тензорного представления второго ранга группы Лоренца, а именно — антисимметричный тензор

$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y & K_x \\ -L_z & 0 & L_x & K_y \\ L_y & -L_x & 0 & K_z \\ -K_x & -K_y & -K_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

который сопоставим четырехмерному моменту количества движения. При преобразовании Лоренца он преобразуется по формулам

$$M'_{ik} = g_{il}g_{km}M_{lm} \tag{23}$$

или в матричной форме $M' = gMg^T$ (g^T — транспонированная матрица).

Выделяя определенные субматрицы, стоящие в (22) на главной диагонали, получаем различные подгруппы и тем самым различные системы координат. Матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & L_x & K_y \\ -L_x & 0 & K_z \\ -K_y & -K_z & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

и совместно

$$\begin{pmatrix} 0 & L_2 \\ -L_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & K_z \\ -K_z & 0 \end{pmatrix} \tag{24'}$$

определяют соответственно S-, H- и C-системы. Чтобы получить O-систему, выразим тензор M_{ik} в базисе x, y, $\sqrt{1/2}(z-t)$, $\sqrt{1/2}(z+t)$. Получаем

$$\widetilde{M}_{ik} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & L_z & -\sqrt{\frac{1}{2}}(K_x+L_y) & \sqrt{\frac{1}{2}}(K_x-L_y) \\ -L_z & 0 & -\sqrt{\frac{1}{2}}(K_y-L_x) & \sqrt{\frac{1}{2}}(K_y+L_x) \\ \sqrt{\frac{1}{2}}(K_x+L_y) & \sqrt{\frac{1}{2}}(K_y-L_x) & 0 & K_z \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{2}}(K_x-L_y) & -\sqrt{\frac{1}{2}}(K_y+L_x) & -K_z & 0 \end{array}\right), \tag{25}$$

$$\widetilde{M}_{ik} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & L_z & -\sigma_{xy}^{(+)} & \sigma_{xy}^{(-)} \\ -L_z & 0 & -\sigma_{yx}^{(-)} & \sigma_{yx}^{(+)} \\ \sigma_{xy}^{(+)} & \sigma_{yx}^{(-)} & 0 & K_z \\ \hline -\sigma_{xy}^{(-)} & -\sigma_{yx}^{(+)} & -K_z & 0 \end{array}\right), \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(\pm)} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(K_\alpha \pm L_\beta), \tag{25'}$$

где выделена субматрица, определяющая «малую группу», связанную с изотропным вектором, и тем самым O-систему.

Интегралы движения, характеризующие отдельные системы, сохраняются, если отличны от нуля только те компоненты четырехмерного потенциала, которые не преобразуются при преобразовании из данной подгруппы. Эти компоненты должны зависеть только от комбинации координат, инвариантных по отношению к этим подгруппам. Итак, получаем

S-система:

$$A_i = 0, \quad A_0 = \Phi\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}, x^0\right], \quad i = 1, 2, 3. \tag{26}$$

H-система:

$$A_1 = \Phi\left[x^1, \left(x_0^2 - x_2^2 - x_3^2\right)^{1/2}\right], \quad A_\lambda = 0, \quad \lambda = 2, 3, 0. \tag{27}$$

O-система:

$$A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = -\Phi\left[x^0 - x^3, (x_\mu x^\mu)^{1/2}\right] = -A^3, \quad A_0 = \Phi\left[x^0 - x^3, (x_\mu x^\mu)^{1/2}\right] = A^0, \tag{28}$$

т. е. в базисе x, y, $\sqrt{1/2}\,(z - t)$, $\sqrt{1/2}\,(z + t)$ имеем

$$A^x = A^y = A^{z-t} = 0, \quad A^{z+t} = \sqrt{2}\,\Phi\left[x^0 - x^3, (x_\mu x^\mu)^{1/2}\right]. \tag{28'}$$

В C-системе положение несколько сложнее; это связано с тем, что здесь подгруппа распадается на две независимые однопараметрические подгруппы. Условие сохранения интегралов движения можно записать в виде

$$\begin{gathered} A_0 = A_1 = 0, \quad A_2 = x_2\Phi(a, b), \quad A_3 = x_3\Phi(a, b), \\ a = \left(x_0^2 - x_1^2\right)^{1/2}, \quad b = \left(x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2} \end{gathered} \tag{29}$$

или

$$\begin{gathered} A_2 = A_3 = 0, \quad A_0 = x_0\Phi'(a, b), \quad A_1 = x_1\Phi'(a, b), \\ \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial a} = \frac{1}{b}\frac{\partial\Phi'}{\partial b}. \end{gathered} \tag{29'}$$

Результаты этого раздела можно проверить, написав уравнения движения в криволинейных координатах

$$m\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds}\right) = e\left(\frac{\partial A^\sigma}{\partial x} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma}\right)u_\sigma \tag{30}$$

и требуя, чтобы величина $\mathscr{L}_z$ и соответственно одна из величин $\mathscr{L}^2$, $\mathscr{H}^2$, $\mathscr{K}^2$ или $\mathscr{O}^2$ сохранялись вдоль траектории. При этом снова получим условия (26)–(29) (с точностью до градиентного преобразования).

Выпишем еще тензоры электромагнитного поля, в которых сохраняются интегралы движения. Связь их симметрии со свойствами подгрупп в (22) очень прозрачна.

S-система:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x^1 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 \\ -x^1 & -x^2 & -x^3 & 0 \end{pmatrix} F(r,t), \quad r = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}, \quad t = x^0. \tag{31}$$

H-система:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & x^3 & x^0 \\ -x^2 & 0 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & 0 & 0 \\ -x^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F(h, x^1), \quad h = \left(x_0^2 - x_2^2 - x_3^2\right)^{1/2}. \tag{32}$$

O-система:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^1 & x^1 \\ 0 & 0 & x^2 & x^2 \\ -x^1 & -x^2 & 0 & x^3 - x^0 \\ -x^1 & -x^2 & -(x^3 - x^0) & 0 \end{pmatrix} F(x, a) \tag{33}$$

или иначе

$$\widetilde{F}^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}x^1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}x^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 - x^0 \\ -\sqrt{2}x^1 & -\sqrt{2}x^2 & -(x^3 - x^0) & 0 \end{pmatrix} F(x, a), \tag{33'}$$

где $x = (x_\mu x^\mu)^{1/2}$, $a = x^0 - x^3$ и $\widetilde{F}^{ik}$ — тензор электромагнитного поля в новом базисе.

C-система:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}x^1x^3 & -\frac{1}{2}x^1x^0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}x^2x^3 & -\frac{1}{2}x^2x^0 \\ -\frac{1}{2}x^1x^3 & -\frac{1}{2}x^2x^3 & 0 & x^3x^0 \\ \frac{1}{2}x^1x^0 & \frac{1}{2}x^2x^0 & x^3x^0 & 0 \end{pmatrix} F(a,b) +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & x^1x^2 & \frac{1}{2}x^1x^3 & \frac{1}{2}x^1x^0 \\ -x^1x^2 & 0 & -\frac{1}{2}x^2x^3 & -\frac{1}{2}x^2x^0 \\ -\frac{1}{2}x^1x^3 & \frac{1}{2}x^2x^3 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}x^1x^0 & \frac{1}{2}x^2x^0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F(a,b) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x^1x^2 & x^1x^3 & 0 \\ -x^1x^2 & 0 & 0 & -x^0x^2 \\ -x^1x^3 & 0 & 0 & -x^0x^3 \\ 0 & x^0x^2 & x^0x^3 & 0 \end{pmatrix} F(a,b); \tag{34}$$

$$a = \left(x_0^2 - x_1^2\right)^{1/2}, \quad b = \left(x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}.$$

5. Заключение

Мы видим, что свойства релятивистского момента количества движения, связанного с однородной группой Лоренца, намного богаче свойств обычного трехмерного момента, связанного с группой вращений. Наличие различных подгрупп

группы Лоренца сразу приводит к различным полным наборам коммутирующих наблюдаемых и тем самым к различным полным наборам собственных функций, по которым можно разлагать физические величины (амплитуды рассеяния). В теории поля обычно используется только разложение по парциальным волнам, что соответствует случаю разложений в нашей S-системе. В случае, когда задача симметрична не по отношению к группе вращений, а по отношению к другой подгруппе, представляется более естественным вести разложение по собственным функциям в соответствующей системе [1)].

Групповая трактовка возникающих комплексных моментов непосредственна, так как все рассматриваемые подгруппы, кроме группы вращений, некомпактны и для них можно строить неприводимые (вообще говоря, бесконечномерные) представления, соответствующие любому комплексному числу α. Базисные функции представлений группы Лоренца, соответствующие системам S, H, C и O, будут рассмотрены в следующей работе, а также будут исследованы вопросы о других системах координат (эллиптического типа), в которых уравнение Лапласа допускает разделение переменных, и о преобразованиях, переводящих одну такую систему в другую.

Литература

1. *Винтерниц П., Смородинский Я. А., Углирж М.* Препринт ОИЯИ, Е-1591, 1964.
2. *Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **46**, 1793, 1964.
3. *Олевский М. П.* Математ. сб., **27**, 379, 1950.
4. *Смородинский Я. А.* Атомная энергия, **14**, 110, 1963.
5. *Synge J. L.* Relativity. The General Theory. North-Holland, 1960; *Синг Дж. Л.* Общая теория относительности. ИИЛ, 1963.
6. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. Гостехиздат, 1958.
7. *Наимарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. Гостехиздат, 1958.
8. *Wigner E. P.* Ann. of Math, **40**, 149, 1939.
9. *Barginann V.* Ann. of Math, **48**, 568, 1947.
10. *Davis W. R., Katzin G. H.* Amer. J. Phys., **30**, 750, 1962.
11. *Sertorio L., Toller M.* Preprint, № 44, INFN — Sezione di Roma, 1964.

[1)] Это проделано для уравнения Бете—Солпитера для бесспиновых частиц в работе Серторио и др. [11], о которой мы узнали после окончания данной работы Там рассмотрено уравнение для перекрестного канала, отмечена его симметрия по отношению к трехмерной группе Лоренца и произведено разложение по базисным функциям этой группы. Это соответствует разложению в нашей H-системе.

Собственные функции оператора Лапласа, реализующие представления групп $U(2)$, $SU(2)$, $SO(3)$, $U(3)$, $SU(3)$ и символический метод

Н. Я. Виленкин, Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский

Для нахождения неприводимых представлений групп $U(n)$ наряду с абстрактно-операторным методом можно использовать метод [1)], основанный на использовании оператора Лапласа, действующего в пространстве S_σ — пространстве однородных полиномов π_0 степени σ.

Естественно, что при таком подходе мы получаем представления унитарных групп, характеризующиеся двумя числами, и для ортогональных групп — одним числом.

Известно, что группа $U(n)$ ($SU(n)$) есть группа унитарных (унимодулярных) преобразований в C_n (комплексное n-мерное пространство), оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = \text{const}. \tag{1}$$

Выражение (1) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 = \text{const}, \tag{1'}$$

где

$$2x_1 = z^1 + z_1, \quad 2ix_2 = z^1 - z_1, \quad 2x_3 = z^2 + z_2 \ \text{и т. д.}; \quad (z^i)^* = z_i. \tag{2}$$

Пусть оператор Лапласа

$$\Delta = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_i^2}$$

действует в S_σ-пространстве так, что

$$\Delta \pi_\sigma = 0 \tag{3}$$

$$\pi_\sigma = \sum_{r+s+\ldots+t=\sigma} a_{r,s,\ldots,t}(x_1)(x_2)^S \ldots, x_{2n}^t. \tag{4}$$

Учитывая (2), запишем (4) как полином от комплексных переменных z^i и z_i:

$$\pi'_\sigma = \sum_{\substack{\lambda+\mu+\ldots+\nu=p \\ k+l+\ldots+m=q \\ p+q=\sigma}} b_{k,l,\ldots,m}^{\lambda,\mu,\ldots,\nu}(z^1)^\lambda (z^2)^\mu \ldots (z^n)^\nu z_1^k z_2^l \ldots z_k^m. \tag{4'}$$

1) Такой метод использован ранее на группе Лоренца [1].

Здесь $p(q)$ — степень контр- либо ковариантных векторов $z^i(z_i)$. Дифференцирование полинома (4′) производится так, как если бы z^i и z_i были независимыми переменными. Алгебраическая тождественность одночленов $M(p,q)$ полинома π_σ со смешанными тензорами, построенными из векторов, принадлежащих пространству C_n, позволяет использовать их как базис для построения представлений группы, поскольку одночлены преобразуются с помощью преобразований группы друг в друга [2].

Полином $\pi_{\sigma'}$ симметричен по p и q отдельно. Определим число линейно независимых полиномов степени σ. Целая однородная функция степени σ имеет

$$N_1 = \frac{(p+n-1)!(q+n-1)!}{p!(n-1)!q!(n-1)!}$$

коэффициентов. Уравнение Лапласа

$$\Delta\pi_\sigma \equiv 4\left(\frac{\partial^2}{\partial z^1 \partial z_1} + \frac{\partial^2}{\partial z^2 \partial z_2} + \dots \frac{\partial^2}{\partial z^n \partial z_n}\right)\pi'_\sigma = 0 \tag{5}$$

налагает

$$N_2 = \frac{(p+n-2)!(q+n-2)!}{(p-1)!(n-1)!(q-1)!(n-1)!}$$

условий, поскольку понижает степень полинома до $\sigma-2$. Отсюда следует, что общее число линейно независимых однородных гармонических полиномов степени σ равно $N = N_1 - N_2$. Например, для $n=2$ и $n=3$ соответственно

$$N(2) = p+q+1, \quad N(3) = \left(\frac{\sigma+2}{2}\right)(p+1)(q+1). \tag{6}$$

Оператор Лапласа в S_σ играет ту же роль, что и обращение в нуль следа тензоров. Однородные гармонические полиномы на многомерных сферах сводятся к гиперсферическим функциям или полиномам Якоби.

Перейдем теперь к получению полиномов Якоби путем решения уравнения Лапласа на сфере (1′) методом разделения переменных. Нам будет удобно использовать n'-мерное вещественное пространство (в унитарном случае $n' = 2n$). На сфере в n'-мерном пространстве зададим систему координат. Выбранную систему координат будем изображать с помощью некоторого графика.

Идея графического представления координатных систем была предложена в другой форме ранее в работе [3], где она была использована для группы Лоренца. Здесь будет описан другой, более общий способ, который применим и для унитарных групп. Использование этих символов позволило сформулировать простой алгоритм для записи уравнений в новых переменных и их решений[2)].

Изложим кратко графический метод. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — декартовы координаты точки на сфере. Изобразим их как некоторые отрезки (рис. 1, *a*). Будем теперь их объединять так, чтобы на первом этапе в узел попало не больше двух координат, на втором этапе — не более двух предшествующих объединений и т. д. При построении координатной системы для $U(n)$ на первом этапе обязательны попарные объединения, это следует из того, что $2x = z + z^*$.

[2)] Результаты настоящей работы доложены на совещании отделения ядерной физики АН СССР 9 февраля 1965 г.

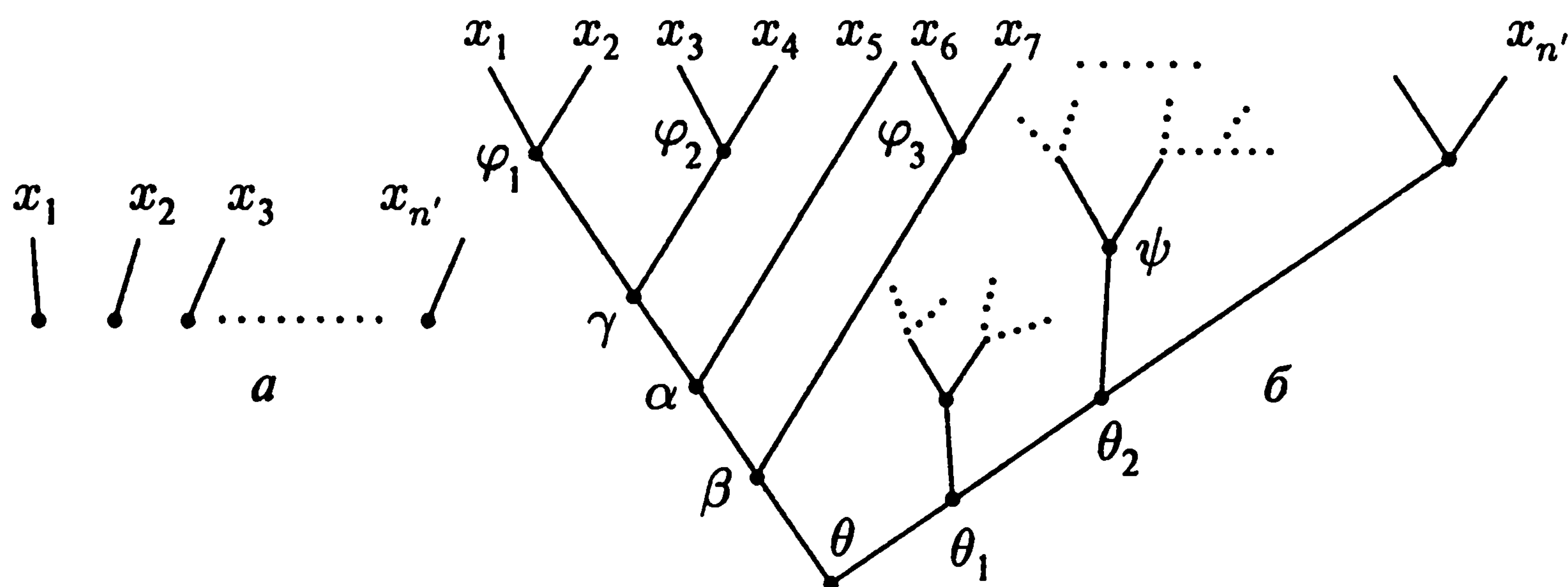


Рис. 1

Поясним сказанное выше графически. На рис. 1, *б* число свободных концов равно размерности пространства. Число узлов равно числу параметров, задающих сферу фиксированного радиуса. Каждому узлу припишем угол θ_i (отнюдь не угол раствора!). Условимся линии, идущие налево от узла θ_i, считать $\cos\theta_i$, направо $\sin\theta_i$. Узел θ — вершина графа. Существует два сорта линий: линии с узлами на концах и линии с одним свободным концом. Первые назовем пропагаторами, вторые — свободными концами. Коэффициент Ламе h_ψ есть произведение пропагаторов от вершины графа до узла ψ, т. е.

$$h_\psi = \prod_{\theta_i=\theta}^{\psi} \underset{\theta_i}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{\theta_{i+1}}{\bullet} \tag{7}$$

Запишем (7) в явном виде для рис. 1, *б*:

$$h_\psi = \sin\theta\sin\theta_1\cos\theta_2. \tag{7'}$$

Аналогично для любого узла.

Декартовые координаты выражаются через углы по формуле

$$x_\psi = h_\psi \times \underset{\varphi}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- \tag{8}$$

где h_φ — коэффициент Ламе, для узла φ. Напишем в явном виде (8), например, для узла φ_2:

$$\begin{aligned} x_3 &= \cos\theta\cos\beta\cos\alpha\sin\gamma\cos\varphi_2, \\ x_4 &= \cos\theta\cos\beta\cos\alpha\sin\gamma\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{8'}$$

Зная коэффициенты Ламе, легко записать метрику и оператор Лапласа в новых переменных согласно формулам

$$dl^2 = \sum_i h_i^2\, dq_i^2, \tag{9}$$

$$\Delta = \frac{1}{\prod h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_i}\prod_{i\neq k} h_k \frac{\partial}{\partial q_i}. \tag{10}$$

Для нашего случая q_i — углы.

Лапласиан, заданный на сфере и действующий в пространстве полиномов π_σ, имеет собственные значения $-\sigma(\sigma+n'-2)$ (что тривиально следует из сказанного выше), т. е.

$$\Delta_\Omega \pi_\sigma = -\sigma(\sigma+n'-2)\pi_\sigma, \tag{11}$$

где n' — размерность пространства.

Уравнение (11) для рис. 1, *б* имеет вид

$$\left[\frac{1}{\cos^c\theta\sin^s\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos^c\theta\sin^s\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{[\ldots\beta\ldots]}{\cos^2\theta}+\frac{[\ldots\theta_1\ldots]}{\sin^2\theta}+\sigma(\sigma+n'-2)\right]\pi_\sigma=0, \quad (12)$$

где c — число последующих узлов налево от вершины θ и s — число последующих узлов направо от вершины θ, $s+c=n'-2$. Выражения $[\ldots\beta\ldots]$ и $[\ldots\theta_1\ldots]$ записываются аналогично (12), причем узлы β и θ_1 считаются теперь вершинами соответствующих подграфов.

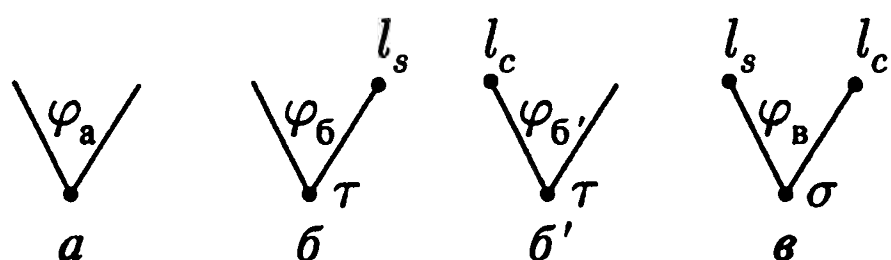


Рис. 2

Уравнение (12) решается методом разделения переменных. Поэтому в каждом узле возникает константа разделения переменных (аналогичная σ в вершине), и она вместе с углом дополнительно характеризует узел. Итак, чтобы написать решение уравнения (12), нужно рассмотреть каждый узел отдельно, написать для него уравнение и его решение и представить полное решение как произведение отдельных решений. При таком подходе нам встретятся три типа узлов, указанных на рис. 2.

Условие однозначного покрытия сферы налагает следующие ограничения на область изменения углов:

$$0\leqslant\varphi_а\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi_б\leqslant\pi,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi_{б'}\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\varphi_в\leqslant\frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Рассмотрим элементарную ячейку графа рис. 2, *в*. Здесь l_c, l_s, σ — константы разделения переменных. Уравнение по переменной $\theta=\varphi_в$ будет следующее:

$$\left[\frac{1}{\cos^c\theta\sin^s\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos^c\theta\sin^s\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{l_c(l_c+c-1)}{\cos^2\theta}-\frac{l_s(l_s+s-1)}{\sin^2\theta}+\sigma(\sigma+c+s)\right]\Psi(\theta)=0. \quad (14)$$

Обозначим $\sin^2\theta=z$ и решение будем искать в виде $z^\mu(1-z)^\nu F(a,b;s',z)$. Тогда для $F(a,b;c',z)$ получим гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)F''+\left\{\frac{1+s}{2}+l_s-\left[\frac{c+s}{2}+l_c+l_s+1\right]z\right\}F'-\\-\frac{(l_s+l_c)(l_c+l_s+c+s)-\sigma(\sigma+s+c)}{4}F=0 \quad (15)$$

при условии $2\nu=l_c$ и $2\mu=l_s$. Сравнивая (15) с канонической записью гипергеометрического уравнения

$$z(1-z)F''+[c'-(a+b+1)z]F'-abF=0, \quad (16)$$

получаем

$$2a=l_c+l_s+c+s,\quad 2b=l_c+l_s-\sigma;\quad c'=l_s+\frac{1+s}{2}. \quad (17)$$

Отсюда решение уравнения (14) есть

$$\Psi(\theta)=\cos^{l_c}\theta\sin^{l_s}\theta F\left(a,b;c',\sin^2\theta\right). \quad (18)$$

Требование регулярности налагает на l_s и l_c ограничение

$$l_c, l_s\geqslant 0. \quad (19)$$

Вместо $F\left(a, b; c', \sin^2\theta\right)$ по известным формулам решение (18) можно записать через многочлены Якоби:

$$\Psi(\theta) = \cos^{l_c}\theta \sin^{l_s}\theta P_n^{\alpha,\beta}(\cos 2\theta), \tag{20}$$

где

$$2n = \sigma - l_c - l_s; \quad \alpha = l_s + \frac{s-1}{2}; \quad \beta = l_c + \frac{c-1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

причем тогда и только тогда, когда $n \geqslant 0$ (теорема 4.2.2 [4]). Из $n \geqslant 0$ следует $\sigma \geqslant l_c + l_s$.

Полиномы Якоби ортогональны с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ [4], т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) P_{n'}^{\alpha,\beta}(x)\, dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n'+\alpha+1)\Gamma(n'+\beta+1)\delta_{nn'}}{(2n'+\alpha+\beta+1)\Gamma(n'+1)\Gamma(n'+\alpha+\beta+1)} = N_{n'}^{\alpha,\beta}\delta_{nn'}. \tag{21}$$

Так как элемент объема $dV = \Pi h_i dq_i$, то оказывается, что множитель перед дифференциалом $d\cos 2\theta$ вместо с множителем, стоящим перед полиномом в (20), дает нужный вес, а именно:

$$\cos^c\theta \sin^s\theta \sin^{2l_s}\theta \cos^{2l_c}\theta\, d\theta = \frac{(-1)}{2^{l_c+l_s+(c+s)/2}}(1-\cos 2\theta)^{l_s+(s-1)/2}(1+\cos 2\theta)^{l_c+(c-1)/2}\, d\cos 2\theta.$$

Итак, ортонормированное решение уравнения (14), соответствующее ячейке рис. 2, *в*, имеет вид

$$\Psi_{n,c,s}^{\alpha,\beta}(x) = \left\{N_n^{\alpha,\beta}\right\}^{-1/2}(1-x)^{\alpha/2}(1+x)^{\beta/2}P_n^{\alpha,\beta}(x), \tag{22}$$

где

$$x = \cos 2\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 2n = \sigma - l_c - l_s, \quad \alpha = l_s + \frac{s-1}{2}, \quad \beta = l_c + \frac{c-1}{2},$$

$c(s)$ — число левых (правых) узлов от вершины σ. Во всех внутренних узлах (узлах, после которых имеются еще узлы) константы разделения переменных не меньше нуля.

Символы рис. 2, *б* удобно рассмотреть отдельно (ячейка 2, *б*$'$ есть 2, *б* с заменой $\cos\varphi_6 \to \sin\varphi_6$). Согласно сформулированному выше правилу, уравнение по переменной $\vartheta = \varphi_6$ записывается следующим образом:

$$\left[\frac{1}{\sin^s\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin^s\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{l_s(l_s+s-1)}{\sin^2\vartheta} + \tau(\tau+s)\right]\Phi(\vartheta) = 0. \tag{23}$$

Обозначая $\cos\vartheta$ через z и делая подстановку $\Phi(\vartheta) = (1-z^2)^\mu P(z)$, получаем для $P(z)$ уравнение

$$(1-z^2)P'' - [2l_s + s + 1]zP' + (\tau - l_s)(\tau + l_s + s)P = 0 \tag{24}$$

при условии $2\mu = l_s$. Его решением являются ультрасферические функции или полиномы Гегенбауэра [4], $P_n^{\alpha,\alpha}(z)$, где

$$n = \tau - l_s, \quad \alpha = l_s + \frac{s-1}{2},$$

и решение уравнения (23) есть

$$\Phi(\vartheta) = \sin^{l_s}\vartheta P_n^{\alpha,\alpha}(\cos\vartheta). \tag{25}$$

Поскольку полиномы Гегенбауэра ортогональны с весом $\left(1-z^2\right)^\alpha$, т. е.

$$\int_{-1}^{1}\left(1-z^2\right)^\alpha P_n^{\alpha,\alpha}(z)P_{n'}^{\alpha,\alpha}(z)\,dz=\frac{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(n'+\alpha+1)\delta_{nn'}}{(2n'+2\alpha+1)\Gamma(n'+1)\Gamma(n'+2\alpha+1)}=N_{n'}^{\alpha,\alpha}\delta_{nn'},\quad (26)$$

то ортонормированное решение уравнения (23), соответствующее ячейке рис. 2, б, имеет вид

$$\Psi_{n,0,s}^{\alpha,\alpha}(z)=\left\{N_n^{\alpha,\alpha}\right\}^{-1/2}\left(1-z^2\right)^{\alpha/2}P_n^{\alpha,\alpha}(z),\quad (27)$$

где

$$z=\cos\theta,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\quad n=\tau-l_s,\quad \alpha=l_s+\frac{s-1}{2},\quad n\geqslant 0,1,2,3\ldots.$$

Для полноты напишем очевидные тождества

$$\text{(диаграмма: } \varphi,\ m) \equiv e^{im\varphi},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad (27')$$

m — как положительное, так и отрицательное число,

$$\text{(диаграмма: } l,\ \theta,\ \varphi,\ m) \equiv Y_{lm}(\theta)e^{im\varphi},$$
$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad -l\leqslant m\leqslant l,\quad l\geqslant 0.\quad (27'')$$

Следует отметить, что для рис. 2, б в случае c, $s=1$, l_c, $l_s\gtrless le$ допустимо при этом

$$2n=\sigma-|l_c|-|l_s|;\quad \alpha=|l_s|;\quad \beta=|l_c|.\quad (28)$$

Применим изложенный выше метод для нахождения решений, реализующих неприводимые представления групп $U(2)$, $SU(2)$, $SO(3)$, $U(S)$, $SU(3)$. К сожалению, для $U(n)$, при $n\geqslant 4$, таким образом мы можем пока получить только те представления, которые построены из кварков и антикварков.

Начнем с группы $U(2)$. Инвариантная квадратичная форма в C_2 для $U(2)$ есть

$$|z_1|^2+|z_2|^2=1\quad (29)$$

или

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1.\quad (29')$$

Уравнение (29′) есть уравнение сферы единичного радиуса в 4-мерном вещественном пространстве R_4. Зададим в пространстве R_4 биполярную систему координат

$$\begin{cases} x_1=\cos\theta_1\cos\varphi_1,\\ x_2=\cos\theta_1\sin\varphi_1,\\ x_3=\sin\theta_1\cos\varphi_2,\\ x_4=\cos\theta_1\cos\varphi_2,\end{cases} = \text{(диаграмма: } x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \theta_1)\quad (30)$$

Метрика для (30) определяется как

$$dl^2=d\theta_1^2+\cos^2\theta_1\,d\varphi_1^2+\sin^2\theta_1\,d\varphi_2^2.\quad (31)$$

Инвариантный Лапласиан, соответствующий метрике (31), равен

$$\Delta(2)=\frac{1}{\cos\theta_1\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cos\theta_1\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\frac{1}{\cos^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}+\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial_1^2}{\partial\varphi_2^2}.\quad (32)$$

Еще одним инвариантом представления будет оператор, соответствующий общему вращению фазы вектора $z = (z_1, z_2)$ как целого [5]:

$$\widehat{m} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2}\right). \tag{33}$$

Регулярные решения системы уравнений

$$[\Delta + l(l+2)]\Psi = 0, \quad (\widehat{m} - m)\Psi = 0 \tag{34}$$

дадут неприводимые представления групп $U(2)$.

Решение уравнений ищем в виде

$$\Psi(\varphi_1, \theta_1, \varphi_2) = e^{im_1\varphi_1}\Phi(\theta_1)e^{im_2\varphi_2}, \tag{35}$$

где функция $\Phi(\theta_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{1}{\cos\theta_1 \sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\cos\theta_1 \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{m_1^2}{\cos^2\theta_1} - \frac{m_2^2}{\sin^2\theta_1} + l(l+2)\right]\Phi(\theta_1) = 0. \tag{36}$$

Из второго уравнения (34) следует

$$m_1 + m_2 = m. \tag{37}$$

Согласно (22) ортонормированное решение уравнения (36) можно записать как

$$\Phi^{\alpha,\beta}_{n,1,1}(x) = \left\{N^{\alpha,\beta}_n\right\}^{-1/2}(1-x)^{\alpha/2}(1+x)^{\beta/2}P^{\alpha,\beta}_n(x), \tag{38}$$

где

$$x = \cos 2\theta_1, \quad 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = |m_2|, \quad \beta = |m_1|, \quad 2n = l - |m_1| - |m_2|. \tag{39}$$

Используя равенство [6]

$$P^{l/2}_{(m_1-m_2)/2,\,(m_1+m_2)/2}(x) = \left\{N^{|m_2|,\,|m_1|}_n\right\}^{-1/2}(1+x)^{|m_2|/2}(1+x)^{|m_1|/2}P^{|m_2|,\,|m_1|}_n(x), \tag{40}$$

запишем (35) в явном виде:

$$\Psi_{l,m_1,m_2}(\varphi_1, \theta_1, \varphi_2) =$$
$$= \exp\left\{i\,\frac{m_1 - m_2}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\right\}P^{l/2}_{(m_1-m_2)/2,\,(m_1+m_2)/2}(\cos 2\theta_1)\exp\left\{i\,\frac{m}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right\}, \tag{41}$$

где

$$0 \leqslant \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant 4\pi, \quad -2\pi \leqslant \varphi_1 - \varphi_2 \leqslant 2\pi.$$

Умножим (41) на $\exp[i(m_1 - m_2)\pi]$ и введем привычное обозначение Вигнера

$$\mathfrak{D}^{l/2}_{k_1,k_2}(\psi_1, \beta, \psi_2) = e^{ik_1\psi_2}P^{l/2}_{k_1,k_2}(\cos\beta)e^{ik_2\psi_1}; \tag{42}$$

здесь

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2; \quad \psi_2 = 2\pi + \varphi_1 - \varphi_2, \quad 0 \leqslant \psi_1, \psi_2 \leqslant 4\pi;$$
$$2k_1 = m_1 - m_2, \quad 2k_2 = m_1 + m_2, \quad \beta = 2\theta_1.$$

Из (39) следует, что

$$n = \begin{cases} l/2 - |k_1|, & |k_1| \geqslant |k_2| \\ l/2 - |k_2|, & |k_2| \geqslant |k_1|, \end{cases} \tag{43}$$

т. е. $-l/2 \leqslant k_1, k_2 \leqslant l/2$, и размерность представления равна $l+1$. С числами p и q числа l, m связаны простым соотношением

$$l = p + q, \quad m = p - q. \tag{44}$$

Последнее равенство в (44) тривиально следует из (3′) и (5). Функции (42) реализуют представление $U(2)$. Причем представления характеризуются числами l, m или p, q.

Для группы $SU(2)$ все представления группы $U(2)$ с различными m эквивалентны. Это следует из-за наличия специального инвариантного тензора $\varepsilon^{\alpha\beta}$, т. е. представление $SU(2)$ характеризуется одним числом $l/2$ — весом представления. Чтобы получить все представления $U(2)$, нужно умножить (42) на $SU(2)$ скаляр $\varepsilon^{\alpha\beta} z_\alpha^{(1)} z_\beta^{(2)}$ (детерминант) в любой степени. Таким образом, для группы $SU(2)$ мы получили все представления целого веса при четных l и полуцелого — для нечетных.

Основываясь на известном гомоморфизме $SU(2)$ и $SO(3)$, рассмотрим полученные представления с точки зрения группы $SO(3)$. Решение (42) есть матрица, отвечающая при неприводимом представлении веса $l/2$ произвольному вращению g с углами Эйлера ψ_1, β, ψ_2. Правда, ψ_1, ψ_2 меняются пока от нуля до 4π, т. е. при таком вращении мы дважды покрываем двумерную сферу и получаем однозначные представления $SO(3)$ и при полуцелом весе.

Неудивительно, что мы получили $\mathfrak{D}$-функцию при таком подходе, поскольку известно, что на группу $SO(3)$ можно отобразить трехмерную сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками [6], т. е. трехмерная сфера в R_4 является областью задания континиуума функций g, которые суть элементы $SO(3)$. В случае отождествления диаметрально противоположных точек азимутальные углы φ_1 и φ_2 меняются в пределах

$$0 \leqslant \varphi_1, \varphi_2 \leqslant \pi, \tag{45}$$

а $m_1, m_2 = \pm 0, 2, 4, 6 \ldots$, т. е. и l — четные. Отсюда, матрица (42) есть матрица представления целого веса (однозначное представление) и ψ_1, β, ψ_2 — обычные углы Эйлера. При $m_1 = \pm m_2$ (42) превращается в обычные сферические функции, что особенно видно из уравнения (36), которое превращается в

$$\left[\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{m_1^2}{\sin^2\beta} + \frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}+1\right)\right]\Phi(\beta) = 0. \tag{46}$$

Получим двузначные представления. Наличие двузначных представлений связано с топологической структурой группы, именно с ее двусвязностью, т. е. существуют замкнутые кривые, не переходящие друг в друга при гомоморфизме. Поэтому мы налагаем дополнительное условие

$$0 \leqslant \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant 2\pi, \tag{47}$$

хотя φ_1 и φ_2 могут меняться от 0 до 2π, т. е. осуществим некоторую «синхронизацию» вращений в плоскостях (x_1, x_2) и (x_3, x_4): если $\varphi_1 = 2\pi$, то $\varphi_2 = 0$ и наоборот. При этом $m_1, m_2 = \pm 0, 1, 2, 3 \ldots$, и $l = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Теперь уже при нечетных l получаем двузначные представления $SO(3)$.

Отметим, что если положить в (32) $\varphi_1 = \varphi_2$, то первое уравнение (34) превращается в

$$\left[\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\sin^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}+1\right)\right]\Psi(\beta,\varphi) = 0, \tag{48}$$

которое допускает в качестве своего решения присоединенные функции Лежандра полуцелого порядка при нечетных l. Уравнение (29′) превращается в уравнение

некоторой двухмерной поверхности при $\varphi_1 = \varphi_2$, причем при $\theta_1 = \pi/4$ $x_1(x_2)$ становится тождественным с $x_3(x_4)$, и само уравнение (29') распадается формально на два уравнения окружностей

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}, \quad x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2}. \tag{49}$$

Вследствии тождественности x_1 и x_3, x_2 и x_4 эти окружности тождественны и их нужно склеить. Итак, требованием $\varphi_1 = \varphi_2$ мы из трехмерной сферы в пространстве R_4 делаем некоторую двумерную двусвязную поверхность. Если осуществлять представление группы $SU(2)$ линейными операторами в пространстве функций (42), то $l/2$ можно отождествить со спином (изоспином), а $(m_1 - m_2)/2$ — с его проекцией.

Теперь рассмотрим группы $U(3)$ и $SU(3)$. Вектор в C_3 можно параметризовать как

$$z = \left(\cos\theta e^{i\varphi_1};\ \ \sin\theta\cos\theta_1 e^{i\varphi_2};\ \ \sin\theta\sin\theta_1 e^{i\varphi_3}\right)$$

или графически в R_6

$$\equiv \begin{cases} x_1 = \cos\theta\cos\varphi_1, \\ x_2 = \cos\theta\sin\varphi_1, \\ x_3 = \sin\theta\cos\theta_1\cos\varphi_2, \\ x_4 = \sin\theta\cos\theta_1\sin\varphi_2, \\ x_5 = \sin\theta\sin\theta_1\cos\varphi_3, \\ x_6 = \sin\theta\sin\theta_1\sin\varphi_3. \end{cases} \tag{50}$$

Согласно общему правилу (12) легко записать инвариантный Лапласиан:

$$\Delta(3) = \frac{1}{\cos\theta\sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\Delta(2). \tag{51}$$

Существует еще инвариантный оператор

$$\widehat{m} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial}{\partial\varphi_3}\right),$$

откуда представление $U(3)$ реализуется решениями уравнений

$$(\Delta(3) + \sigma(\sigma+4)]\Psi = 0 \quad (\widehat{m} - m)\Psi = 0. \tag{52}$$

Используя правило (22), сразу напишем решение уравнений (52) для графа, изображенного в формуле (50).

$$\Psi^{m_1,m_2,m_3}_{n_1,n_2}(\theta,\theta_1,\varphi_i) = \Psi^{l+1,|m_1|}_{n_1,1,3}(x)\Psi^{|m_3|,|m_2|}_{n_2,1,1}(y)\exp\left(i\sum_{i=1}^{3} m_i\varphi_i\right), \tag{53}$$

где

$$x = \cos 2\theta, \quad y = \cos 2\theta_1, \quad 2n_1 = \sigma - l - |m_1|, \quad 2n_2 = l - |m_2| - |m_3|, \quad n_{1,2} \geqslant 0.$$

Из $n_1, n_2 \geqslant 0$ следует, что

$$\sigma - |m_1| \geqslant l \geqslant |m_2| + |m_3| \geqslant |m - m_1|. \tag{54}$$

Второе уравнение (52) дает условие

$$m_1 + m_2 + m_3 = m, \tag{55}$$

и из (4′) и (5) следует, что

$$m = p - q. \tag{56}$$

Учитывая (6) и (4′), получаем, что число линейно независимых решений (мультипольность) (53), выраженное через числа σ и m, задающих представление, равно

$$N = \left(\frac{\sigma+2}{2}\right)\left(\frac{(\sigma+2)^2}{4} - \frac{m^2}{4}\right). \tag{57}$$

Этот результат можно получить из условия (54) с помощью диаграммы на плоскости (l, m_1) [5].

Решения (53) для группы $SU(3)$ дают все представления, а для группы $U(3)$ лишь некоторые. Чтобы получить все представления $U(3)$, нужно включить в рассмотрение все представления общего фазового поворота, которые задаются положительными целыми степенями детерминантов (скаляров $SU(3)$)

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} z^{\alpha}_{(1)} z^{\beta}_{(2)} z^{\gamma}_{(3)}, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} z^{(1)}_{\alpha} z^{(2)}_{\beta} z^{(3)}_{\gamma}.$$

Как и в случае $SU(2)$, в $SU(3)$ удобно отсчитывать фазы от центра

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} m_i \sum_{k=1}^{3} \varphi_k \equiv \frac{m}{3}\sum_{k=1}^{3}\varphi_k$$

(см. Приложение); тогда

$$\exp\left(i\sum_{k=1}^{3} m_k\varphi_k\right) \exp\left[\frac{2m_1 - m_2 - m_3}{3} i(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \times$$
$$\times \exp\left[\frac{m_1 + m_2 - 2m_3}{3}(\varphi_2 - \varphi_3) i\right] \exp\left(i\frac{m}{3}\sum_{k}^{3}\varphi_k\right). \tag{58}$$

Если осуществлять представление группы $SU(3)$ линейными операторами в пространстве функций (53), то $(2m_1 - m_2 - m_3)/3$ можно отождествить с гиперзарядом Y, а $(m_1 + m_2 - 2m_3)/3$ с Q-зарядом, т. е.

$$Y = \frac{2m_1 - m_2 - m_3}{3}, \qquad Q = \frac{m_1 + m_2 - 2m_3}{3} \tag{59}$$

и

$$-\frac{p+2q}{3} \leqslant Y \leqslant \frac{2p+q}{3}, \qquad T_3 = \frac{Q - Y}{2} = \frac{(m_2 - m_3)}{2}.$$

Мы получили результаты как и в [7], только m_1, m_3 нужно заменить на m_3, m_1.

Авторы благодарят Ю. А. Данилова за проявленный интерес к работе и обсуждения.

Приложение

О диагональных матрицах коммутирующих операторов группы $SU(n)$

Как группа $U(n)$, так и $SU(n)$ есть группы матриц, действующих в n-мерном комплексном пространстве C_n и оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = \text{const}. \tag{П.1}$$

Тривиальная группа $U(1)$ переводит $SU(n)$ в $U(n)$ по формуле

$$U(n) = U(1)SU(n). \quad (\text{П.2})$$

Пусть в C_n задан базис $z_k = a_h e^{(i\varphi_k)}$, где $\operatorname{Im} a_k \equiv 0$, который в z' преобразуется с помощью матриц $U(n)$:

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} = U(n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}. \quad (\text{П.3})$$

В формуле (П. 3) перейдем к новому базису справа и слева, вынося соответственно фазы

$$\exp\left\{\frac{i}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\right\} \quad \text{и} \quad \exp\left\{\frac{i}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k'}\right\}.$$

Положив

$$U(1) = \exp\left\{\frac{i}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i - \frac{i}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k'}\right\},$$

получим

$$\xi' = SU(n)\xi. \quad (\text{П.4})$$

Базис ξ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_1 \exp\left\{i\frac{n-1}{n}\psi_1\right\}\exp\left\{i\frac{n-2}{n}\psi_2\right\}\exp\left\{i\frac{n-3}{n}\psi_3\right\}\ldots\exp\left\{\frac{i}{n}\psi_{n-1}\right\},\\
\xi_2 &= a_2 \exp\left\{-\frac{i}{n}\psi_1\right\}\exp\left\{i\frac{n-2}{n}\psi_2\right\}\exp\left\{i\frac{n-3}{n}\psi_3\right\}\ldots\exp\left\{\frac{i}{n}\psi_{n-1}\right\},\\
\xi_3 &= a_3 \exp\left\{-\frac{i}{n}\psi_1\right\}\exp\left\{-\frac{i}{n}2\psi_2\right\}\exp\left\{i\frac{n-3}{n}\psi_2\right\}\ldots\exp\left\{\frac{i}{n}\psi_{n-1}\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= a_n \exp\left\{-\frac{i}{n}\psi_1\right\}\exp\left\{-i\frac{2}{n}\psi_2\right\}\times\exp\left\{-i\frac{3}{n}\psi_3\right\}\ldots\exp\left\{-i\frac{n-1}{n}\psi_{n-1}\right\},
\end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где $\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_2$, $\psi = \varphi_2 - \varphi_3, \ldots, \psi_{n-1} = \varphi_{n-1} - \varphi_n$. Выпишем матрицу, составленную из показателей экспонент базиса (П. 5):

$$M(n) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}
n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 1\\
-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 1\\
-1 & -2 & n-3 & n-4 & \ldots & 1\\
-1 & -2 & -3 & n-4 & \ldots & 1\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
-1 & -2 & -3 & -4 & \ldots & -(n-1)
\end{pmatrix}. \quad (\text{П.6})$$

Мы получили удивительную по красоте и тривиальности построения прямоугольную матрицу. Число столбцов ее равно $n-1$, т. е. равно рангу группы $SU(n)$, число строчек равно n, т. е. размерности C_n.

Пусть $(n-1)$ коммутирующих операторов

$$H_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\psi_k}$$

действуют в C_n с базисом (П. 5), который является тензорным произведением экспонент, тогда числа столбцов дадут собственные значения оператора (проекции спина), а диагональные матрицы в базисе (П. 5) будут иметь на диагоналях элементы столбца матрицы (П. 6), соответствующего оператору H_k. Например, для группы $SU(2)$, $SU(3)$ матрица (П. 6) имеет вид соответственно

$$M(2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M(3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{П.7}$$

Группа $SU(2)$ — группа первого ранга, т. е. существует один диагональный оператор H_3 и его собственные значения равны $\pm 1/2$, а матрица $\langle|H_3|\rangle$ есть матрица Паули. Действительно,

$$\langle|H_3|\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{П.8}$$

Группа $SU(3)$ — группа второго ранга, т. е. существует два диагональных оператора H_1 и H_2. Пусть $H_1 = Y$ (гиперзаряд), $H_2 = Q$ (заряд), тогда собственные значения гиперзаряда равны $2/3$, $-1/3$, $-1/3$, а собственные значения заряда $1/3$, $1/3$, $-2/3$. Соответственно матрицы операторов будут матрицами Гелл-Манна [8]:

$$\langle|Y|\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle|Q|\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{П.9}$$

Если работать с матрицей (П. 6) в пространстве решений оператора Лапласа, то нужно предварительно умножить i-ю строку на m_i; тогда сумма элементов столбца даст значение оператора через m_i. Например, группа $SU(3)$:

$$M(3, m_i) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2m_1 & m_1 \\ -m_2 & m_2 \\ -m_3 & -2m_3 \end{pmatrix}, \tag{П.10}$$

и для Y и Q получаем соответственно (сравни с [7])

$$Y = \frac{(2m_1 - m_2 - m_3)}{3}, \quad Q = \frac{(m_1 + m_2 - 2m_3)}{3}.$$

С матрицами (П. 6) можно осуществлять операции сложения и умножения на число.

Литература

1. *Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **46**, 1793, 1964.
2. *Swart J. J. de.* Bovs. Mod. Phys., **35**, 916, 1963.
3. *Виленкин Н. Я.* Математический сборник. 1965.
4. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. Физматгиз, 1962.
5. *Судаков В. В.* Вопросы физики элементарных частиц. Ереван, 1964. С. 117.
6. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро Я. З.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
7. *Смородинский Я. А.* УФП, **84**, 1, 1964.
8. *Gell-Mann M.* Phys. Rev., **125**, 1067, 1962.

О группах симметрии в классической и квантовой механике

П. Винтерницц, Я. А. Смородинский, М. Углирж, И. Фриш

1. Введение

В последнее время сильно возросла роль компактных [1] и некомпактных [2] групп динамической симметрии в теории элементарных частиц. В связи с этим повысился интерес к известным «динамическим» симметриям в классической и квантовой механике [3].

В квантовой механике имеет смысл говорить о трех типах группы симметрии для определенной задачи.

1. Группы геометрической симметрии, которые непосредственно связаны с симметрией физического пространства и времени, например группа трехмерных вращений для любой нерелятивистской задачи с центрально-симметричным потенциалом.

2. Группа «динамической» («скрытой», «высшей») симметрии, которая в случае, если она существует, дает полное описание квантово-механической системы, т. е. определяет все квантовые числа, вырождение энергетических уровней и спектр энергий. Впервые такая динамическая группа рассматривалась в работах [4], чтобы объяснить «случайное» вырождение атома водорода по орбитальному моменту (в нерелятивистском случае, т. е. пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием).

3. В связи с полезностью нарушенных симметрий для классификации элементарных частиц и исследования их взаимодействий очень интересно рассмотреть и в квантовой механике «группы неинвариантности» [5], т. е. такие, часть элементов которых не коммутирует с гамильтонианом задачи, а действует как повышающие и понижающие операторы на волновые функции уровней. В качестве «группы неиварианности» выбирают некоторую некомпактную группу, содержащую динамическую группу в качестве подгруппы. Все энергетические уровни системы вкладываются в такие представления группы неинвариантности, которые содержат представления динамической подгруппы, реализующиеся на волновых функциях этих уровней. Наиболее известная группа такого типа — это группа Ситтера $O(4,1)$ для атома водорода [6].

В этой работе мы остановимся на группах второго типа — группах динамической симметрии. Известно [4], что группой атома водорода является $O(4)$ для дискретного спектра и группа Лоренца $O(3,1)$ для сплошного. Кроме атома водорода, в литературе еще исследован гармонический осциллятор с динамической группой $SU(3)$ (в случае изотропном [7] и анизотропном [8] с рациональным отношением частот). В классической механике эти потенциалы обладают тем свойством, что все финитные траектории в них замкнуты. Заметим еще, что симметрии атома водорода и гармонического осциллятора допускают обобщение на n-мерный случай.

Целью настоящей работы является систематический подход к вопросу о динамических симметриях в нерелятивистской квантовой и классической механике, чтобы выяснить, какие вообще потенциалы могут обладать группой симметрии не явно геометрического происхождения.

Мы здесь ограничимся двумерным плоским случаем. Будем работать преимущественно алгебраическим методом, т. е. будем искать в квантовом случае потенциалы, для которых существует набор операторов, коммутирующих с гамильтонианом и образующих алгебру Ли. При этом мы ограничимся линейными дифференциальными операторами не выше второго порядка. К классической механике мы перейдем по принципу соответствия.

Часть результатов данной работы была предварительно опубликована в [9].

2. Линейные дифференциальные операторы, коммутирующие с гамильтонианом

Мы ищем гамильтониан $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x_1, x_2)$, где $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$ — оператор Лапласа и $V(x_1, x_2)$ — потенциал, для которого существует некий набор линейных дифференциальных операторов L_i, не выше второго порядка, коммутирующих с H:

$$[H, L_i] = 0. \tag{1}$$

Заодно мы найдем и интегралы движения L_i для соответствующих потенциалов.

Отметим, во-первых, что операторы первого порядка в качестве L_i приводят к чисто геометрическим симметриям. Действительно, если

$$L' = \varphi_1(x_1, x_2)p_1 + \varphi_2(x_1, x_2)p_2 + \varphi_3(x_1, x_2), \tag{2}$$

где $p_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2$, и φ_1, φ_2, φ_3 — произвольные функции, то условие (1) приводит к системе простых дифференциальных уравнений для φ_1, φ_2, φ_3 и V. Решая их, получаем

$$\begin{gathered} V = V\left(\frac{1}{2}a\left(x_1^2 + x_2^2\right) + bx_1 + cx_2\right), \\ L' = a(x_2p_1 - x_1p_2) + cp_1 - bp_2, \end{gathered} \tag{3}$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Мы видим, что интеграл движения L' является выражением ротационной или трансляционной симметрии задачи (V — произвольная функция указанного аргумента).

Далее рассмотрим интересующий нас случай операторов второго порядка

$$L = \varphi_1p_1^2 + \varphi_2p_2^2 + \varphi_3p_1p_2 + \varphi_4p_1 + \varphi_5p_2 + \varphi_6, \tag{4}$$

где φ_i, $i = 1, \ldots, 6$, — произвольные функции x_1 и x_2.

Условие $[H, L] = 0$ приводит к системе десяти уравнений для семи неизвестных φ_i и V (так как коммутатор $[H, L]$ является оператором третьего порядка и мы должны приравнять нулю коэффициенты при всех степенях p_i и p_2)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = 0, \tag{5}$$

$$\Delta\varphi_1 + 2\frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1} = 0, \quad \Delta\varphi_2 + 2\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2} = 0, \quad \Delta\varphi_3 + 2\frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2} + 2\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1} = 0, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\Delta\varphi_4 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} + 2\varphi_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + \varphi_3\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{1}{2}\Delta\varphi_5 + \frac{\partial\varphi_6}{\partial x_2} + 2\varphi_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \varphi_3\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi_0 + \varphi_1\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \varphi_2\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \varphi_3\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \varphi_4\frac{\partial V}{\partial x_1} + \varphi_5\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \tag{8}$$

Из (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = ax_2^2 - 2bx_2 + d, && \varphi_4 = -ax_1 + gx_2 + h,\\ &\varphi_2 = ax_1^2 + 2cx_1 + e, && \varphi_5 = -ax_2 - gx_1 + k,\\ &\varphi_3 = -2(ax_1 - c)x_2 + 2bx_1 + f, && \end{aligned} \tag{9}$$

где a, b, c, d, e, f, g, h, k — произвольные постоянные. Учитывая (9), нетрудно убедиться, что уравнения (7) и (8) совместимы только при условии

$$(b - k + gx_1)\frac{\partial V}{\partial x_2} + (-c - h - gx_2)\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0.$$

Итак, либо $V(x_1,x_2)$ является функцией аргумента

$$\frac{1}{2}g\left(x_1^2 + x_2^2\right) + (b - k)x_1 + (c + h)x_2, \tag{а}$$

т. е. обладает геометрической симметрией, либо

$$k = b, \quad h = -c, \quad g = 0; \tag{б}$$

тогда интеграл движения L записывается в виде

$$L = aM^2 + b(p_1M + Mp_1) + c(p_2M + Mp_2) + dp_1^2 + ep_2^2 + fp_1p_2 + \varphi(x_1x_2), \tag{10}$$

где $M = x_1p_2 - x_2p_1$, $\varphi(x_1, x_2)$ — произвольная функция.

Рассмотрим более интересный случай (б).

Используя свойства характеристик дифференциальных операторов гиперболического типа, нетрудно доказать следующую теорему:

Уравнение $[-1/2\Delta + V, L] = 0$ решается для любого оператора L вида (10) и существует ортогональная система координат (q_1, q_2) (связанная с декартовской конформным преобразованием), в которой имеем

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V = \frac{1}{a(q_1) + b(q_2)}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right) + V_1(q_1) + V_2(q_2)\right], \tag{11}$$

$$L = \frac{1}{a(q_1) + b(q_2)}\left[b(q_2)\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + V_1(q_1)\right\} - a(q_1)\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + V_2(q_2)\right\}\right], \tag{12}$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{a(q_1) + b(q_2)}[V_1(q_1) + V_2(q_2)]. \tag{13}$$

Гамильтониан (11) соответствует динамической системе типа Лиувилля [10], которая решается в квадратурах. Следует отметить, что в отличие, например, от [11], здесь никаких предположений о разделении переменных в уравнении Шредингера (Гамильтона—Якоби) не делается, а наоборот, доказывается, что квадратичный интеграл движения L может существовать только тогда, когда существует система координат (q_1, q_2), в которой переменные разделяются.

Нам необходимо найти конкретный вид координат (q_1, q_2) и функций $a(q_1), b(q_2)$. Для этого воспользуемся следующим обстоятельством. Из (10) видно, что оператор $D = L - \varphi(x_1, x_2)$ является симметричным полиномом второго порядка в генераторах группы движения евклидовой плоскости E_2. В работе [12] было показано, что

с помощью преобразования подобия и линейной комбинации с оператором Δ можно все такие операторы свести к четырем основным типам:

$$\begin{aligned} &\text{А.}\ p_1^2 - p_2^2, \\ &\text{Б.}\ M^2, \\ &\text{В.}\ p_1 M + M p_1, \\ &\text{Г.}\ M^2 + \frac{1}{2} l^2 \left(p_1^2 - p_2^2\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что если функция V является решением уравнения (1), то она удовлетворяет и уравнению $[H, \lambda L + \mu H] = 0$, где λ, μ — произвольные постоянные, и что при преобразовании подобия (т. е. при переходе к новым декартовым координатам) оператор Лапласа Δ не меняется и решение остается решением. Следовательно, можно ограничиться операторами D вида (14).

Рассмотрим отдельные случаи.

А. Пусть $L = p_1^2 - p_2^2 + \varphi(x_1, x_2)$. Тогда из условия $[H, L] = 0$ получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -2\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = +2\frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right) - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = 0$$

и, следовательно,

$$V = f(x_1) + g(x_2), \tag{15}$$

$$L_D = p_1^2 - p_2^2 - 2f(x_1) + 2g(x_2). \tag{16}$$

Б. Пусть $L = M^2 + \varphi(x_1, x_2)$. Из условия (1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} &= -2x_2^2\frac{\partial V}{\partial x_1} + 2x_1 x_2\frac{\partial V}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} &= -2x_1^2\frac{\partial V}{\partial x_2} + 2x_1 x_2\frac{\partial V}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Из условия непротиворечивости этих уравнений получаем

$$\left(x_2^2 - x_1^2\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1 x_2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right) + 3x_2\frac{\partial V}{\partial x_1} - 3x_1\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \tag{18}$$

Стандартным методом [13] можно привести последнее уравнение к каноническому виду. Решая уравнения для характеристик, получаем сферическую систему координат $x_1 = e^a \cos\varphi$, $x_2 = e^a \sin\varphi$, и в ней уравнение (18) просто решается. Получаем

$$V = \frac{f(a) + g(\varphi)}{e^{2a}}, \quad L_s = M^2 - 2g(\varphi). \tag{19}$$

Случаи *В* и *Г* вполне аналогичны, но требуют громоздких вычислений, в результате которых мы получим следующие уравнения.

В. Для инварианта типа $L = p_1 M + M p_1 + \varphi(x_1, x_2)$ координатные кривые параболической системы координат $x_1 = \frac{1}{2}\left(\xi_1^2 - \xi_2^2\right)$, $x_2 = \xi_1\xi_2$ будут характеристиками соответствующего уравнения для потенциала.

$$V = \frac{f(\xi_1) + g(\xi_2)}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad L_p = p_1 M + M p_1 + \frac{f(\xi_1)\xi_2^2 - g(\xi_2)\xi_1^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \tag{20}$$

Г. Аналогично инвариант

$$L = M^2 + \frac{1}{2}l^2\left(p_1^2 - p_2^2\right) + \varphi(x_1, x_2)$$

приводит к эллиптической системе координат

$$x_1 = l \operatorname{ch} \rho \cos \sigma,$$
$$x_2 = l \operatorname{sh} \rho \sin \sigma,$$

и мы получаем

$$V = \frac{f(\sigma) + g(\rho)}{\cos^2\sigma - \operatorname{ch}^2\rho},$$
$$L_E = M^2 + \frac{l^2}{2}\left(p_1^2 - p_2^2\right) - l^2 \frac{\left(\operatorname{ch}^2\rho + \operatorname{sh}^2\rho\right) f(\sigma) + \left(\cos^2\sigma - \sin^2\sigma\right) g(\rho)}{\cos^2\sigma - \operatorname{ch}^2\rho}. \quad (21)$$

Таким образом, мы видим, что квадратичный интеграл движения существует тогда и только тогда, когда потенциал допускает разделение переменных в одной из тех четырех систем координат, в которых разделяются переменные в уравнении Гельмгольца на плоскости.

3. Потенциалы с двумя инвариантами

Мы хотим рассмотреть потенциалы, обладающие группой Ли. Поскольку нас интересуют системы с вырожденными энергетическими уровнями, мы должны искать неабелевские группы (выше, чем однопараметрические). Следовательно, необходимо найти потенциалы, обладающие двумя или более инвариантами, и образовать из этих инвариантов алгебру.

Из предыдущего раздела вытекает, что два независимых оператора типа (4) существуют в том случае, если потенциал $V(x_1, x_2)$ допускает разделение переменных в двух системах координат (или разного типа, или одинакового, но сдвинутых или повернутых относительно друг друга).

Рассмотрим сначала пары систем координат, в которых центры и оси совмещены.

1. Декартовский и полярный инварианты. Мы должны найти потенциал, который можно записать в виде

$$V(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) = a(r) + \frac{b(\varphi)}{r^2}, \quad (22)$$

где $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $r = e^2$. Из (22) следует

$$\frac{\partial^2}{\partial r\, \partial\varphi} r^2[f(r\cos\varphi) + g(r\sin\varphi)] = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$V(x_1, x_2) = \alpha\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{\beta_1}{x_1^2} + \frac{\beta_2}{x_2^2} = \alpha r^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\beta_1}{\cos^2\varphi} + \frac{\beta_2}{\sin^2\varphi}\right). \quad (23)$$

Здесь и дальше $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — произвольные постоянные. Остальные случаи двух интегралов можно рассмотреть вполне аналогично. В результате получается:

2. Декартовый и параболический инварианты

$$V(x_1, x_2) = \alpha\left(4x_1^2 + x_2^2\right) + \beta x_1 + \frac{\gamma}{x_2^2} = \alpha + \frac{\beta}{2}\left(\xi_1^2 - \xi_2^2\right) + \frac{\gamma}{\xi_1^2\xi_2^2}. \qquad (24)$$

3. Полярный и параболический инварианты

$$V(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{2r} + \frac{1}{4r^2}\left(\frac{\beta_1}{\cos^2(\varphi/2)} + \frac{\beta_2}{\sin^2(\varphi/2)}\right) = \frac{\left(\beta_1/\xi_1^2\right) + \left(\beta_2/\xi_2^2\right) + \alpha}{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \qquad (25)$$

4. Два параболических инварианта, соответствующие двум взаимно перпендикулярным параболическим системам

$$V(x_1, x_2) = \frac{\alpha + \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \frac{\alpha}{2r} + \frac{\beta_1 \cos(\varphi/2) + \beta_2 \sin(\varphi/2)}{\sqrt{2r}}. \qquad (26)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что остальные комбинации координатных систем, в частности произвольно повернутые и сдвинутые, не дают новых потенциалов.

4. Решение классических и квантовых уравнений движения для потенциалов с двумя инвариантами

Нетрудно видеть, что среди потенциалов (23)–(26) содержатся и ранее известные потенциалы, обладающие высшей симметрией — кулоновский потенциал и гармонический осциллятор. Других центрально-симметричных потенциалов среди них нет. Известно [11], что кулоновский потенциал и гармонический осциллятор обладают тем свойством, что в них все финитные классические траектории замкнуты. Здесь мы покажем, что такое свойство типично и для найденных потенциалов. Далее рассмотрим решение уравнения Шредингера и вырождение энергетических уровней.

Рассмотрим потенциалы по отдельности.

1. Потенциал

$$V(x_1, x_2) = \alpha\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{\beta_1}{x_1^2} + \frac{\beta_2}{x_2^2}.$$

Решая классические уравнения движения, получаем траектории в виде

$$x_i^2 = \frac{E_i}{2\alpha} + \sqrt{\frac{E_i^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta_i}{\alpha}}\,\sin\left(\sqrt{8\alpha}t + C_i\right), \qquad (27)$$

где $i = 1, 2$ и $E_1 + E_2 = E$ — полная энергия. Нетрудно видеть, что при $\alpha > 0$, $\beta_i > 0$ все траектории являются финитными и замкнутыми кривыми четвертого порядка. При $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем изотропный гармонический осциллятор, и траектории, естественно, вырождаются в эллипсы.

Разделив переменные в уравнении Шредингера в декартовых координатах, получим два уравнения типа

$$\frac{d^2\psi_i}{dx_i^2} - 2\left(E_i - \alpha x_i^2 - \frac{\beta_i}{x_i^2}\right)\psi_i = 0, \qquad (28)$$

где $E = E_1 + E_2$, $\Psi = \psi_1\psi_2$, $\hbar = m = 1$, $\alpha > 0$. Нормированная волновая функция, описывающая связанное состояние, равна

$$\Psi_{k_1k_2}^{\pm\pm}(x_1, x_2) = \sqrt{2\alpha}\prod_{i=1}^{2}\left[\frac{k_1!(2\alpha)^{\pm\nu_i}}{\Gamma(k_i \pm \nu_i + 1)}\right]^{1/2} e^{-\sqrt{\alpha/2}x_i^2} x_i^{1/2\pm\nu_i} L_{k_i}^{\pm\nu_i}\left(\sqrt{2}\alpha x_i\right), \qquad (29)$$

где $\nu_i = {}^1\!/_2\sqrt{1+8\beta_i}$, $L_k^\nu(z)$ — полиномы Лагерра, и для энергии имеем

$$E^{\pm\pm} = E_1 + E_2 = 2\sqrt{2\alpha}(k_1 + k_2 + 1) + \sqrt{2\alpha}(\pm\nu_1 \pm \nu_2).$$

Из поведения при $x_i = 0$ вытекает, что связанные состояния существуют при $\beta_i > -{}^1\!/_2$, $i = 1, 2$. Далее, при: $-{}^1\!/_8 \leqslant \beta_i \leqslant {}^3\!/_8$ каждому $k = k_1 + k_2$ соответствуют четыре уровня, так как нужно учитывать оба знака перед ν_1 и ν_2, вырождение каждого из которых равно $d = k + 1$. При $-{}^1\!/_8 \leqslant \beta_1 < {}^3\!/_8$, $\beta_2 > {}^3\!/_8$, или $\beta_1 > {}^3\!/_8$, ${}^1\!/_8 \leqslant \beta_2 < {}^3\!/_8$, каждому k соответствуют два уровня (знак $\pm$ соответственно перед ν_1 или ν_2); при $\beta_i \leqslant {}^3\!/_8$ каждому k соответствует один уровень (знак плюс перед ν_1 и ν_2). Степень вырождения равна $d = k + 1 = 2j + 1$ (где $j = 0, {}^1\!/_2, 1, {}^3\!/_2, \ldots$) и совпадает с размерностями всех неприводимых представлений группы $SU(2)$. При $\beta_1 = \beta_2 = 0$ имеем $\nu_1 = \nu_2 = {}^1\!/_2$ и получаем решение для гармонического осциллятора.

2. Потенциал

$$V(x_1, x_2) = \alpha\left(4x_1^2 + x_2^2\right) + \beta x_1 + \frac{\gamma}{x_2^2}.$$

Для классических траекторий получаем

$$x_1 = -\frac{\beta}{8\alpha} + \sqrt{\frac{E_1}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{64\alpha^2}}\,\sin\left(\sqrt{8\alpha}t + C_1\right),$$
$$x_2 = \frac{E_2}{2\alpha} + \sqrt{\frac{E_2^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}\,\sin\left(\sqrt{8\alpha}t + C_2\right), \tag{30}$$

где $E = E_1 + E_2$. При $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и любом β все траектории финитны и замкнуты.

В квантовом случае, разделив переменные в уравнении Шредингера в декартовых координатах, получаем одно уравнение типа (28) и одно для смещенного гармонического осциллятора. В результате имеем

$$\Psi^{\pm}_{k_1k_2}(x_1,x_2) = \left(\frac{8\alpha}{\pi^2}\right)^{1/8}(2\alpha)^{(1+\nu)/4}\left[\frac{k_2!}{k_1!}\frac{1}{2^{k_1}\Gamma(k_2+\nu+1)}\right]^{1/2}\exp\left\{-\sqrt{2\alpha}\left(x_1+\frac{\beta}{8\alpha}\right)^2\right\}\times$$
$$H_{k_1}\left(\sqrt[4]{(8\alpha)}\left(x_1+\frac{\beta}{8\alpha}\right)\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}x_2^2\right)x_2^{1/2+\nu}L^{\nu}_{k_2}\left(\sqrt{2\alpha}x_2^2\right), \tag{31}$$

где $\nu = \pm{}^1\!/_2\sqrt{1+\gamma}$,

$$E^{\pm} = 2\sqrt{2\alpha}\left[k_1 + k_2 + 1 + \frac{1}{2}\nu \mp \frac{\beta^2}{32(\alpha)^{3/2}}\right]. \tag{32}$$

Степень вырождения здесь $d = k + 1$, где $k = k_1 + k_2$; в области $-{}^1\!/_8 \leqslant \gamma < {}^3\!/_8$ число уровней удваивается; при $\gamma \geqslant {}^3\!/_8$ всегда $\nu > 0$. При $\beta = \gamma = 0$ получаем анизотропный гармонический осциллятор с отношением частот $2:1$. Вырождение опять описывается всеми представлениями $SU(2)$.

3. Потенциал

$$V(x_1, x_2) = \frac{\alpha + (\beta_1/\xi_1^2) + (\beta_2/\xi_2^2)}{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Классические траектории легко найти, решая уравнения Гамильтона—Якоби. Получаем

$$\xi_1^2 = -\frac{\gamma_i}{2E_i} + \left[\frac{\beta_i}{E} + \frac{\gamma_i^2}{4E^2}\right]^{1/2}\sin\left(2\sqrt{-2E}\tau + \mu_i\right), \tag{33}$$

где τ — параметр и $\gamma_1 - \gamma_2 = C_1$, $\mu_1 - \mu_2 = C_2$ — произвольные постоянные. При $E < 0$ получаем в качестве траекторий замкнутые кривые четвертого порядка (в плоскости x, y).

Разделив переменные в уравнении Шредингера в параболических координатах, получаем два уравнения типа (28); однако энергия входит как коэффициент при ξ_i^2. Следовательно, при $E < 0$ существуют связанные состояния

$$\Psi_{k_1k_2}^{\pm\pm} = C_{k_1k_2}^{\pm\pm}\sqrt{\xi_1\xi_2}\xi_1^{\pm\nu_1}\xi_2^{\pm\nu_2}\exp\left[-\sqrt{-\frac{E}{2}}(\xi_1^2+\xi_2^2)\right]L_{k_1}^{\pm\nu_1}(\sqrt{-2E}\xi_1^2)L_{k_2}^{\pm\nu_2}(\sqrt{-2E}\xi_2^2), \quad (34)$$

где $\nu_i = {}^1/_2\sqrt{1+8\beta_i}$ и знаки при волновой функции относятся к выбору знака при ν_1, ν_2. Для энергии имеем

$$E^{\pm\pm} = -\frac{2\alpha^2}{[2(k_1+k_2) \pm \nu_1 \pm \nu_2 + 2]^2}. \quad (35)$$

Громоздкий нормировочный коэффициент $C_{k_1k_2}^{\pm\pm}$ здесь выписывать не будем. Выбор знаков здесь такой же, как в пункте 1. В частности, при $-{}^1/_8 < \beta_i < {}^3/_8$, $i = {}^1/_2$, нужно учитывать все четыре знака. С учетом этого при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем формулу Бальмера. В общем случае степень вырождения уровней равна $d = k + 1$, т. е. реализуются все неприводимые представления $SU(2)$. Однако при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ совокупность решений (34) переходит в кулоновские решения

$$\Psi_{m_1m_2} = C_{m_1m_2}\exp\left[-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\xi_1^2+\xi_2^2)\right]H_{m_1}(\sqrt[4]{-8E}\xi_1)H_{m_2}(\sqrt[4]{-8E}\xi_2), \quad (36)$$

и требуя однозначности волновых функций как функций от x, y, получаем, что $m_1 + m_2$ четно; следовательно, в этом случае реализуются только представления размерности $d = 2k + 1$, т. е. неприводимые представления $O(3)$.

4. Потенциал

$$V(x_1, x_2) = \frac{\alpha + \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Потенциал претерпевает скачок вдоль линии $y = 0$, $x \geqslant 0$. Рассмотрение опять удобнее всего проводить в параболических координатах. Классические траектории получаем, решая уравнение Гамильтона—Якоби, в виде

$$\xi_i = \frac{\beta_i}{2E} + \sqrt{\frac{\beta_i^2}{4E^2} - \frac{\gamma_i}{E}}\sin(\sqrt{-2E}\tau + \mu_i) \quad (37)$$

(обозначения те же, как в (33)). При $E < 0$ это эллипс в плоскости (ξ_1, ξ_2) и замкнутая кривая четвертого порядка в плоскости (x, y).

Решение уравнения Шредингера сводится в параболических координатах к гармоническому осциллятору. В результате имеем

$$\Psi_{k_1,k_2} = C_{k_1k_2}\exp\left[-\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{2}\right]H_{k_1}(\mu_1\sqrt{2})H_{k_2}(\mu_2\sqrt{2}), \quad (38)$$

где $\mu_i = \sqrt[4]{-2E}(\xi_i - \beta_i/2E)$, и для энергии получаем уравнение

$$2(k_1+k_2) + 2 = -\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{2E\sqrt{-2E}} - \frac{4\alpha}{\sqrt{-2E}}. \quad (39)$$

Вырождение здесь опять соответствует размерностям всех представлений $SU(2)$ $d = k+1$, и при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем представления $O(3)$ (двумерный кулоновский потенциал).

Из изложенного выше вытекает, что в квантовомеханическом случае рассмотрение всех найденных потенциалов сводится к решению «обобщенного» уравнения для гармонического осциллятора в различных системах координат

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} + a + bq^2 + \frac{c}{q^2}\right)\psi(q) = 0. \tag{40}$$

При этом постоянные a, b, c для различных потенциалов связаны по разному с энергией и, следовательно, получаем различные формулы для энергетических уровней. В частности, уравнение для двумерного атома водорода в параболических координатах сводится к уравнению для обычного гармонического осциллятора.

5. Алгебра Ли потенциалов с динамической группой симметрии

Мы нашли потенциалы, обладающие двумя квадратичными интегралами движения. Из этих интегралов и их коммутаторов можно было бы непосредственно построить алгебру. При этом, однако, возникают трудности, так как алгебру не удается простым способом замкнуть (впрочем, это обстоятельство характерно уже для анизотропного гармонического осциллятора [8]).

Здесь мы поступим несколько иным способом, стандартным для всех найденных потенциалов. Будем пользоваться методами вторичного квантования, т. е. построим некие операторы рождения и уничтожения квантов энергии и из них построим алгебру Ли группы $SU(2)$. Мы знаем, что нужно искать именно эту алгебру, так как мы исследовали энергетические уровни и знаем, что степень их вырождения совпадает как раз с размерностями представлений $SU(2)$.

Рассмотрим подробнее потенциал (23). Нетрудно убедиться, что операторы

$$\begin{aligned} b_i &= -\frac{1}{4}\left[2x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sqrt{2\alpha}\,x_i^2 + 1 - 2\frac{\beta_i}{\sqrt{2\alpha}}\frac{1}{x_i^2}\right], \\ b_i^+ &= -\frac{1}{4}\left[-2x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sqrt{2\alpha}\,x_i^2 - 1 - 2\frac{\beta_i}{\sqrt{2\alpha}}\frac{1}{x_i^2}\right] \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \tag{41}$$

обладают требуемыми свойствами:

$$\begin{aligned} b_1\Psi_{k_1k_2} &= \sqrt{k_1(k_1+\nu_1)}\Psi_{k_1-1,k_2}, \\ b_1^+\Psi_{k_1k_2} &= \sqrt{(k_1+1)(k_1+\nu_1+1)}\Psi_{k_1+1,k_2} \end{aligned} \tag{42}$$

(аналогичные формулы получаются для b_2 и b_2^+). Далее введем диагональные операторы

$$\widehat{k}_i = \frac{1}{2}\left\{[b_i, b_i^+] - \frac{1}{2}\sqrt{1+8\beta_i} - 1\right\}, \tag{43}$$

для которых

$$\widehat{k}_1\Psi_{k_1k_2} = k_1\Psi_{k_1k_2}$$

(аналогично для $\widehat{k}_2$).

С их помощью построим операторы

$$L_3 = \frac{\widehat{k}_2 - \widehat{k}_1}{2}, \quad L_+ = b_1^- b_2^+ \left[\left(\widehat{k}_1 + \nu_1 \right) \left(\widehat{k}_2 + \nu_2 + 1 \right) \right]^{-1/2},$$
$$L_- = b_1^+ b_2^- \left[\left(\widehat{k}_1 + \nu_1 + 1 \right) \left(\widehat{k}_2 + \nu_2 \right) \right]^{-1/2}, \tag{44}$$

действующие на собственные функции Гамильтониана следующим образом

$$L_3 \Psi_{k_1 k_2} = \frac{k_2 - k_1}{2} \Psi_{k_1 k_2},$$
$$L_+ \Psi_{k_1 k_2} = \sqrt{k_1 (k_2 + 1)} \Psi_{k_1 - 1, k_2 + 1}, \tag{45}$$
$$L_- \Psi_{k_1 k_2} = \sqrt{(k_1 + 1) k_2} \Psi_{k_1 + 1, k_2 - 1}.$$

Положив $l = (k_1 + k_2)/2$, $m = (k_2 - k_1)/2$, получаем каноническую форму матричных элементов инфинитезимальных операторов $SU(2)$. При этом L_3 совпадает с одним из найденных интегралов типа (4) для данного потенциала и операторы L_+, L_- также тесно связаны с найденными интегралами.

Для того чтобы замкнуть алгебру, нам пришлось совершить не совсем строгий шаг, а именно поделить на корень из оператора. Поскольку эти операторы диагональны на рассматриваемых функциях, это вполне осмысленная операция. Если бы мы рассматривали только оператор L_3, $b_1^- b_2^+$ и $b_1^+ b_2^-$ и их непосредственные коммутационные соотношения, то мы получили бы бесконечную алгебру. Это проявляется, в частности, в том, что операторы $b_1^- b_2^+$ и $b_1^+ b_2^-$, хотя тоже преобразуют волновые функции одного уровня между собой, но при этом нарушают их нормировку (т. е. не могут соответствовать унитарному представлению компактной группы).

Алгебру для остальных потенциалов можно образовать вполне аналогично, действуя всегда в соответствующей системе координат и пользуясь отмеченной выше аналогией между уравнениями для волновых функций.

6. Заключение

В настоящей работе найдены четыре типа потенциалов (23)–(26), обладающие динамической группой симметрии. С ограничениями, сформулированными во введении, они исчерпывают все такие потенциалы. Как и следовало ожидать, все финитные классические траектории в них замкнуты и все квантовые системы обладают «случайным» вырождением энергетических уровней. Во всех случаях группой симметрии оказалась $SU(2)$ (или локально-изоморфная ей $O(3)$). Такая «однообразность» для двумерного случая вполне естественна, поскольку мы рассмотрели только дискретный спектр. Динамическая группа тогда должна быть компактной и все компактные полупростые группы Ли ранга 1 локально изоморфны $SU(2)$. С этой точки зрения очень желательно рассмотреть трехмерный случай, который должен быть значительно более богатым. Очевидно, что ограничиваясь операторами не выше второго порядка, мы теряем часть результатов, например анизотропный гармонический осциллятор с рациональным отношением частот, не равным $2:1$.

Отметим еще, что все рассмотрение проводилось алгебраически, на языке операторов, коммутирующих с гамильтонианом и рассматриваемых как генераторы группы. Следовательно, мы пока не в состоянии ответить на очень существенные вопросы: 1) в каком пространстве реализуются найденные динамические симметрии,

т. е. как можно найти для наших потенциалов пространства типа трехмерного шара в четырехмерном (нерелятивистском) импульсном пространстве Фока для атома водорода; 2) как истолковать динамические симметрии в классической механике и каким свойствам фазового пространства они соответствуют.

В заключение мы хотели бы поблагодарить В. Мандросова, исследовавшего по нашей просьбе в своей дипломной работе движение в найденных потенциалах.

Литература

1. *Gürsey F.*, *Radicati L. A.* Phys. Rev. Lett, **13**, 173, 1964.
2. *Fulton T.*, *Wess J.* Phys. Lett., **14**, 57, 1965; *Ruhl W.* Nuovo Cim., **37**, 301, 1965; *Salam A.*, *Delbourgo R.*, *Strathdee J.* Proc. Roy. Soc., **A284**, 146, 1965; *Delbourgo R.*, *Salam A.*, *Strathdee J.* Proc. Roy. Soc., **A289**, 177, 1966.
3. *Barut A. O.* Phys. Rev., **135**, B939, 1964; *Barut A. O.*, *Böhm A.* Phys. Rev., **139**, B1107, 1965; *Biedenharn L. C.* Phys. Rev., **126**, 845, 1962; *Biedenharn L. C.*, *Swamy N. N. V. T.* Phys. Rev., **133**, B1353, 1964.
4. *Pauli W.* Zs. Phys., **36**, 368, 1926; *Fock V. A.* Zs. Phys., **98**, 145, 1935; *Bargmann V.* Zs. Phys., **99**, 576, 1936.
5. *Mukunda N.*, *Sudarshan E. C. G.*, *O'Raifeartaigh L.* Phys. Rev. Lett., **15**, 1041, 1965; *Sudarshan E. C. G.*, *Mukunda N.*, *O'Raifeartaigh L.* Phys. Lett., **19**, 322, 1965.
6. *Bacry H.* Nuovo Cim., **41**, 2122, 1966; *Kihlberg A.*, *S. Ström.* Preprint GERN, 1965; *Barut A. O.* Phys. Rev., **139**, B1433, 1965.
7. *Jauch J. M.*, *Hill E. L.* Phys. Rev., **57**, 641, 1940.
8. *Демков Ю. Н.* ЖЭТФ, **44**, 2007, 1963.
9. *Friš I.*, *Mandrosov V.*, *Smorodinsky J. A.*, *Uhlíř M.*, *Winternitz P.* Phys. Lett, **16**, 354, 1965.
10. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 1937.
11. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Механика. Физматгиз, 1958.
12. *Винтерниц П.*, *Фриш И.* ЯФ, **1**, 889, 1965.
13. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. Гостехиздат, М., 1950.

Интегральные представления релятивистских амплитуд в нефизической области

Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский

1. Введение

В работе [1] была рассмотрена проблема разложения релятивистских амплитуд в вещественном пространстве Лобачевского (или, на более привычном языке, пространстве переменных s, t, u в физической области любого канала, т. е. $stu > 0$) по собственным функциям оператора Лапласа. Цель настоящей работы — построить интегральные представления амплитуд в нефизических областях плоскости Мандельстама с помощью методов интегральной геометрии. Мы проведем рассмотрение этого вопроса с точки зрения s-канала. Можно пойти двумя путями:

1) сопоставить нефизическим областям мнимое пространство Лобачевского (однополостной гиперболоид) и тем самым рассмотреть только лоренц-инвариантные функции (для мнимых значений переменных);

2) сопоставить различным кускам нефизической области квадратичные формы различной сигнатуры и тем самым включить в игру на равных правах другие группы (переменные — вещественные).

2. Плоскость $s + t + u = 4$ и четырехмерное пространство скоростей

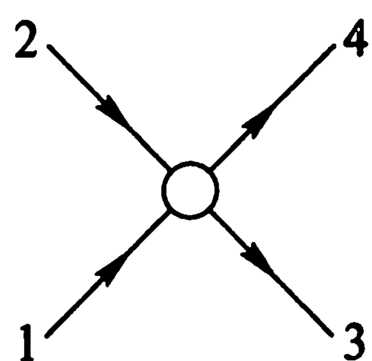


Рис. 1

В теории рассеяния обычно вводят три переменных величины s, t, u, которые связаны с импульсами частиц соотношениями (рис. 1):

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2, \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

причем

$$s + t + u = 4. \tag{2.2}$$

В дальнейшем мы положим $m_i = 1$. Переменные s, t, u выражаются в с. ц. и. ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$) через энергию частиц и угол рассеяния, а именно

$$\begin{aligned} s &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 = 4\varepsilon^2, \\ l &= -2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos\theta), \\ u &= -2|\mathbf{p}|^2(1 + \cos\theta). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Поскольку $\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ (или в пространстве скоростей $v_0^2 - \mathbf{v}^2 = 1$), то можно обозначить $v_0^2 = \operatorname{ch}^2 a$, $\mathbf{v}^2 = \operatorname{sh}^2 a$. Тогда формулы (2.2), (2.3) принимают вид

$$\begin{aligned} s &= 4\operatorname{ch}^2 a, \\ t &= -2\operatorname{sh}^2 a(1-z), \\ u &= -2\operatorname{sh}^2 a(1+z), \end{aligned} \tag{2.3a}$$

где

$$0 \leqslant a \leqslant \infty, \quad -1 \leqslant z \leqslant 1, \quad z = \cos\theta.$$

Этим устанавливается взаимное соответствие между переменными s, t, u и множеством точек $\mathbf{V}_\text{I}$, удовлетворяющих уравнению гиперболоида $v_0^2 - v_3^2 - v_2^2 - v_1^2 = 1$.

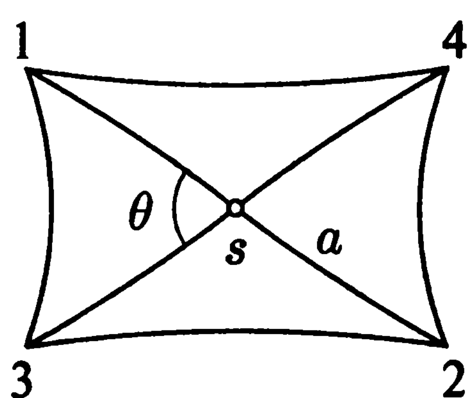


Рис. 2

Для однозначности в дальнейшем будем рассматривать только верхнюю полу гиперболоида ($v_0 > 0$), множество точек которой есть трехмерное пространство Лобачевского. Зададим в нем сферическую систему координат:

$$\begin{aligned} v_0 &= \operatorname{ch} a, \\ v_3 &= \operatorname{sh} a \cos\theta, \\ v_2 &= \operatorname{sh} a \sin\theta\cos\varphi, \\ v_1 &= \operatorname{sh} a \sin\theta \sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

На кинематической диаграмме скоростей [2] (рис. 2) a есть расстояние между точками s и i ($i = 1, 2, 3, 4$), θ — угол между «прямыми», s — центр инерции s-канала. Формула (2.3а) описывает область SI плоскости Мандельстама (рис. 3). Пусть параметризация переменных s, t, u вида (2.3а) справедлива и в нефизических областях SII, SII$'$, SIII, SIV, SIV$'$. Конечно, при этом области изменения параметров a, z будут другими. Тогда, если $0 \leqslant a \leqslant \infty$, а z изменяется в пределах $1 \leqslant z \leqslant \infty$, то тем самым мы из области SI переходим в область SII. При этом, как нетрудно убедиться, переменные s, t, u строятся из множества точек $\mathbf{V}_\text{II}$, удовлетворяющих уравнению

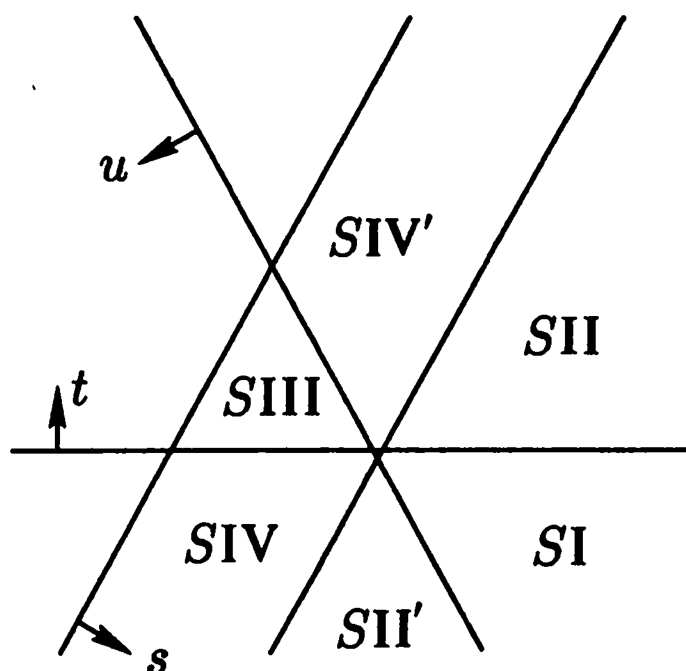


Рис. 3

$$v_0^2 - v_3^2 + v_2^2 + v_1^2 = 1, \tag{2.5}$$

причем на $\mathbf{V}_\text{II}$ введена система координат

$$\begin{aligned} v_0 &= \operatorname{ch} a, \\ v_3 &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b, \\ v_2 &= \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\varphi, \\ v_1 &= \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \sin\varphi; \end{aligned} \tag{2.5a}$$

здесь $\operatorname{ch} b = z$, $1 \leqslant z \leqslant \infty$.

Множество точек $\mathbf{V}_\text{II}$ с координатной системой (2.5а) изоморфно подмножеству точек мнимого пространства Лобачевского $\mathcal{IL}$ (3):

$$u_0^2 - u_3^2 - u_2^2 - u_1^2 = -1 \quad (u_0 \rightleftarrows v_3, \quad u_3 \rightleftarrows v_0, \quad u_{1,2} \rightleftarrows v_{1,2}),$$

находящихся на вещественном расстоянии от начала отсчета (0100) с гиперболической системой координат.

Переход из области $\mathcal{S}$I в $\mathcal{S}$II осуществляется путем замены $a \to \pm i\rho$ в формуле (2.3а). Квадратичная форма $v_0^2 - v_3^2 - v_2^2 - v_1^2 = 1$ при требовании вещественности пространства превращается в трехмерную сферу V_{III}

$$v_0^2 + v_3^2 + v_2^2 + v_1^2 = 1, \tag{2.6}$$

на которой задана координатная система вида

$$\begin{aligned} v_0 &= \cos\rho, \\ v_3 &= \sin\rho\cos\theta, \\ v_2 &= \sin\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ v_1 &= \sin\rho\sin\theta\sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.6a}$$

Квадратичная форма (2.6), соответствующая распадной области $\mathcal{S}$III, есть инвариант группы $O(4)$. Формула Эйнштейна $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ заменяется в $\mathcal{S}$III на формулу $E^2 + \mathbf{p}^2 = m^2$. Формально в $\mathcal{S}$III можно сохранить лоренц-инвариантность, считая m четвертой компонентой, а E^2 — инвариантом, т. е. $m^2 - \mathbf{p}^2 = E^2$.

Для перехода в область $\mathcal{S}$IV из $\mathcal{S}$I нужно заменить $a \to \pm i\rho$. При этом пространство Лобачевского превращается в вещественное пространство V_{IV} с сигнатурой (2.2):

$$v_0^2 + v_3^2 - v_2^2 - v_1^2 = 1 \tag{2.7}$$

и координатной системой

$$\begin{aligned} v_0 &= \cos\rho, \\ v_3 &= \sin\rho\,\mathrm{ch}\,b, \\ v_2 &= \sin\rho\,\mathrm{sh}\,b\cos\varphi, \\ v_1 &= \sin\rho\,\mathrm{sh}\,b\sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.7a}$$

Поскольку s, t, u являются билинейными формами векторов, то мы выбираем в дальнейшем при замене $a \to \pm i\rho$ и $b \to \pm i\theta$ и т. д. только знак плюс.

Итак, областям $\mathcal{S}$I, $\mathcal{S}$II, $\mathcal{S}$III, $\mathcal{S}$IV плоскости Мандельстама соответствует четырехмерное вещественное пространство с заданными квадратичными формами

$$F_\alpha = \sum_i g_\alpha^{ii} v_i v_i = 1,$$

где соответственно

$$g_{\text{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad g_{\text{II}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$g_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{\text{IV}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к рассмотрению первой возможности, а именно сопоставлению всего пространства $\mathcal{IL}(3)$ нефизическим областям. Выше мы использовали только часть мнимого пространства Лобачевского. Будем относить теперь областям $\mathcal{S}$III, $\mathcal{S}$IV, $\mathcal{S}$IV$'$ (полосе) мнимое пространство Лобачевского с мнимым расстоянием

(пространство изотропных прямых), которое можно параметризовать так [3]:

$$\begin{aligned} v_0 &= \cos\theta, \\ v_3 &= l, \\ v_2 &= \sin\theta\sin\alpha + l\cos\alpha, \\ v_1 &= -\sin\theta\cos\alpha + l\sin\alpha, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $-\infty \leqslant l \leqslant \infty$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Тогда s по-прежнему сохранит свой вид, т. е. $s = 4\cos^2\theta$, переменные t, u будут иметь более сложную форму

$$\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \pm 2ll'(1-\cos\beta) + 2\sin^2\theta(1\mp\cos\beta) + 2\sin\theta\sin\beta\bigl(\pm l \mp l'\bigr), \tag{2.9}$$

где $\beta = \alpha - \alpha'$.

3. Оператор Лапласа и собственные функции

В этом разделе мы изучим оператор Лапласа («угловую» часть оператора Даламбера) на множествах (2.5), (2.6), (2.7) и собственные функции. На множестве (2.5) оператор Даламбера можно записать в виде

$$\Box = \frac{1}{u^3}\frac{\partial}{\partial u}u^3\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\Delta_L, \tag{3.1}$$

где u — длина 4-вектора, а Δ_L — оператор Лапласа. Как известно [4], собственные значения многомерного оператора Лапласа равны $-l(l+n-2)$, где n — размерность пространства. Для $n = 4$ собственное значение равно $-l(l+2)$. Переход от сферы к гиперболоиду приводит к тому, что l перестает быть целым числом и может быть любым комплексным числом. С учетом сказанного выше напишем уравнение для собственных значений

$$\Delta_L f = -\sigma(\sigma+2)f. \tag{3.2}$$

Для выполнения условия вещественности $\sigma(\sigma+2)$ необходимо, чтобы

$$\sigma = -1 + ip \tag{3.3}$$

при вещественном p, либо σ было вещественным

$$\sigma^* = \sigma. \tag{3.4}$$

Из теории представлений известно, что этим значениям отвечают унитарные представления группы Лоренца. При этом (3.3) отвечает представлениям основной серии, а (3.4) — дополнительной серии представлений [5].

Напишем оператор Δ_L в координатной системе (2.5a):

$$\Delta_L = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a}\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{sh}^2 a\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a\operatorname{sh} b}\frac{\partial}{\partial b}\operatorname{sh} b\frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a\operatorname{sh}^2 b}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{3.5}$$

Производя обычное разделение переменных в уравнении (3.2), мы получаем три уравнения для определения собственных функций:

$$\begin{gathered} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 a}\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{sh}^2 a\frac{\partial}{\partial a} + \sigma(\sigma+2) - \frac{\tau(\tau+1)}{\operatorname{sh}^2 a}\right)A(a) = 0, \\ \left(\frac{1}{\operatorname{sh} b}\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{sh} b\frac{\partial}{\partial b} + \tau(\tau+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 b}\right)B(b) = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + m^2\right)\Phi(\varphi) = 0. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Решения этих уравнений таковы:

$$A(a) = (\operatorname{sh} a)^{-1} P^{\sigma-1}_{-\tau-1}(\operatorname{cth} a),$$
$$B(b) = P^{m}_{-\tau-1}(\operatorname{ch} b), \qquad (3.7)$$
$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$$

и для собственной функции получаем [1])

$$\langle \sigma\tau m \,|\, ab\varphi \rangle = +\operatorname{sh}^{-1} a P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(\operatorname{cth} a) P^{m}_{-\tau-1}(\operatorname{ch} b) e^{im\varphi}. \qquad (3.8)$$

На трехмерной сфере (2.6) с координатной системой (2.6а) лапласиан записывается как

$$\Delta_L = \frac{1}{\sin^2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\sin^2\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\sin^2\rho}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\rho\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (3.9)$$

Согласно [6], ортонормированными собственными функциями лапласиана (3.9) с собственными значениями $-\sigma(\sigma+2)$ являются

$$\langle \sigma l m \,|\, \rho\theta\varphi \rangle = \left\{N^{\alpha,\alpha}_{n}\right\}^{-1/2} \left(1-\cos^2\rho\right)^{\alpha/2} P^{\alpha,\alpha}_{n}(\cos\rho) Y_{lm}(\theta,\varphi), \qquad (3.10)$$

где $P^{\alpha,\alpha}_{n}(\cos\rho)$ — полиномы Гегенбауэра, $Y_{lm}(\theta\varphi)$ — сферические функции, $n=\sigma-l$, $\alpha = l + 1/2$, $n \geqslant 0,1,2,\ldots$ и

$$N^{\alpha,\alpha}_{n} = \frac{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(n+\alpha+1)}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}$$

— норма.

Наконец, напишем оператор Лапласа на квадратичной форме (2.7) с координатной системой (2.7а) и его собственные функции (решения уравнения (3.2)):

$$\Delta_L = \frac{1}{\sin^2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\sin^2\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\sin^2\rho\operatorname{sh} b}\frac{\partial}{\partial b}\operatorname{sh} b\frac{\partial}{\partial b} - \frac{1}{\sin^2\rho\operatorname{sh}^2 b}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \qquad (3.11)$$

$$\langle \sigma\tau m \,|\, \rho b\varphi \rangle = \sin^{-1/2}\rho P^{-\tau-1/2}_{\sigma+1/2}(\cos\rho) P^{m}_{-\tau-1}(\operatorname{ch} b) e^{im\varphi} \qquad (3.12)$$

либо

$$\langle \sigma\tau m \,|\, \rho b\varphi \rangle = \sin^{-1/2}\rho Q^{-\tau-1/2}_{\sigma+1/2}(\cos\rho) P^{m}_{-\tau-1}(\operatorname{ch} b) e^{im\varphi}.$$

Мы получили собственные функции (3.8), (3.10), (3.12) оператора Лапласа. Теперь эти функции нужно нормировать (кроме (3.10)) или, что то же самое, найти формулы обращения для разложения по этим собственным функциям. Для этих целей мы используем метод орисфер.

4. Пространства Лобачевского и метод орисфер

В $(n+1)$-мерном линейном пространстве R_{n+1} введем билинейную форму

$$[uv] = u_0v_0 - u_1v_1 - \ldots - u_nv_n. \qquad (4.1)$$

Далее в R_{n+1} рассмотрим совокупность прямых, проходящих через начало координат и лежащих внутри конуса

$$[uv] = v_0^2 - \ldots - v_n^2 = 0, \qquad (4.2)$$

[1]) Можно выбрать для функции $A(a)$ и другой вид $A(a) = \operatorname{sh}^{-1/2} a Q^{\tau+1/2}_{\sigma+1/2}(\operatorname{ch} a)$.

т. е. таких прямых, для которых выполняется неравенство $[vv] > 0$. Определим расстояние r между прямыми, одна из которых проходит через точку $M(v)$, а другая — через точку $N(u)$, формулой

$$\mathrm{ch}^2 kr = \frac{[vu]^2}{[vv]\,[uu]}. \tag{4.3}$$

Для прямых внутри конуса выполняется неравенство $[vu]^2/[vv]\,[uu] \geqslant 1$, причем равенство только в случае совпадения прямых. Это означает, что расстояние r есть вещественное неотрицательное число. Полученное n-мерное пространство называется гиперболическим пространством, или пространством Лобачевского $R\mathcal{L}(n)$. Величина k есть кривизна этого пространства.

Множество прямых, для которых $[vv] < 0$, с определенным расстоянием (4.3) называется мнимым пространством Лобачевского $\mathcal{IL}$. Расстояние r для мнимого пространства принимает либо вещественные значения ($0 \leqslant r \leqslant \infty$), либо мнимые ($0 \leqslant r \leqslant i\pi/2k$).

Вещественное (мнимое) пространство Лобачевского может быть реализовано:

1) как внутренность (внешность) сферы единичного радиуса;

2) как верхняя пола двуполостного гиперболоида $[vv] = 1$ (множество точек на поверхности однополостного гиперболоида $[vv] = -1$).

Уравнение

$$[vk] = 1, \tag{4.4}$$

где $[vv] = 1$, а $[kk] = 0$ (конус) называется уравнением орисферы пространства Лобачевского. В $\mathcal{IL}(n)$ существуют орисферы первого рода:

$$|[vk]| = 1, \quad [vv] = -1, \quad [kk] = 0 \tag{4.5}$$

и орисферы второго рода:

$$[vk] = 0. \tag{4.6}$$

Орисферы второго рода расслаиваются на изотропные прямые (прямолинейные образующие однополостного гиперболоида)

$$v = b + kt, \tag{4.7}$$

причем

$$[vk] = 0, \quad [bk] = 0, \quad [kk] = 0, \quad [bb] = -1, \quad -\infty \leqslant t \leqslant \infty.$$

Функция $f(v)$, $v \in R\mathcal{L}(n)$ генерирует функцию на конусе

$$h(k) = \int f(v)\delta([vk] - 1)\,dv, \tag{4.8}$$

где dv — инвариантная мера на $R\mathcal{L}(n)$, равная $v_0^{-1}d^n v$ (см. работы Шапиро [7], Гельфанда, Граева и Виленкина [3]). Формула обращения для этого преобразования в случае $n = 2m + 1$ имеет вид (см. [3])

$$f(v) = \frac{(-)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} \int \delta^{(n-1)}([vk] - 1)h(k)\,dk \tag{4.9}$$

и для $n = 2m$ [2)]

$$f(v) = \frac{(-)^{n/2}\Gamma(n)}{(2\pi)^n} \int ([vk] - 1)^{-n} h(k)\,dk, \tag{4.10}$$

2) Расходящийся интеграл понимается в смысле регуляризованного значения.

где $dk = k_0^{-1} d^n k$ — инвариантная мера на конусе. Разложение функций, заданных на конусе, на однородные компоненты $\Phi(k, \sigma)$ осуществляется по формуле

$$h(k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \Phi(k, \sigma)\, d\sigma, \tag{4.11}$$

где

$$\Phi(k, \sigma) = \int h(kt) t^{-\sigma - 1}\, dt, \tag{4.12}$$

причем в полосе $(0, \delta)$ функция $\Phi(k, \sigma)$ не имеет полюсов.

Из уравнений (4.8) и (4.12) следует, что

$$\Phi(k, \sigma) = \int f(v)[kv]^{\sigma}\, dv. \tag{4.13}$$

Поэтому из уравнений (4.9), (4.10), (4.11) получаем для $n = 2m + 1$ (см. [1, 3])

$$f(v) = \frac{(-)^{(n-1)/2}}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{\Gamma(\sigma + n - 1)}{\Gamma(\sigma)} \int\limits_{\Gamma} \Phi(k, \sigma)[vk]^{-\sigma - n - 1}\, d^{n-1}k\, d\sigma \tag{4.14}$$

и для $n = 2m$

$$f(v) = \frac{(-)^{n/2 - 1}}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{\Gamma(\sigma + n - 1)}{\Gamma(\sigma)} \operatorname{ctg} \pi\sigma \int\limits_{\Gamma} \Phi(k, \sigma)[vk]^{-\sigma - n - 1}\, d^{n-1}k\, d\sigma. \tag{4.15}$$

Контур интегрирования Γ является любым контуром на конусе, пересекающим все образующие конуса, и $d^{n-1}k$ есть инвариантная мера на этом контуре, определяемая равенством

$$d(tk) = t^{n-3}\, dt\, dk, \quad 0 < t < \infty.$$

Функция $f(v)$, $v \in \mathcal{IL}(n)$, генерирует две функции

$$h(k) = \int f(v)\delta(|[vk]| - 1)\, dv, \tag{4.16}$$

$$\varphi(l) = \int\limits_{l} f(v)\, dl \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(b + kt)\, dt = \varphi(b, k). \tag{4.17}$$

Функция $\varphi(l)$ задана на множестве изотропных прямых. Она выражается через компоненты Фурье по формуле [3]

$$\varphi(l) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(l; 2n). \tag{4.18}$$

Эти компоненты удовлетворяют соотношению

$$F(l_2; 2n) = e^{2in\theta} F(l_1; 2n), \tag{4.19}$$

где l_2 — изотропная прямая, параллельная l_1 и отстоящая от нее на расстоянии $i\theta/k$. Для однозначности в формуле (4.17) b и k нормированы условиями $k_0 = 1$, $b_0 = 0$.

Формула обращения, т. е. выражение $f(v)$ через $h(k)$ и $\varphi(l)$, имеет следующий вид для $n = 3$ (см. [3]):

$$f(v) = \frac{(-)}{4i(2\pi)^3} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1) \int\limits_{\Gamma} \Phi(k,\sigma)|[vk]|^{-\sigma-2}\, d^2k\, d\sigma + \\ + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \int\limits_{\Gamma} F(k,v;2n)\delta([vk])\, d^2k. \tag{4.20}$$

Функция $\Phi(k,\sigma)$ преобразуется по неприводимым унитарным представлениям $T_\chi(g)$, $\chi = (ip; ip)$, а $F(v,k;2n)$ преобразуется по унитарным дискретным представлениям, $T_\chi(g)$, $\chi = (2n, -2n)$ [3]. Если взять точку a за начало отсчета, то первое слагаемое формулы (4.20) есть разложение $f(v)$ для тех v, для которых $[av] > 1$, а второе слагаемое — для $[av] < 1$, т. е. для множества точек v, находящихся на мнимом расстоянии от a. Формула (4.20) получена с учетом отождествления диаметрально противоположных точек однополостного гиперболоида, т. е. для функции $f(v)$ учитывалось равенство $f(v) = f(-v)$.

5. Построение разложений в нефизических областях

Область SII. Согласно разделу 2 нам нужно построить разложение функции на V_{II} с координатной системой (2.5а). Принимая во внимание изоморфизм множества точек (2.5) мнимому пространству Лобачевского с вещественным расстоянием между точками, можно согласно формуле (4.20) написать

$$f(v) = -\frac{1}{4i(2\pi)^2} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1) \int\limits_{\Gamma} \Phi(k,\sigma)\, |[vk]|^{-\sigma-2}\, dk\, d\sigma, \tag{5.1}$$

где Γ есть сечение конуса $k_0^2 - k_3^2 + k_2^2 + k_1^2 = 0$ плоскостью $k_0 = 1$, т. е. двумерное пространство Лобачевского $R\mathscr{L}$ (2). Выберем на Γ параметры c и ψ:

$$\begin{aligned} k_3 &= \operatorname{ch} c, \\ k_2 &= \operatorname{sh} c \cos\psi, \\ k_1 &= \operatorname{sh} c \sin\psi. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Учитывая (4.15), имеем

$$\Phi(k,\sigma) = \frac{1}{8i\pi^2} \int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \tau \operatorname{ctg} \pi\tau \int\limits_{\Gamma'} \Phi(\xi,\sigma,\tau)[k\xi]^{-\tau-1}\, d\xi\, d\tau, \tag{5.3}$$

где $\xi_3 = 1$ и Γ' является окружностью $\xi_2^2 + \xi_1^2 = 1$. Положим $\xi_2 = \cos\chi$; $\xi_1 = \sin\chi$; тогда $d\xi = d\chi$.

Разлагая $\Phi(\xi,\sigma,\tau)$ в ряд Фурье

$$\Phi(\xi,\sigma,\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(\tau,\sigma) e^{im\chi}, \tag{5.4}$$

15 Зак. 198

подставляя в (5.3) и интегрируя, получаем

$$\Phi(k,\sigma)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\tau\operatorname{ctg}\pi\tau\sum_m(-)^m a_m(\tau,\sigma)\frac{\Gamma(-\tau)}{\Gamma(-\tau+m)}P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch}c)e^{im\psi}\,d\tau. \qquad (5.5)$$

Коэффициенты $a_m(\sigma\tau)$ равны

$$a_m(\sigma\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\int\limits_0^{2\pi}\Phi(k,\sigma)[k\xi]^\tau e^{-im\chi}d^2k\,d\chi=\frac{(-)^m\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(\tau+1-m)}\int\Phi(k,\sigma)P_\tau^{-m}(\operatorname{ch}c)e^{-im\psi}d^2k, \qquad (5.5a)$$

где $d^2k=\operatorname{sh}c\,dc\,d\psi$.

Теперь подставим (5.5) в (5.1):

$$f(v)=\frac{1}{2^4(2\pi)^3}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\sigma(\sigma+1)\int\limits_\Gamma\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\tau\operatorname{ctg}\pi\tau\sum_m(-)^m\times$$

$$\times\frac{a_m(\tau\sigma)\Gamma(-\tau)P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch}c)e^{im\psi}}{\Gamma(-\tau+m)|[kv]|^{\sigma+2}}\,d(\operatorname{ch}c)\,d\psi\,d\tau\,d\sigma. \qquad (5.6)$$

Нам надо вычислить интеграл

$$I=\int\limits_1^\infty\int\limits_0^{2\pi}\frac{P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch}c)e^{im\psi}d(\operatorname{ch}c)\,d\psi}{|[vk]|^{\sigma+2}}. \qquad (5.7)$$

Проведем вычисление для точки $v^{(0)}=(\operatorname{ch}a,\ \operatorname{sh}a,\ 0,\ 0)$, а затем перейдем от $v^{(0)}$ к v. Для $v^{(0)}$ (5.7) принимает вид

$$I=2\pi\int\limits_1^\infty\frac{P_{-\tau-1}(y)\,dy}{|\operatorname{ch}a-y\operatorname{sh}a|^{\sigma+2}}. \qquad (5.8)$$

Согласно работе [8]

$$|t|^\nu=t_+^\nu+t_-^\nu,$$

$$t_+=\begin{cases}t, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases},\quad t_-=\begin{cases}0, & t>0\\ -t, & t<0\end{cases}, \qquad (5.9)$$

причем

$$t_+^\nu=\frac{e^{i\pi\nu}(t-i0)^\nu-e^{-i\pi\nu}(t+i0)^\nu}{2i\sin\pi\nu}, \qquad (5.10)$$

$$t_-^\nu=\frac{(t+i0)^\nu-(t-i0)^\nu}{2i\sin\pi\nu}. \qquad (5.11)$$

Тогда

$$|t|^\nu=\frac{(e^{i\pi\nu}-1)(t-i0)^\nu+(1-e^{-i\pi\nu})(t+i0)^\nu}{2i\sin\pi\nu}. \qquad (5.12)$$

Таким образом, нам нужно вычислить интеграл от функции $(y+b)^\nu P_{-\tau-1}(y)$, где b — комплексное число. После вычисления (см. Приложение) получаем

$$I(a\tau\sigma) = \sqrt{8\pi i}\frac{\Gamma(\sigma+1+\tau)\Gamma(1-\sigma)}{\sigma(\sigma+1)\Gamma(1-\tau)\Gamma(\tau)}e^{-i\pi\tau}(e^{-i\pi\sigma}-1)\frac{Q^{\tau+1/2}_{\sigma+1/2}(\operatorname{ch}a)}{\sqrt{\operatorname{sh}a}}. \tag{5.13}$$

Как и в работе [1], интеграл (5.7) выражается через (5.13) формулой

$$I(a,b,\varphi,\sigma\tau) = 2\pi P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch}b)e^{im\varphi}I(a\tau\sigma). \tag{5.14}$$

Отсюда получаем выражение для разложения функции $f(v)$:

$$f(v) = -\frac{1}{(2\pi)^{5/2}}\frac{1}{8\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\tau\operatorname{ctg}\pi\tau\frac{\Gamma(\sigma+1-\tau)\Gamma(1-\sigma)\Gamma(-\tau)}{\Gamma(1-\tau)\Gamma(\tau)}e^{-i\pi\tau}(e^{-i\pi\sigma}-1)\times$$
$$\times\sum_{m=-\infty}(-)^m\frac{a_m(\tau\sigma)}{\Gamma(-\tau+m)}\frac{Q^{\tau+1/2}_{\sigma+1/2}(\operatorname{ch}a)}{\sqrt{\operatorname{sh}a}}P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch}b)e^{im\varphi}\,d\tau\,d\sigma. \tag{5.15}$$

Подставляя (4.13) в (5.5а) и интегрируя, найдем коэффициенты разложения:

$$a_m(\sigma\tau) = \sqrt{8\pi i}\frac{\Gamma(\tau-\sigma)\Gamma(\sigma+1)e^{i\pi\tau}(1-e^{i\pi\sigma})(-)^m}{\Gamma(\tau+1-m)\Gamma(-\tau-1)(\tau+1)}\times$$
$$\times\int f(v)\operatorname{sh}^{-1/2}a\,Q^{-\tau-1/2}_{-\sigma-3/2}(\operatorname{ch}a)P^{-m}_\tau(\operatorname{ch}b)e^{-im\varphi}\,dv, \tag{5.16}$$

где

$$dv = v_0^{-1}\,d^3v = \operatorname{sh}^2a\,da\,d(\operatorname{ch}b)\,d\varphi.$$

Поскольку амплитуды не зависят от φ, то формулу (5.15) можно записать как

$$f(s,t,u) = \frac{i\sqrt{2}}{(2\pi)^{9/2}}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\Gamma(1-\sigma)\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\tau\cos\pi\tau\Gamma(\sigma+1-\tau)e^{-i\pi\tau}(e^{-i\pi\sigma}-1)\times$$
$$\times a(\tau\sigma)(s-4)^{-1/4}Q^{\tau+1/2}_{\sigma+1/2}\left(\sqrt{\frac{s}{4}}\right)P_{-\tau-1}\left(\frac{t-u}{s-4}\right)d\tau\,d\sigma. \tag{5.17}$$

Область SIV. Функция $f(v)$ задается на V_{IV} с координатной системой (2.7а). Уравнение конуса есть $k_0^2+k_3^2-k_2^2-k_1^2=0$. Будем считать одни оси чисто вещественными, другие — чисто мнимыми, иначе (в случае чисто вещественного конуса) мы не смогли бы построить разложение, так как контур Γ представлял бы однополостный двумерный гиперболоид (сечение $k_0=1$). Введем на конусе координатную систему

$$k_0 = 1,\quad k_3 = i\operatorname{ch}b,\quad k_2 = i\operatorname{sh}b\cos\vartheta,\quad k_1 = i\operatorname{sh}b\sin\vartheta. \tag{5.18}$$

Для получения разложения $f(v)$, $v\in V_{IV}$ мы без доказательства воспользуемся формулой (4.14), в которой компоненты 4-вектора k задаются формулой (5.18). Единственным оправданием нам будет служить то, что при таком рассмотрении мы получим разложение $f(v)$ по собственным функциям оператора Лапласа, заданного на V_{IV} с координатной системой (2.7а), т. е. по функциям (3.12). Ясно, что указанные выше соображения не имеют силы строгого доказательства.

Функция $\Phi(k,\sigma)$ разлагается по собственным функциям оператора Лапласа, заданного на верхней поле двумерного гиперболоида, и имеет вид (5.5).

Подставляя (5.5) в (4.14) с $n = 3$ и произведя интегрирование, получаем

$$f(v)=\frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^3}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma \int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} d\tau\, \tau \operatorname{ctg}\pi\tau\, e^{-i\pi\tau/2}\frac{\Gamma(\sigma+\tau+2)}{\Gamma(\sigma)}\times$$

$$\times\sum_m(-)^m\frac{a_m(\tau\sigma)\Gamma(-\tau)}{\Gamma(-\tau+m)}P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch}b)e^{im\varphi}\frac{\left\{iQ^{-\tau-1/2}_{\sigma+1/2}(\cos\rho)+2^{-1}P^{-\tau-1/2}_{\sigma+1/2}(\cos\rho)\right\}}{\sin^{1/2}\rho}. \quad (5.19)$$

Формула обратного преобразования получается путем подстановки в формулу (5.5а) выражения (4.13) для $\Phi(k,\sigma)$ и интегрирования:

$$a_m(\tau,\sigma) = (-)^m 2\pi 2^{3/2} e^{i\pi(\tau+1)/2}\frac{\Gamma(\tau+1)\Gamma(-\sigma-\tau-1)}{\Gamma(\tau+1-m)\Gamma(-\sigma)}\times$$

$$\times\int f(v)\frac{\left[iQ^{\tau+1/2}_{-\sigma-3/2}(\cos\rho)+2^{-1}P^{\tau+1/2}_{-\sigma-3/2}(\cos\rho)\right]}{\sin^{1/2}\rho}P^{-m}_{\tau}(\operatorname{ch}b)e^{-im\varphi}\,dv. \quad (5.20)$$

dv в переменных ρ, b, φ есть $\sin^2\rho\, d\rho\, d(\operatorname{ch}b)\, d\varphi$. Для амплитуд в SIV разложение (5.20) превращается в

$$f(s,t,u) = \frac{2}{(2\pi)^3}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} d\tau\,\tau\operatorname{ctg}\pi\tau\, e^{-i\pi\tau/2}\frac{\Gamma(\sigma+\tau+2)}{\Gamma(\sigma)}\,a(\sigma,\tau)\times$$

$$\times P_{-\tau-1}\left(\frac{u-t}{4-s}\right)\left[(4-s)^{-1/4}\left\{iQ^{-\tau-1/2}_{\sigma+1/2}\left(\sqrt{\frac{s}{4}}\right)+\frac{1}{2}P^{-\tau-1/2}_{\sigma+1/2}\left(\sqrt{\frac{s}{4}}\right)\right\}\right]. \quad (5.21)$$

Заметим, что области SII$'$ и SIV$'$ получаются соответственно из SII и SIV заменой $t\to u$, $u\to t$.

Интересуясь лишь функциональной структурой разложений, мы не произвели их симметризацию, которая только бы увеличила объем работы.

Мы выражаем благодарность Н. Я. Виленкину и Ю. А. Данилову за многочисленные обсуждения и помощь.

Приложение

Вычислим интеграл

$$I(b,\alpha,\lambda) = \int\limits_1^\infty \frac{P_\alpha(y)\,dy}{(y+b)^\lambda}. \quad (\text{П}.1)$$

Сначала предполагается, что $\operatorname{Re}\alpha$ и $\operatorname{Re}\lambda$ такие, что интеграл существует в обычном смысле. Далее полученный результат аналитически продолжается по α и λ. Заменим функцию $P_\alpha(y)$ ее интегральным представлением

$$P_\alpha(y) = \frac{1}{2^\alpha 2\pi i}\int\limits_C\frac{(t^2-1)^\alpha\,dt}{(t-y)^{\alpha+1}} = \frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha)}\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(t^2-1)^\alpha, \quad \alpha=n. \quad (\text{П}.2)$$

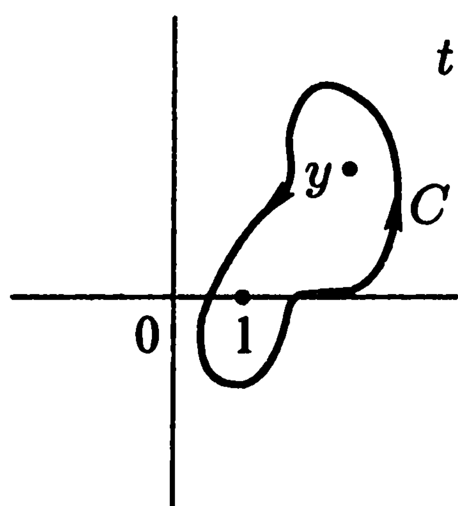


Рис. 4

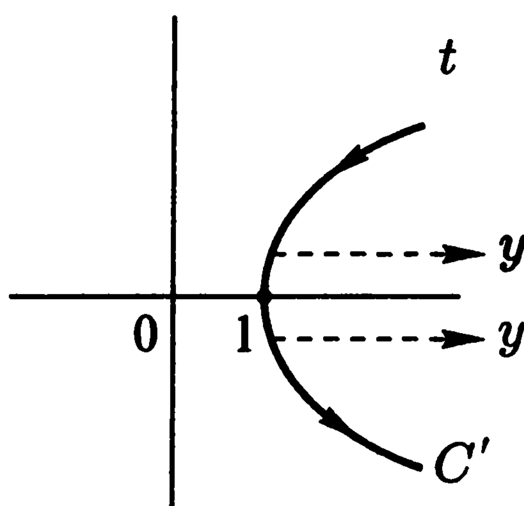


Рис. 5

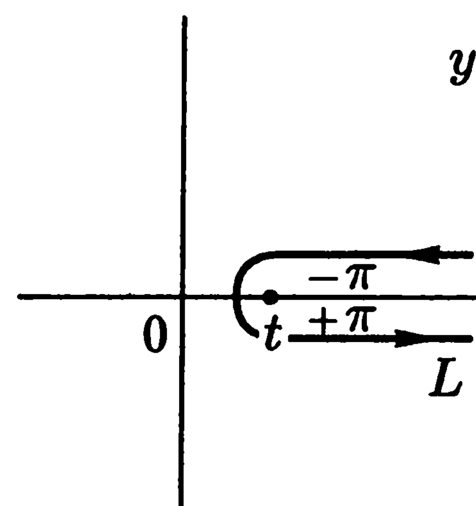


Рис. 6

Контур C изображен на рис. 4. Подставляя (П. 2) в (П. 1), получаем

$$I(b,\alpha,\lambda)=\frac{1}{2^\alpha 2\pi i}\int_1^\infty dy\int_C dt\frac{(t^2-1)^\alpha}{(t-y)^{\alpha+1}(y+b)^\lambda}. \tag{П.3}$$

В формуле (П. 3) меняем порядок интегрирования. Поскольку y изменяется до бесконечности, то контур C превращается в C' (рис. 5). При фиксированном t величина y изменяется от t до ∞. Положим $\alpha+1=-\tau$. Функция $(t-y)^\tau$ на плоскости y имеет разрез от t до ∞ (рис. 6). Тогда (П.3) можно записать как

$$I(b\tau\lambda)=\frac{1}{2^\alpha 2\pi i}\left[\int_\infty^1 dt\int_t^\infty\frac{dy(y-t)^\tau e^{-i\pi\tau}}{(t^2-1)^{\tau+1}(y+b)^\lambda}+\int_1^\infty dt\int_t^\infty\frac{dy\,(y-t)^\tau e^{i\pi\tau}}{(t^2-1)^{\tau+1}(y+b)^\lambda}\right]=$$

$$=\frac{1}{2^\alpha(2\pi i)}\int_1^\infty dt\int_L dy\,\frac{(t-y)^\tau}{(t^2-1)^{\tau+1}(y+b)^\lambda}; \tag{П.4}$$

т. е.

$$I(b\lambda\tau)=\frac{1}{2^\alpha}\,\frac{\sin\pi\tau}{\tau}\int_1^\infty dt\,(t^2-1)^{-\tau-1}\int_t^\infty(y-t)^\tau(y+b)^{-\lambda}\,dy. \tag{П.5}$$

Воспользуемся формулой (3.196 (2)) из работы [9]. Тогда

$$\int_t^\infty(y-t)^\tau(y+b)^{-\lambda}\,dy=(t+b)^{\tau+1-\lambda}B(\lambda-\tau-1,\ \tau+1), \tag{П.6}$$

где $B(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ — бэта-функция Эйлера. Учитывая (П. 6) и $\lambda=\sigma+2$, получаем

$$I(b,\sigma,\alpha)=\frac{\Gamma(\sigma+1-\tau)\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(\sigma+2)\Gamma(\tau)\Gamma(1-\tau)}\,\frac{1}{2^\alpha}\int_1^\infty\frac{(t^2-1)^\alpha\,dt}{(t+b)^{\alpha+\sigma+2}}. \tag{П.7}$$

В (П. 7) заменено $\sin\pi\tau/\pi$ на $[\Gamma(\tau)\Gamma(1-\tau)]^{-1}$ и $-\tau=\alpha+1$. Согласно формуле (8.713(2)) из работы [9],

$$\frac{1}{2^\alpha}\int_1^\infty\frac{(t^2-1)^\alpha\,dt}{(t+b)^{\sigma+\alpha+2}}=\Gamma(\sigma+2+\tau)\Gamma(-\tau)\left(b^2-1\right)^{-(\sigma+1)/2}P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(b). \tag{П.8}$$

Подставляя (П. 8) в (П. 7) и учитывая соотношение

$$\frac{\Gamma(-\tau)\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(1-\tau)\Gamma(\tau)} = -1,$$

получаем

$$I(b,\sigma,\tau) = -\frac{\Gamma(\sigma+2+\tau)\Gamma(\sigma+1-\tau)}{\Gamma(\sigma+2)}\left(b^2-1\right)^{-(\sigma+1)/2} P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(b). \qquad (\text{П.9})$$

Вычислим интеграл

$$J(a,\tau,\sigma) = \int\limits_1^\infty \frac{P_{-\tau-1}(y)\,dy}{|\operatorname{ch} a - y \operatorname{sh} a|^{\sigma+2}} =$$

$$-\frac{1}{(\operatorname{sh} a)^{\sigma+2}} \int\limits_1^\infty \frac{(e^{-i\pi\sigma}-1)(y-\operatorname{cth} a - i0)^{-\sigma-2} + (1-e^{i\pi\sigma})(y-\operatorname{cth} a + i0)}{2i\sin\pi\sigma} P_{-\tau-1}(y)\,dy. \qquad (\text{П.10})$$

Поскольку функция $P_\nu^\mu(z)$ имеет разрез от $-\infty$ до 1, то $J(a,\sigma,\tau)$ выражается через значения (П. 9) на нижнем и верхнем берегах разреза.

Нижний берег:

$$b = -\operatorname{cth} a - i0;$$

$$\left(b^2-1\right)^{-(\sigma+1)/2} P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(b) = (\operatorname{sh} a)^{\sigma+1} P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(-\operatorname{cth} a - i0). \qquad (\text{П.11})$$

Верхний берег:

$$b = -\operatorname{cth} a + i0;$$

$$\left(b^2-1\right)^{-(\sigma+1)/2} P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(b) = -e^{-i\pi\sigma}(\operatorname{sh} a)^{\sigma+1} P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(-\operatorname{cth} a + i0). \qquad (\text{П.11a})$$

Принимая во внимание фазовые множители в (П. 10) и (П. 11), (П. 11a), а также соотношение (8.736(2,3)) из [9] получаем

$$-\frac{1}{2i}\left[P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(-\operatorname{cth} a - i0) - P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(-\operatorname{cth} a + i0)\right] = \sin\pi\tau P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(\operatorname{cth} a),$$

откуда

$$J(a,\tau,\sigma) = -\frac{\Gamma(\sigma+2-\tau)\Gamma(\sigma+1-\tau)\sin\pi\tau(e^{-i\pi\sigma}-1)}{\Gamma(\sigma+2)\sin\pi\sigma}\,\frac{P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(\operatorname{cth} a)}{\operatorname{sh} a}. \qquad (\text{П.12})$$

Если учесть соотношение (8.739) из [9]

$$P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(\operatorname{cth} a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sh}^{1/2} a\, e^{-i\pi(\tau+1/2)}}{\Gamma(\sigma+\tau+2)}\, Q_{\sigma+1/2}^{\tau+1/2}(\operatorname{ch} a),$$

то

$$J(a,\sigma,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i\,\frac{\Gamma(\sigma+1-\tau)\Gamma(1-\sigma)e^{-i\pi\tau}}{\sigma(\sigma+1)\Gamma(1-\tau)\Gamma(\tau)}\left(e^{-i\pi\sigma}-1\right)\frac{Q_{\sigma+1/2}^{\tau+1/2}(\operatorname{ch} a)}{\operatorname{sh}^{1/2} a}. \qquad (\text{П.13})$$

При получении (П. 13) учитывались свойства Г-функции

$$\Gamma(\sigma+1) = \sigma\Gamma(\sigma), \qquad \frac{\sin\pi\sigma}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)}.$$

Литература

1. *Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **46**, 1793, 1964.
2. *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **43**, 2217, 1962.
3. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1962.
4. *Magnus W., Oberhettinger F.* Formulen und Satze für die speziellen Funktionen der mathematisclien Physik. Springer, 1950.
5. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращения и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
6. *Виденкин Н. Я., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **2**, 906, 1965.
7. *Шапиро И. С.* ДАН СССР, **106**, 647, 1956.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, 1959.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.

О полных наборах наблюдаемых

Я. А. Смородинский, И. И. Тугов

1. Введение

Потенциалы, обладающие высшей симметрией, играют существенную роль в различных моделях ядра и могут быть полезными в качестве динамических моделей в теории элементарных частиц. Возникает задача о нахождении коммутирующих с гамильтонианом операторов, определенных в каждой из систем координат, в которых разделяются переменные, и последующего построения из этих операторов алгебры Ли. В этой работе при помощи общего метода получены в явном виде полные наборы коммутирующих операторов, число которых, очевидно, равно рангу группы, для каждой из систем координат, в которых разделяются переменные в уравнении Шредингера и в волновом уравнении в пространстве релятивистских скоростей. Поскольку уравнение Шредингера допускает разделение переменных в тех же системах координат, что и волновое уравнение в евклидовом пространстве, мы рассмотрим последний случай. Переход к операторам, соответствующим разделению переменных в уравнении Шредингера, прост.

Мы рассмотрим также полные наборы коммутирующих операторов в трехмерном пространстве постоянной кривизны, положительной и отрицательной, для свободного движения (волновое уравнение). Эти операторы могут быть применены при решении физической задачи кулоновского взаимодействия двух тел соответственно для дискретного и непрерывного спектров. Согласно Олевскому [1], в трехмерном римановом пространстве постоянной положительной кривизны существуют шесть систем координат, в которых волновое уравнение допускает полное разделение переменных. Поэтому для атома водорода (дискретный спектр), группа симметрии которого есть группа движений пространства постоянной положительной кривизны, реализованного на трехмерном шаре в введенном Фоком четырехмерном пространстве [2], возможны шесть различных полных наборов квантовых чисел, являющихся собственными значениями некоторых операторов.

В случае непрерывного спектра группа симметрии задачи есть однородная группа Лоренца (группа движений трехмерного пространства Лобачевского [2]). Существуют 34 системы координат, в которых разделяются переменные волнового уравнения в этом пространстве [1]. Таким образом, в случае непрерывного спектра атома водорода существуют 34 набора квантовых чисел, являющихся собственными значениями операторов, явный вид которых приведен ниже.

2. Разделение переменных в уравнении Шредингера и наборы коммутирующих операторов

Рассмотрим обобщенное не зависящее от времени уравнение Шредингера при любом числе $n \geqslant 2$ независимых переменных:

$$F[u] \equiv \Delta_2 u + (E - V)u = 0. \tag{1}$$

Δ_2 — второй дифференциальный параметр Бельтрами (оператор Бельтрами — Лапласа) относительно основной формы риманова пространства. В этом пространстве

$$ds^2 = g_{ii}(dx^i)^2, \quad g = \det(g_{ij}) \neq 0,$$
$$\Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j}\right). \tag{2}$$

Уравнение (1) есть уравнение собственных значений оператора энергии $\widehat{H}$

$$\widehat{H} u \equiv (-\Delta_2 + V)u = Eu. \tag{1'}$$

Сформулируем условия разделения переменных в уравнении (1) в системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ пространства R_n. Уравнение (1) допускает полное разделение переменных, если оно имеет решения в форме произведения

$$u = \prod_{i=1}^{n} u_i(x^i), \tag{3}$$

причем каждая из функций $u_i(x^i)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Уравнение (1) допускает в системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ полное разделение переменных в том и только в том случае, если существуют n^2 функций $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x^i)$ и $2n$ функций $f_i = f_i(x^i)$, $\chi_i = \chi_i(x^i)$, $i, j = 1, 2, n, \ldots$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{1}{g_{ii}} = (\varphi^{-1})_{i1}, \quad \sqrt{g}\det(\varphi^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где φ — определитель Штеккеля [3], т. е. определитель, элементы которого $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x^i)$.

Потенциал V должен иметь вид

$$V = \sum_{i=1}^{n} (\varphi^{-1})_{i1} \chi_i(x^i), \tag{5}$$

и уравнение (1) можно представить как

$$F[u] = \sum_{i=1}^{n} (\varphi^{-1})_{i1} F_i[u] = 0. \tag{6}$$

Здесь F_i — линейный дифференциальный оператор второго порядка по i-й независимой переменной, соответствующий разделенным уравнениям $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$F_i[u] \equiv \frac{1}{f_i} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[f_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\right] + (\alpha_j \varphi_{ij} + \chi_i)u = 0, \tag{7}$$

где $\alpha_1 = E$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — константы разделения.

Исходя из формы (6), построим в каждой системе координат, в которой уравнение (1) допускает разделение переменных, полный набор коммутирующих операторов. Справедлива следующая теорема.

14 Зак. 198

Пусть в системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ пространства R_n уравнение (1) допускает полное разделение переменных. Тогда существует $n-1$ линейно независимых дифференциальных операторов второго порядка, $\widehat{X}_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$, коммутирующих с гамильтонианом $\widehat{H}$ и друг с другом:

$$\widehat{X}_k = -\sum_{i=1}^{n} (\varphi^{-1})_{ik} \left[\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} + \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \chi_i \right] \tag{8}$$

$(k = 2, 3, \ldots, n)$, причем константы разделения $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ являются собственными значениями этих операторов:

$$\widehat{X}_k u = \alpha_k u, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{9}$$

Введем присоединенный к определителю Штеккеля $|\varphi_{ij}|$ определитель $|A^{ij}|$, в котором каждый элемент φ_{ij} заменен своим алгебраическим дополнением A^{ij}. Линейная независимость операторов (9) следует из того, что определитель

$$A = \det |A^{ij}| = \left(\det |\varphi^{ij}|\right)^{n-1} = \varphi^{n-1}$$

при $\varphi \neq 0$ отличен от нуля. Очевидно, что

$$A^{ij} = A^{ij}\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n\right). \tag{10}$$

Для доказательства теоремы воспользуемся известным из линейной алгебры соотношением

$$A^{ik}A^{jl} - A^{il}A^{jk} = (-1)^{i+j+l+k} \varphi\, d^{ijkl}, \tag{11}$$

где

$$d = d\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{j-1}, x^{j+1}, \ldots, x^n\right) \tag{12}$$

— минор порядка $n-2$, полученный из определителя φ вычеркиванием i-й и j-й строк, k-го и l-го столбцов (причем $i < j$ и $k < l$).

Рассмотрим операторы X_k, соответствующие уравнениям

$$X_k[u] \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{A^{ik}}{\varphi} F_i[u] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

(при $k = 1$ имеем, очевидно, оператор F). Покажем, что операторы X_k перестановочны друг с другом, т. е.

$$[X_k, X_l] = 0. \tag{14}$$

Действительно $(k < l)$,

$$[X_k, X_l] = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{A^{ik}}{\varphi} F_i,\ \frac{A^{jl}}{\varphi} F_j \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{A^{ik}}{\varphi} F_i,\ \frac{A^{il}}{\varphi} F_i \right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left[\frac{A^{ik}}{\varphi} F_i,\ \frac{A^{jl}}{\varphi} F_j \right].$$

Вследствие (10) первая сумма равна нулю. Перегруппировав члены во второй сумме, получим

$$[X_k, X_l] = \sum_{\substack{i=1\\j>i}}^{n} \left\{ \left[\frac{A^{ik}}{\varphi} F_i,\ \frac{A^{jl}}{\varphi} F_j \right] + \left[\frac{A^{jk}}{\varphi} F_j,\ \frac{A^{il}}{\varphi} F_i \right] \right\} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\j>i}}^{n} \left[\left(\frac{A^{ik}}{\varphi} F_i \frac{A^{jl}}{\varphi} F_j - \frac{A^{il}}{\varphi} F_i \frac{A^{jk}}{\varphi} F_j \right) - \left(\frac{A^{jl}}{\varphi} F_j \frac{A^{ik}}{\varphi} F_i - \frac{A^{jk}}{\varphi} F_j \frac{A^{il}}{\varphi} F_i \right) \right] =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\j>i}}^{n} \left(\frac{1}{\varphi} F_i \frac{A^{ik}A^{jl} - A^{il}A^{jk}}{\varphi} F_j - \frac{1}{\varphi} F_j \frac{A^{ik}A^{jl} - A^{il}A^{jk}}{\varphi} F_i \right) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\j>i}}^{n} \left(\frac{1}{\varphi} F_i\, d^{ijkl} F_j - \frac{1}{\varphi} F_j\, d^{ijkl} F_i \right) (-1)^{i+j+k+l} = 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнения $X_k[u] = 0$ есть уравнения собственных значений операторов (8), причем в качестве собственных значений выступают константы разделения α_k.

3. Атом водорода. Возможные наборы квантовых чисел

В качестве примера использования предложенного метода построения возможных наборов квантовых чисел рассмотрим различные наборы наблюдаемых в случае дискретного и непрерывного спектров атома водорода. Фоком [2] показано, что уравнение Шредингера для атома водорода в импульсном представлении

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2} \Psi(\mathbf{p}) - \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{\Psi(\mathbf{p}')d\mathbf{p}'}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2} = E\Psi(\mathbf{p}) \tag{15}$$

в новых переменных

$$\xi_i = \frac{2p_0 p_i}{p_0^2 + \mathbf{p}^2}, \quad i = 1, 2, 3; \qquad \xi_4 = \frac{p_0^2 - \mathbf{p}^2}{p_0^2 + \mathbf{p}^2}; \tag{16}$$

$p_0 = \sqrt{-2E}$ и при замене искомой функции на

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} p_0^{-5/2} (p_0^2 + \mathbf{p}^2) \Psi(\mathbf{p})$$

принимает вид интегрального уравнения для сферических функций четырехмерного шара (дискретный спектр), т. е. эквивалентно волновому уравнению в трехмерном римановом пространстве постоянной положительной кривизны. Подобным образом волновые функции непрерывного спектра определяются волновым уравнением в пространстве Лобачевского.

Ниже приводятся наборы операторов, определенных в каждой из 34 систем координат, в которых разделяются переменные в этом уравнении [1)].

[1)] Наборы коммутирующих операторов в системах 1, 10, 11 и 14 в пространстве релятивистских скоростей рассмотрены в работе Винтерницта и др. [4] соответственно для систем C, S, H и O. Волновые функции непрерывного спектра атома водорода в одной из систем координат рассматривались Переломовым и Поповым [5].

1–2. $X_2=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2},\quad X_3=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_3^2};$

3. $X_2=\dfrac{4P^{1/2}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\left(P^{1/2}(\rho_1)\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\right)-\dfrac{4P^{1/2}(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\left(P^{1/2}(\rho_2)\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\right),$

$X_3=\dfrac{\rho_2P^{1/2}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\left(P^{1/2}(\rho_1)\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\right)-\dfrac{\rho_1P^{1/2}(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\left(P^{1/2}(\rho_2)\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\right),$

$P(\rho)\equiv(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c);$

4–9[2]. $X_2=\dfrac{4P^{1/2}(\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\left(P^{1/2}(\rho_1)\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\right)-\dfrac{4P^{1/2}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\left(P^{1/2}(\rho_2)\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\right),$

$X_3=\dfrac{\rho_2P^{1/2}(\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\left(P^{1/2}(\rho_1)\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\right)-\dfrac{\rho_1P^{1/2}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\left(P^{1/2}(\rho_2)\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\right);$

10. $X_2=-\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\operatorname{ctg}\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2},\quad X_3=-\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2};$

11. $X_2=-\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}-\operatorname{cth}\rho_1\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2\rho_1}\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2},\quad X_3=-\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2};$

12. $X_2=-\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}-\operatorname{th}\rho_1\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\rho_1}\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2},\quad X_3=-\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2};$

13. $X_2=-\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}+\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}-e^{2\rho_1}\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2},\quad X_3=-\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2};$

14. $X_2=-\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}-\dfrac{1}{\rho_1}\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}-\dfrac{1}{\rho_1^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2},\quad X_3=-\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2};$

15. $X_2=\dfrac{1}{\cos 2\rho_2-\operatorname{ch}2\rho_1}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}\right),$

$X_3=\dfrac{1}{\cos 2\rho_2-\operatorname{ch}2\rho_1}\left(\cos 2\rho_2\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}+\operatorname{ch}2\rho_1\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}\right);$

16. $X_2=-\dfrac{1}{\rho_1^2+\rho_2^2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}\right),\quad X_3=-\dfrac{\rho_2^2}{\rho_1^2+\rho_2^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}-\dfrac{\rho_1^2}{\rho_1^2+\rho_2^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_2^2};$

17–27. $X_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_3^2},\quad X_3=\dfrac{(\rho_2-\alpha)P^{1/2}(\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1-\alpha)^{1/2}}\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\left[P^{1/2}(\rho_1)(\rho_1-\alpha)^{1/2}\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\right]-$

$-\dfrac{(\rho_1-\alpha)P^{1/2}(\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\alpha)^{1/2}}\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\left[P^{1/2}(\rho_2)(\rho_2-\alpha)^{1/2}\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\right]-\dfrac{\rho_2+\rho_1-2\alpha}{2(\rho_2-\alpha)(\rho_1-\alpha)}\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_3^2};$

28–34. $X_2=\dfrac{(\rho_3+\rho_2)Q^{1/2}(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\left(Q^{1/2}(\rho_1)\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}\right)+\dfrac{(\rho_1+\rho_3)Q^{1/2}(\rho_2)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_3-\rho_2)}\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\times$

$\times\left(Q^{1/2}(\rho_2)\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\right)+\dfrac{(\rho_2+\rho_1)Q^{1/2}(\rho_3)}{(\rho_2-\rho_3)(\rho_1-\rho_3)}\dfrac{\partial}{\partial\rho_3}\left(Q^{1/2}(\rho_3)\dfrac{\partial}{\partial\rho_3}\right),$

---

[2] Системы 4–9 объединены, поскольку для систем 5–9 соответствующие выражения либо совпадают с таковыми в 4, как в системах 5, 6, либо представляют их частные случаи. Это замечание относится также к системам 1–2, 17–27, 28–34.

$$X_3 = \frac{\rho_2\rho_3 Q^{1/2}(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_3-\rho_1)}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(Q^{1/2}(\rho_1)\frac{\partial}{\partial\rho_1}\right) + \frac{\rho_1\rho_3 Q^{1/2}(\rho_2)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\times$$

$$\times\left(Q^{1/2}(\rho_2)\frac{\partial}{\partial\rho_2}\right) + \frac{\rho_1\rho_2 Q^{1/2}(\rho_3)}{(\rho_2-\rho_3)(\rho_3-\rho_1)}\frac{\partial}{\partial\rho_3}\left(Q^{1/2}(\rho_3)\frac{\partial}{\partial\rho_3}\right),$$

$$Q(\rho)\equiv(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)(\rho-d).$$

Обозначения 1–34 соответствуют классификации Олевского [1]. Системы 1, 3, 10, 17, 18 и 28 относятся также к пространству постоянной положительной кривизны (дискретный спектр атома водорода).

4. Эллиптические координаты и группа движений пространства

Рассмотрим, например, операторы, соответствующие разделению переменных в волновом уравнении в трехмерном евклидовом пространстве. Как известно, в этом случае имеется одиннадцать систем координат, в которых переменные разделяются, состоящих из софокусных поверхностей второго порядка и их вырождений [3]. Оказывается, что операторы, соответствующие сохраняющимся величинам и имеющие определенные значения в состояниях, описываемых соответствующими системами собственных функций, являются квадратичными полиномами от генераторов группы движений евклидова пространства. В качестве примера приведем выражения для таких операторов в трех наиболее общих (т. е. нецилиндрических и не являющихся координатами вращения) системах координат, в которых разделяются переменные в волновом уравнении — конической, параболоидальной и эллипсоидальной. Полная сводка относящихся сюда результатов дана в [6]. **P** и **L** здесь — соответственно операторы импульса и момента количества движения.

I. Конические координаты:

$$X_2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \quad X_3 = b^2L_y^2 + c^2L_z^2.$$

II. Параболоидальные координаты:

$$X_2 = \frac{1}{4}L_z^2 + \frac{1}{2}b(L_xP_y + P_yL_x) - \frac{1}{2}c(L_yP_x + P_xL_y) - bcP_z^2 = \frac{1}{4}L_z^2 - bcP_z^2 + [\mathbf{LQ}]_z - [\mathbf{QL}]_z,$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}c\mathbf{P}_x + \frac{1}{2}b\mathbf{P}_y + \mathbf{P}_z,$$

$$X_3 = \frac{1}{2}[\mathbf{LP}]_z - \frac{1}{2}[\mathbf{PL}]_z - c\left(P_x^2 + P_z^2\right) - b\left(P_y^2 - P_z^2\right).$$

III. Эллипсоидальные координаты:

$$X_2 = b^2L_y^2 + c^2L_z^2 + b^2c^2P_x^2,$$

$$X_3 = -L_x^2 - L_y^2 - L_z^2 - \left(c^2 + b^2\right)P_x^2 - c^2P_y^2 - b^2P_z^2.$$

Литература

1. *Олевский М. П.* Матем. сб., **27**, 379, 1950.
2. *Fock V. A.* Zs. Phys., **98**, 145, 1935.
3. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики, **1**. ИИЛ, 1958.
4. *Винтерниц П., Смородинский Я. А., Углирж М.* Ядерная физика, **1**, 163, 1965.
5. *Переломов А. М., Попов В. С.* Препринт ИТЭФ, 1965.
6. *Смородинский Я. А., Тугов И. И.* Препринт ОИЯИ, Р-2307, 1965.

A Systematic Search for Nonrelativistic Systems with Dynamical Symmetries

PART I: The Integrals of Motion

A. A. MAKAROV*, J. A. SMOBODINSKY*, KH. VALIEV* AND P. WINTERNITZ**

1. Introduction

The importance of various types of symmetries in classical and quantum physics is generally acknowledged and this subject has been considered with renewed interest in the past few years (partly in connection with the symmetry approach to elementary-particle physics).

The original symmetries used in physics were geometrical symmetries connected with the properties of the usual space-time continuum. We shall be interested in a different type of symmetry — in so-called dynamic invariance groups, connected with specific types of interactions. Contrary to geometrical symmetries, which basically reflect the fact that physical processes do not depend on the place in space and time where they occur, dynamical symmetries just imply that certain physical laws, i. e. Lagrangians, matrix elements etc., are invariant with respect to the transformations of the corresponding group [1].

In this sense we call the well-known O_4 symmetry for the bound states of the hydrogen atom [2] or SU_3 symmetry of the harmonic oscillator [3] dynamical invariance groups. In this article we shall not consider spectrum-generating groups, i. e. dynamical noninvariance groups containing different energy levels in a single irreducible representation [4].

This paper is part of a systematic investigation, the aim of which is to find, with certain restrictions, all potentials allowing a dynamical (or higher) invariance group. Our approach will be in the framework of nonrelativistic quantum mechanics. Quantum mechanics is more convenient than classical physics for group-theoretical considerations, because the Hilbert space of wave functions is a natural space for realizing the representations of the corresponding symmetry groups. Indeed, in quantum mechanics the existence of a dynamical invariance group demonstrates itself by the «accidental» degeneracy of the energy levels of the system. This degeneracy is then described by the irreducible representations of the dynamical invariance group, the generators of which all commute with the Hamiltonian.

In classical mechanics the meaning of dynamical invariance groups is less straightforward. In a system with s degrees of freedom, $2s - 1$ integrals of motion always exist. Combining these integrals of motion and forming arbitrary functions of the integrals, closed algebras (with respect to the Poisson bracket operation) can be constructed for very general potentials [5] so that the existence of an algebra of integrals of motion has in itself little physical meaning. In our opinion, the existence of dynamical symmetries in classical mechanics is connected with the existence of closed paths (it was proved as early as 1873 by Bertrand [6] that the only centrally symmetrical potentials in which all finite paths

* Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, USSR.

** On leave of absence from Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, and Nuclear Research Institute, Czechoslovak Academy of Sciences, Řež.

are closed are the Coulomb potential and the harmonic oscillator, i. e. those which have a dynamical symmetry group). However, closed paths are related to unambiguous integrals of motion [7], i. e. those which are algebraic functions of the momenta. These are also just the expressions which go over into properly defined operators in quantum mechanics.

Mathematically the problem can be stated as follows. We are looking for all possible Hamiltonians of the type

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V(\mathbf{r}), \tag{1}$$

where Δ is the Laplace operator and $V(\mathbf{r})$ is an arbitrary function of the coordinates x_1, x_2, x_3 for which a set of operators L_i exists such that

$$[H, L_i] = 0 \tag{2}$$

and the operators L_i form a closed algebra

$$[L_i, L_k] = c_{ikl}L_l. \tag{3}$$

Formula (3) should either hold in general for the operators L_i or at least in the case when they operate on the eigenfunction of H corresponding to a single level.

We shall apply an approach which has been previously used to investigate higher symmetries in a two-dimensional model of quantum mechanics and which has proved quite powerful [8].

At this stage it is necessary to make some restrictions. We assume that the operators L_i can be developed into a power series with respect to the linear momenta p_i and shall restrict ourselves to terms that are no higher than second order in p_i. An investigation of higher-order operators will be performed separately. The results in the two-dimensional case indicate that most of the physically interesting potentials correspond to operators of the second order (the only known exception in the two-dimensional case is the anisotropic oscillator with the frequency ratio $\omega_1/\omega_2 = m/n$ where m, n are integers and $m + n > 3$).

Further, we shall limit ourselves to a search for semi-simple algebras of rank two or algebras containing such subalgebras. This means that at least two of the operators L_i, belong to the Cartan subalgebra, i. e. they commute.

This paper is devoted to the following problems. All potentials are found for which a pair of operators L_i commuting with H and with each other exists. These operators are found for each potential and are classified. Potentials for which further operators commuting with H exist are found: In the case when the potential $V(\mathbf{r})$ allows the separation of variables in the Schrödinger equation in spherical co-ordinates, all potentials are found for which three or four operators of the type L_i exist. The existence of three operators determines $V(\mathbf{r})$ up to an arbitrary function of one co-ordinate; four operators completely determine the functional form of the potential.

The potentials found will be investigated in a later publication.

2. Pairs of operators commuting with the Hamiltonian

Throughout the paper we shall use the notations

$$p_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad M_i \equiv \varepsilon_{ikl}x_k p_l, \tag{4}$$

$$\Delta \equiv p_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Here ε_{ikl} is the totally anti-symmetric tensor, a summation from 1 to 3 over repeated indices is to be understood.

2.1. Linear integrals of motion. Let us consider the operator

$$L = \varphi_k(\mathbf{r})p_k + \varphi_4(\mathbf{r}), \tag{5}$$

where $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ are arbitrary functions. We demand that L commute with the Hamiltonian (1), i. e.

$$[H, L] = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} p_i p_k - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_k}\right) p_k - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_i^2} + \varphi_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right) = 0.$$

Equating the coefficients, multiplying independent powers of p_i, to zero, we obtain the following systems of equations:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{(no summation)}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0, \quad i \neq k, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\Delta \varphi_k + \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_k} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\Delta \varphi_4 + \varphi_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0. \tag{9}$$

Equations (6)–(8) can be easily solved and they imply that the operator (5) can be written as

$$L = a_i M_i + b_i p_i + c, \tag{10}$$

where a, b_i and c are constants.

The potential V satisfies the equation

$$(-a_3 x_2 + a_2 x_3 + b_1)\frac{\partial V}{\partial x_1} + (-a_1 x_3 + a_3 x_1 + b_2)\frac{\partial V}{\partial x_2} + (-a_2 x_1 + a_1 x_2 + b_3)\frac{\partial V}{\partial x_3} = 0. \tag{11}$$

This can of course be easily solved directly; however, we prefer to simplify the operator (10) and eq. (11) by means of a co-ordinate transformation. We introduce the new co-ordinates x_i':

$$x_i' = \alpha_{ik} x_k + \beta_i \tag{12}$$

with $\alpha_{ik}\alpha_{il} = \delta$ (and set $c = 0$).

Under the transformations (12) the operator L goes over into

$$L' = a_i \alpha_{ik} M_k + (a_i \varepsilon_{ilm} \alpha_{mk} \beta_l + b_i \alpha_{ik}) p_k. \tag{13}$$

The operator L' can be simplified to the form

$$L = a M_1 + b p_1 \tag{14}$$

by a correct choice of the rotation and translation parameters α_{ik}, β_i (the proof is straightforward but rather cumbersome and we shall omit it). The coefficients a and b are related to the a_i and b_i in (10) by

$$a_i^2 = a^2, \quad a_i b_i = ab. \tag{15}$$

We are interested in the case when two commuting operators of the type (10) exist. One of them can always be taken in the form (10), the second one must be kept general. Thus

$$L_1 = a M_1 + b p_1, \quad L_2 = g_i M_i + f_i p_i. \tag{16}$$

The condition

$$[L_1, L_2] = 0$$

further reduces the general case to three simple possibilities:

i) $a \neq 0$, $g_1 \neq 0$ implies that $g_2 = g_3 = f_2 = f_3 = 0$.

Thus two independent operators, commuting with the Hamiltonian and each other, can be chosen as

$$L_1 = p_1, \quad L_2 = M_1, \tag{17}$$

and (11) implies that

$$V(\mathbf{r}) = V\left(x_2^2 + x_3^2\right). \tag{18}$$

ii) $a = 0$, $g_1 \neq 0$ imply that $g_2 = g_3 = 0$.

Performing a further translation and rotation and taking a linear combination of the obtained operators, we have

$$L_1 = p_1, \quad L_2 = M_1 + bp_2, \quad b \neq 0, \tag{19}$$

so that

$$V(\mathbf{r}) = V(x_2^2 + (x_3 - b)^2). \tag{20}$$

iii) $a = 0$, $g_1 = 0$ imply $g_2 = g_3 = 0$.

In this case the commuting operators can be reduced to

$$L_1 = p_1, \quad L_2 = p_2, \tag{21}$$

so that

$$V(\mathbf{r}) = V(x_3).$$

2.2. Quadratic integrals of motion. Let us consider the operator

$$L = \varphi_{ik}(\mathbf{r})p_i p_k + f_i(\mathbf{r})p_i + g(\mathbf{r}), \quad \varphi_{ik} = \varphi_{ki}, \tag{22}$$

where φ_{ik}, f_i and g are arbitrary functions of x_1, x_2, x_3. The condition $[H, L] = 0$ again provides us with a system of differential equations:

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_m} p_m p_i p_k = 0, \tag{23}$$

$$\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi_{ik} + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)p_i p_k = 0, \tag{24}$$

$$\left(\frac{1}{2}\Delta f_i + \frac{\partial g}{\partial x_i} + 2\varphi_{ik}\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)p_i = 0, \tag{25}$$

$$\frac{1}{2}\Delta g + \varphi_{ik}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_k} + f_k\frac{\partial V}{\partial x_k} = 0. \tag{26}$$

Actually, (23) implies ten equations, (21) six, (25) three, and (26) is a single equation.

If we write eqs. (23) and (24) down explicitly and solve them, after some calculations we obtain

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= a_{33}x_2^2 + a_{22}x_3^2 - 2a_{23}x_2x_3 - 2b_{13}x_2 + 2b_{12}x_3 + c_{11},\\
\varphi_{22} &= a_{11}x_3^2 + a_{33}x_1^2 - 2a_{31}x_3x_1 - 2b_{21}x_3 + 2b_{23}x_1 + c_{22},\\
\varphi_{33} &= a_{22}x_1^2 + a_{11}x_2^2 - 2a_{12}x_1x_2 - 2b_{32}x_1 + 2b_{31}x_2 + c_{33},\\
\varphi_{12} &= -a_{12}x_3^2 - a_{33}x_1x_2 + a_{31}x_2x_3 + a_{23}x_3x_1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + (b_{22} - b_{11})x_3 + c_{12},\\
\varphi_{23} &= -a_{23}x_1^2 - a_{11}x_2x_3 + a_{12}x_3x_1 + a_{31}x_1x_2 + b_{21}x_2 - b_{31}x_3 + (b_{33} - b_{22})x_1 + c_{23},\\
\varphi_{31} &= -a_{31}x_2^2 - a_{22}x_3x_1 + a_{23}x_1x_2 + a_{12}x_2x_3 + b_{32}x_3 - b_{12}x_1 + (b_{11} - b_{33})x_2 + c_{31},
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= -(a_{22}+a_{33})x_1 + a_{12}x_2 + a_{31}x_3 - b_{23} + b_{32} + \alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2 + \beta_1, \\ f_2 &= -(a_{33}+a_{11})x_2 + a_{23}x_3 + a_{12}x_1 - b_{31} + b_{13} + \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 + \beta_2, \\ f_3 &= -(a_{11}+a_{22})x_3 + a_{31}x_1 + a_{23}x_2 - b_{12} + b_{21} + \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 + \beta_3. \end{aligned} \tag{28}$$

In general the equations (25) and (20) for the potential are not consistent. The consistency condition for them is

$$\left(\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_i} - f_k\right)\frac{\partial V}{\partial x_k} = 0 \tag{29}$$

(we have used the fact that according to (28) $\Delta f_i = 0$). Substituting (27) and (28) into (29) we obtain

$$(\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2 + \beta_1)\frac{\partial V}{\partial x_1} + (\alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 + \beta_2)\frac{\partial V}{\partial x_2} + (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 + \beta_3)\frac{\partial V}{\partial x_3} = 0. \tag{30}$$

Thus there are two possibilities:

i) The potential V is a solution of (30). This means that the quantity

$$L' = \alpha_i M_i + \beta_i p_i$$

commutes with the Hamiltonian and the problem reduces to that considered in the previous Section (a linear integral of motion).

ii) Equation (30) is satisfied trivially, i. e.

$$\alpha_i = \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

This means that the considered operator L can be written as a symmetric bilinear polynomial in the generators of the group of motions of the three-dimensional Euclidean group E, i. e. of the symmetry group of the free Schrödinger equation (the Helmholtz equation). Explicitly

$$L = a_{ik}M_iM_k + b_{ik}(p_iM_k + M_kp_i) + c_{ik}p_ip_k + g(\mathbf{r}), \tag{31}$$

where $a_{ik} = a_{ki}$, $c_{ik} = c_{ki}$ and the functions $g(\mathbf{r})$ and the potential $V(\mathbf{r})$ satisfy the equations

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} + 2\varphi_{ik}\frac{\partial V}{\partial x_k} = 0 \tag{32}$$

with φ_{ik} determined by (27). Equation (26) is satisfied identically in view of (29). In general the three eqs. (32) are not consistent. Three consistency conditions can be obtained by differentiating eqs. (32) with respect to x_k and eliminating the derivatives of $g(\mathbf{r})$. This gives three second-order partial differential equations for the potential $V(\mathbf{r})$ which we shall not write explicitly here.

Since we are searching for second-rank (or higher) algebras, we must have a pair of commuting operators of the type (31). In the following Section we shall consider how such a pair L_1, L_2 can be simplified by rotations and translations of the co-ordinate system and by transformations of the type

$$L' = \mu L_1 + \nu L_2 + \lambda H. \tag{33}$$

A similar classification of polynomials, quadratic in the generators of the groups O_3, $O_{2,1}$ and E_2 has been performed in [9].

3. Classification of pairs of quadratic integrals

Let us consider the pair of operators

$$\begin{aligned} L_1 &= a_{rs}M_rM_s + b_{rs}(p_rM_s + M_sp_r) + c_{rs}p_rp_s + g_1(\mathbf{r}), \\ L_2 &= \alpha_{ik}M_iM_k + \beta_{ik}(p_iM_k + M_kp_i) + \gamma_{ik}p_ip_k + g_2(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{34}$$

We introduce a new co-ordinate system

$$x_i' = A_{ik}x_k + B_i, \quad A_{ik}A_{il} = \delta_{kl}. \tag{35}$$

The operator L_1 is thus transformed into

$$L_1' = a'_{mn}M_mM_n + b'_{mn}(p_mM_n + M_np_m) + c'_{mn}p_mp_n + g_1'$$

with

$$\begin{aligned} a'_{mn} &= a_{ik}A_{im}A_{kn}, \\ b'_{mn} &= a_{ik}D_{im}A_{kn} + b_{ik}A_{im}A_{kn}, \\ c'_{mn} &= a_{ik}D_{im}D_{kn} + b_{ik}(A_{im}D_{kn} + A_{in}D_{km}) + c_{ik}A_{im}A_{kn} \end{aligned} \tag{36}$$

and

$$D_{ik} = \varepsilon_{ilm}B_lA_{mk},$$

and analogous formulae hold for L_2.

We can use the rotations A_{ik} to diagonalize a_{rs}, i.e. we can put $a_{rs} = a_r\delta_{rs}$. The relation

$$[L_1, L_2] = 0 \tag{37}$$

in which we separate the terms proportional to $M_iM_kM_l$, implies that $\alpha_i = 0$ is also diagonal: $\alpha_{ik} = \alpha_i\delta_{ik}$. In particular we can of course have $\alpha_i = 0$ or $a_r = 0$ (or both).

The next step is to consider other terms in the commutator (37), remembering that $a_{rs} = a_r\delta_{rs}$, $\alpha_{ik} = \alpha_i\delta_{ik}$ (no summation). Equating terms proportional to $M_iM_kp_l$ to zero gives the system

$$\begin{aligned} &a_1\beta_{31} - \alpha_1b_{31} = 0, \\ &a_1\beta_{21} - \alpha_1b_{21} = 0, \\ &a_1(-\beta_{22} + \beta_{33}) - \alpha_1(-b_{22} + b_{33}) = 0, \\ &(a_1 - a_2)(\beta_{13} + \beta_{31}) - (\alpha_1 - \alpha_2)(b_{13} + b_{31}) = 0, \\ &(a_1 - a_2)(\beta_{23} + \beta_{32}) - (\alpha_1 - \alpha_2)(b_{23} + b_{32}) = 0, \end{aligned} \tag{A}$$

to which all equations obtained by a cyclic permutation of the indices must be added.

The coefficients of $M_ip_kp_l$ give the system

$$\begin{aligned} &(b_{12}+b_{21})\beta_{13} - (b_{31}+b_{13})\beta_{12} - b_{13}\beta_{21} - b_{12}\beta_{31} = 0, \\ &-a_1\gamma_{31} + \alpha_1c_{31} + (-b_{11}+b_{22})(\beta_{13}+\beta_{31}) + (b_{13}+b_{31})(\beta_{11}-\beta_{22}) + \\ &\qquad + (b_{12}+b_{21})\beta_{23} - b_{23}(\beta_{12}+\beta_{21}) = 0, \\ &-a_1\gamma_{12} + \alpha_1c_{12} + (-b_{11}+b_{33})(\beta_{12}+\beta_{21}) + (b_{12}+b_{21})(\beta_{11}-\beta_{33}) + \\ &\qquad + (b_{13}+b_{31})\beta_{32} - b_{32}(\beta_{13}+\beta_{31}) = 0, \\ &-a_1\gamma_{23} + \alpha_1c_{23} + (-b_{11}+b_{22})\beta_{23} - b_{21}\beta_{31} + b_{31}\beta_{21} + b_{23}(\beta_{11}-\beta_{22}) = 0, \\ &b_{11}(\beta_{32}-\beta_{23}) + b_{22}\beta_{23} - b_{33}\beta_{32} - 2b_{21}\beta_{31} + 2b_{31}\beta_{21} + (b_{23}-b_{32})\beta_{11} - b_{23}\beta_{22} + \beta_{32}\beta_{33} = 0, \\ &a_1(\gamma_{22}-\gamma_{33}) - \alpha_1(c_{22}-c_{33}) + b_{11}(\beta_{22}-\beta_{33}) + b_{22}(\beta_{33}-\beta_{11}) + \\ &\qquad + b_{33}(\beta_{11}-\beta_{22}) + b_{32}\beta_{23} - b_{23}\beta_{32} = 0, \\ &+ \text{all cyclic permutations.} \end{aligned} \tag{B}$$

The coefficients of $p_i p_k p_l$ give

$$\begin{aligned}
&b_{12}\gamma_{31} - b_{13}\gamma_{12} - \beta_{12}c_{31} + \beta_{13}c_{12} = 0,\\
&(-b_{11} + b_{22})\gamma_{31} + b_{13}(\gamma_{11} - \gamma_{22}) + b_{12}\gamma_{23} - b_{23}\gamma_{12} +\\
&\qquad + (\beta_{11} - \beta_{22})c_{31} - \beta_{13}(c_{11} - c_{22}) - \beta_{12}c_{23} + \beta_{23}c_{12} = 0,\\
&b_{12}(-\gamma_{11} + \gamma_{33}) + (b_{11} - b_{33})\gamma_{12} - b_{13}\gamma_{23} + b_{32}\gamma_{31} +\\
&\qquad + (-\beta_{11} + \beta_{33})c_{12} + \beta_{12}(c_{11} - c_{33}) + \beta_{13}c_{23} - \beta_{32}c_{31} = 0, \qquad\qquad \text{(C)}\\
&b_{11}(\gamma_{22} - \gamma_{33}) + b_{22}(-\gamma_{11} + \gamma_{33}) + b_{33}(\gamma_{11} - \gamma_{22}) + (b_{21} - b_{12})\gamma_{12} +\\
&\qquad + (b_{13} - b_{31})\gamma_{31} + (b_{32} - b_{23})\gamma_{23} - \beta_{11}(c_{22} - c_{33}) - \beta_{22}(-c_{11} + c_{33}) -\\
&\qquad - \beta_{33}(c_{11} - c_{22}) - (\beta_{21} - \beta_{12})c_{12} - (\beta_{13} - \beta_{31})c_{31} - (\beta_{32} - \beta_{23})c_{23} = 0,
\end{aligned}$$

+ all cyclic permutations.

On the other hand, eq. (37) for the operators L_1 and L_2 in the form (22) implies

$$\overset{1}{\varphi}_{ik}\frac{\partial g_2}{\partial x_k} - \overset{2}{\varphi}_{ik}\frac{\partial g_1}{\partial x_k} = 0. \tag{38}$$

In view of (32) for both operators we have

$$(\overset{1}{\varphi}_{ik}\overset{2}{\varphi}_{kr} - \overset{2}{\varphi}_{ik}\overset{1}{\varphi}_{kr})\frac{\partial V}{\partial x_r} = 0. \tag{39}$$

Thus the potential V either satisfies three first-order equations — a case which will be considered separately — or the consistency conditions (39) are satisfied trivially, i. e.

$$\overset{1}{\varphi}_{ik}\overset{2}{\varphi}_{kr} - \overset{2}{\varphi}_{ik}\overset{1}{\varphi}_{kr} = 0. \tag{40}$$

Expressing $\overset{1}{\varphi}_{ik}$ and $\overset{2}{\varphi}_{ik}$ in terms of the coefficients a_{rs}, b_{rs}, c_{rs} and α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} respectively, we obtain new sets of equations:

$$\begin{aligned}
&a_1(\beta_{22} - \beta_{11}) - \alpha_1(b_{22} - b_{11}) = 0,\\
&a_1(\beta_{33} - \beta_{11}) - \alpha_1(b_{33} - b_{11}) = 0,
\end{aligned} \qquad \text{(A}'\text{)}$$

$$\begin{aligned}
&b_{21}(\beta_{11} - \beta_{33}) - \beta_{21}(b_{11} - b_{33}) - 2b_{13}\beta_{23} + 2b_{23}\beta_{13} - a_3\gamma_{12} + \alpha_3 c_{12} = 0,\\
&b_{12}(\beta_{33} - \beta_{22}) - \beta_{12}(b_{33} - b_{22}) - 2b_{13}\beta_{23} + 2b_{23}\beta_{13} + a_3\gamma_{12} - \alpha_3 c_{12} = 0,\\
&2b_{13}(\beta_{22} - \beta_{11}) - 2\beta_{13}(b_{22} - b_{11}) - 2b_{23}(\beta_{12} + \beta_{21}) + 2\beta_{23}(b_{21} + b_{12}) -\\
&\qquad - b_{31}(\beta_{11} - \beta_{33}) + \beta_{31}(b_{11} - b_{33}) - b_{32}\beta_{21} - b_{21}\beta_{32} - a_1\gamma_{13} + \alpha_1 c_{13} = 0,\\
&2b_{31}(\beta_{33} - \beta_{22}) - 2\beta_{31}(b_{33} - b_{22}) + 2b_{21}(\beta_{23} + \beta_{32}) - 2\beta_{21}(b_{23} + b_{32}) -\\
&\qquad - b_{13}(\beta_{11} - \beta_{33}) + \beta_{13}(b_{11} - b_{33}) - b_{23}\beta_{12} + b_{12}\beta_{23} + a_3\gamma_{13} - \alpha_3 c_{13} = 0, \qquad \text{(B}'\text{)}\\
&2b_{12}(\beta_{22} - \beta_{11}) - 2\beta_{12}(b_{22} - b_{11}) + 2b_{21}(\beta_{22} - \beta_{11}) - 2\beta_{21}(b_{22} - b_{11}) -\\
&\qquad - b_{32}\beta_{31} + b_{31}\beta_{32} + (a_2 - a_1)\gamma_{12} - (\alpha_2 - \alpha_1)c_{12} = 0,\\
&- \beta_{33}(b_{22} - b_{11}) + b_{33}(\beta_{22} - \beta_{11}) + b_{22}\beta_{11} - b_{11}\beta_{22} - b_{23}\beta_{32} +\\
&\qquad + b_{32}\beta_{23} + a_1(\gamma_{22} - \gamma_{33}) - \alpha_1(c_{22} - c_{33}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&b_{13}(\gamma_{22}-\gamma_{11})+\gamma_{13}(b_{22}-b_{33})-b_{12}\gamma_{23}-2b_{23}\gamma_{12}-\beta_{13}(c_{22}-c_{11})-\\&\quad-c_{13}(\beta_{22}-\beta_{33})+\beta_{12}c_{23}+2\beta_{23}c_{12}=0,\\&b_{23}(\gamma_{11}-\gamma_{22})+\gamma_{23}(b_{11}-b_{33})-b_{21}\gamma_{31}-2b_{13}\gamma_{12}-\beta_{23}(c_{11}-c_{22})-\\&\quad-c_{23}(\beta_{11}-\beta_{33})+\beta_{21}c_{13}+2\beta_{13}c_{12}=0,\\&(b_{22}-b_{11})(\gamma_{22}-\gamma_{11})+2\gamma_{12}(b_{12}+b_{21})+b_{32}\gamma_{23}+b_{31}\gamma_{13}-\\&\quad-(\beta_{22}-\beta_{11})(c_{22}-c_{11})-2c_{12}(\beta_{12}+\beta_{21})-\beta_{32}c_{23}-\beta_{31}c_{13}=0,\end{aligned}\tag{C'}$$

$$\begin{aligned}&c_{11}\gamma_{12}+c_{12}\gamma_{22}+c_{13}\gamma_{23}-c_{12}\gamma_{11}-c_{22}\gamma_{12}-c_{23}\gamma_{13}=0\\&(+\text{ all cyclic permutations}).\end{aligned}\tag{D'}$$

The systems (A), (B), (C), (A'), (B'), (C') and (D'), together with all their cyclic permutations can be solved, and we thus obtain the following possibilities.

I) $a \not\equiv 0$, $\alpha \not\equiv 0$ (by this we mean that at least one component of a_{rs} and one of α_{ik} is nonzero).

In this case all the coefficients in L_1 and L_2 can be expressed in terms of five parameters, e.g., α_2, b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_{11} with $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$. With the help of simple rotations and translations we obtain

$$\begin{aligned}&L_1 = M^2 + \beta(\alpha+1)p_1^2 + \beta p_2^2 + \alpha\beta p_3^2 + g_1(\mathbf{r}),\\&L_2 = M_3^2 + \alpha M_2^2 + \alpha\beta p_1^2 + g_2(\mathbf{r}),\\&\quad(M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2)\end{aligned}\tag{41}$$

(the «invariants» α and β can be expressed in terms of the original coefficients, but we shall not write these complicated formulae here). Now let us specify the operators (41).

i) $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
Put $\alpha\beta = b^2$, $\beta = c^2$,

$$\begin{aligned}&L_1 = M^2 + (b^2+c^2)p_1^2 + c^2p_2^2 + b^2p_3^2 + g_1,\\&L_2 = M_3^2 + \frac{b^2}{c^2}M_2^2 + b^2p_1^2 + g_2.\end{aligned}\tag{41a}$$

ii) $\alpha > 0$, $\beta = 0$, $\alpha = b^2/c^2$.

$$\begin{aligned}&L_1 = M^2 + g_1,\\&L_2 = M_3^2 + \frac{b^2}{c^2}M_2^2 + g_2.\end{aligned}\tag{41b}$$

iii) $\alpha > 0$, $\beta < 0$.

a) $0 < \alpha < 1$.

The operators

$$\begin{aligned}&L_1' = L_1 - 2\beta H,\\&L_2' = \frac{1}{1-\alpha}(L_1 - L_2 - \beta H)\end{aligned}$$

are transformed into (41a) by a cyclic permutation.

b) $\alpha > 1$.

The operators

$$L_1' = L_1 - 2\alpha\beta H,$$
$$L_2' = L_1 - \frac{1}{\alpha} L_2 - \alpha\beta H$$

are transformed into (41a) by a cyclic permutation.

c) $\alpha = 1$.

Introducing

$$L_1' = L_1 - 2\beta H = M^2 - \beta(p_2^2 + p_3^2) + g_1,$$
$$L_2' = L_1 - L_2 - \beta H = M_1^2 + g_2,$$

putting $\beta = -a^2$ and cycling the indices, we obtain

$$L_1 = M^2 + a^2(p_1^2 + p_2^2) + g_1, \quad L_2 = M_3^2 + g_2. \tag{41c}$$

iv) $\alpha = 0,\ \beta > 0$.

Putting $\beta = a^2$ we again obtain (41c).

v) $\alpha = 0,\ \beta = 0$.

$$L_1 = M^2 + g_1, \quad L_2 = M_3^2 + g_2. \tag{41d}$$

iv) $\alpha = 0,\ \beta < 0$.

Putting $\beta = -a^2$ we have

$$L_1 = M^2 - a^2(p_1^2 + p_2^2) + g_1, \quad L_2 = M_3^2 + g_2. \tag{41e}$$

vii) $\alpha < 0,\ \beta > 0$.

The operators $L_1' = L_1 - 2\alpha\beta H$ and $L_2' = L_1 - (1/\alpha)L_2 - \alpha\beta H$ are just (41a).

viii) $\alpha < 0,\ \beta = 0$.

The operators L_1 and $L_2' = L_1 - L_2$ after a cycling of the indices are just (41b).

The operators $L_1' = L_1 - 2\beta H$ and $L_2' = (1/(1-\alpha))(L_1 - L_2 - \beta H)$, after a cycling of the indices, are (41a).

II) $a \not\equiv 0,\ \alpha \equiv 0,\ \beta \not\equiv 0$.

All coefficients in L_1 and L_2 can be expressed in terms of the 8 parameters a_1, β_{23}, b_{22}, b_{21}, b_{31}, b_{23}, b_{32}, γ_{22}. We shall omit the details here and only state the results.

i) If $b_{22} \neq 0$, then by means of rotations and translations and by taking suitable linear combinations of L_1, L_2 and H we obtain

$$L_1 = M_3^2 + 2b(M_1p_2 + p_2M_1) - 2c(M_2p_1 + p_1M_2) - 4bcp_3^2 + g_1,$$
$$L_2 = M_1p_2 + p_2M_1 - M_2p_1 - p_1M_2 - 2c(p_1^2 + p_2^2) - 2b(p_2^2 + p_3^2) + g_2. \tag{42a}$$

ii) If $b_{22} = 0$, we obtain

$$L_1 = M_1 p_2 + p_2 M_1 - M_2 p_1 - p_1 M_2 + g_1, \quad L_2 = M_3^2 + g_2. \tag{42b}$$

Note that L_1 is the third component of the vector $\mathbf{L} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{L}$, which is just the velocity-dependent part of the Laplace—Lenz operator, conserved in the Coulomb potential field.

III) $a \not\equiv 0$, $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 0$.

All coefficients in L_1, L_2 can be expressed in terms of b_{31}, b_{21}, c_{23}, c_{11}, c_{22} and c_{33}. As in the previous cases, the general expression can be much simplified and gives

$$L_1 = M_3^2 + a^2 p_1^2 + g_1, \quad L_2 = p_3^2 + g_2. \tag{43a}$$

In particular, if $a = 0$ we have

$$L_1 = M_3^2 + g_1, \quad L_2 = p_3^2 + g_2. \tag{43b}$$

IV) $a \equiv \alpha \equiv b \equiv 0$, $\beta \not\equiv 0$.

All coefficients can be expressed in terms of β_{31}, β_{21}, γ_{23}, γ_{11}, γ_{22}, c_{11} and the operators L_1, L_2 can always be reduced to

$$L_1 = M_3 p_2 + p_2 M_3 + g_1, \quad L_2 = p_3^2 + g_2. \tag{44}$$

V) $a \equiv \alpha \equiv b \equiv \beta \equiv 0$.

Operators L_1, L_2 can be written as

$$L_1 = p_1^2 + g_1, \quad L_2 = p_2^2 + g_2. \tag{45}$$

Thus we see that the two commuting operators (34) can always be simplified to one of the 11 listed possibilities. If we put $g_1 = g_2 = 0$ we obtain precisely the 11 pairs of operators discussed in [10], the diagonalization of which leads to the separation of variables in the free Schrödinger equation (with $V(\mathbf{r}) \equiv 0$) in one of the 11 systems in which the variables do separate.

The next is to find the potential V and the functions g_1 and g_2. We know that they satisfy the equations

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + 2\varphi_{ik}^1 \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + 2\varphi_{ik}^2 \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0. \tag{46}$$

We must now consider the 11 cases given by eqs. (41)–(45).

Let us start with the simplest case, (45). We have $\varphi_{11}^1 = 1$, $\varphi_{22}^2 = 1$ and all other $\varphi_{ik}^\alpha = 0$, $(\alpha = 1, 2)$ so that the system (46) reduces to

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + 2\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_3} = 0,$$
$$\frac{\partial g_2}{x_1} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + 2\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_3} = 0.$$

This implies that

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_2\,\partial x_3} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_3\,\partial x_1} = 0,$$

so that we have

$$V(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1) + \beta(x_2) + \gamma(x_3)$$

and $g_1 = -2\alpha(x_1)$, $g_2 = -2\beta(x_2)$.

In other words the pair of operators (45) commute with the Hamiltonian if and only if the potential $V(x_1, x_2, x_3)$ allows the separation of variables in the rectangular co-ordinate system.

The method is exactly the same for all other types of operators. In each case we must specify the quantities φ^1_{ik} and φ^2_{ik}, substitute them into (40) and obtain differential equations for g_1, g_2 and V. The functions g_1 and g_2 can always be excluded so that three second-order equations are obtained for $V(x_1, x_2, x_3)$. The best way to solve these equations is to transform them into the corresponding correct co-ordinate system, i. e. into the co-ordinate system determined by the operators L_1 and L_2 with $g_1 = g_2 = 0$. After this transformation the equations can be solved directly.

In all cases the result is: the pair of operators $L_1 = L_1^0 + g_1$, $L_2 = L_2^0 + g_2$ commutes with the Hamiltonian $H = -{}^1\!/\!_2\Delta + V(\mathbf{r})$ if the potential $V(\mathbf{r})$ allows the separation of variables in the curvilinear co-ordinate system determined by the operators L_1^0, L_2^0.

We shall not go into the details of the calculations, which are quite cumbersome (especially the transformation to curvilinear co-ordinates) and shall only give the results, obtained by solving all the equations in each special case.

I) *Rectangular co-ordinates*: x_1, x_2, x_3.

$$V = f(x_1) + g(x_2) + h(x_3),$$
$$L_1 = p_1^2 - 2f(x_1),$$
$$L_2 = p_2^2 - 2g(x_2).$$

Here and in the following, f, g and h are arbitrary functions.

II) *Circular cylindrical co-ordinates*:

$$x_1 = \varrho\cos\alpha, \quad x_2 = \varrho\sin\alpha, \quad x_3 = z.$$
$$V = f(\varrho) + \frac{1}{\varrho^2}\,g(\alpha) + h(z),$$
$$L_1 = M_3^2 - 2g(\alpha),$$
$$L_2 = p_3^2 - 2h(z).$$

III) *Elliptic cylindrical co-ordinates*:

$$x_1 = a\,\mathrm{ch}\,\mu\cos\alpha, \quad x_2 = a\,\mathrm{sh}\,\mu\sin\alpha, \quad x_3 = z.$$
$$V = \frac{f(\mathrm{ch}\,\mu) + g(\cos\alpha)}{\mathrm{ch}^2\mu - \cos^2\alpha} + h(z),$$
$$L_1 = M_3^2 + a^2p_1^2 - 2a^2\frac{f(\mathrm{ch}\,\mu)\cos^2\alpha - g(\cos\alpha)\,\mathrm{ch}^2\mu}{\mathrm{ch}^2\mu - \cos^2\alpha},$$
$$L_2 = p_3^2 - 2h(z).$$

IV) *Parabolic cylindrical co-ordinates*:

$$x_1 = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2), \quad x_2 = \mu\nu, \quad x_3 = z.$$

$$V = \frac{f(\mu) + g(\nu)}{\mu^2 + \nu^2} + h(z),$$

$$L_1 = M_3 p_2 + p_2 M_3 + 2\frac{f(\mu)\nu^2 - g(\nu)\mu^2}{\mu^2 + \nu^2},$$

$$L_2 = p_3^2 - 2h(z).$$

V) *Spherical co-ordinates*:

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

$$V = f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\varphi),$$

$$L_1 = M^2 - 2\left(g(\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}h(\varphi)\right),$$

$$L_2 = M_3^2 - 2h(\varphi), \quad M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

VI) *Prolate spheroidal co-ordinates*:

$$x_1 = a\,\mathrm{sh}\,\eta\sin\alpha\cos\varphi, \quad x_2 = a\,\mathrm{sh}\,\eta\sin\alpha\sin\varphi, \quad x_3 = a\,\mathrm{ch}\,\eta\cos\alpha.$$

$$V = \frac{f(\mathrm{ch}\,\eta) + g(\cos\alpha)}{\mathrm{sh}^2\eta + \sin^2\alpha} + \frac{h(\varphi)}{\mathrm{sh}^2\eta\sin^2\alpha},$$

$$L_1 = M^2 - a^2(p_1^2 + p_2^2) - 2a^2\left[\frac{g(\cos\alpha)\,\mathrm{sh}^2\eta - f(\mathrm{ch}\,\eta)\sin^2\alpha}{\mathrm{sh}^2\eta + \sin^2\alpha} + \frac{\mathrm{sh}^2\eta - \sin^2\alpha}{\mathrm{sh}^2\eta\sin^2\alpha}h(\varphi)\right],$$

$$L_2 = M_3^2 - 2h(\varphi).$$

VII) *Oblate spheroidal co-ordinates*:

$$x_1 = a\,\mathrm{ch}\,\eta\sin\alpha\cos\varphi, \quad x_2 = a\,\mathrm{ch}\,\eta\sin\alpha\sin\varphi, \quad x_3 = a\,\mathrm{sh}\,\eta\cos\alpha.$$

$$V = \frac{f(\mathrm{sh}\,\eta) + g(\cos\alpha)}{\mathrm{ch}^2\eta - \sin^2\alpha} + \frac{h(\varphi)}{\mathrm{ch}^2\eta\sin^2\alpha},$$

$$L_1 = M^2 + a^2(p_1^2 + p_2^2) - 2a^2\left[\frac{f(\mathrm{sh}\,\eta)\sin^2\alpha + g(\cos\alpha)\,\mathrm{ch}^2\eta}{\mathrm{ch}^2\eta - \sin^2\alpha} + \frac{\mathrm{ch}^2\eta + \sin^2\alpha}{\mathrm{ch}^2\eta\sin^2\alpha}h(\varphi)\right],$$

$$L_2 = M_3^2 - 2h(\varphi).$$

VIII) *Parabolic rotational co-ordinates*:

$$x_1 = \mu\nu\cos\varphi, \quad x_2 = \mu\nu\sin\varphi, \quad x_3 = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2).$$

$$V = \frac{f(\mu) + g(\nu)}{\mu^2 + \nu^2} + \frac{h(\varphi)}{\mu^2\nu^2},$$

$$L_1 = M_1 p_2 + p_2 M_1 - p_1 M_2 - M_2 p_1 + 2\left[\frac{f(\mu)\nu^2 - g(\nu)\mu^2}{\mu^2 + \nu^2} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2\nu^2}h(\varphi)\right],$$

$$L_2 = M_3^2 - 2h(\varphi).$$

IX) *Conical co-ordinates*:

$$x_1^2 = \frac{r^2(\Theta^2 - b^2)(b^2 - \lambda^2)}{b^2(c^2 - b^2)}, \quad x_2^2 = \frac{r^2(c^2 - \Theta^2)(c^2\lambda^2)}{c^2(c^2 - b^2)}, \quad x_3^2 = \frac{r^2\Theta^2\lambda^2}{b^2c^2}.$$

$$V = f(r) + \frac{g(\Theta) + h(\lambda)}{r^2(\Theta^2 - \lambda^2)},$$

$$L_1 = M^2 - 2\frac{g(\Theta) + h(\lambda)}{\Theta^2 - \lambda^2},$$

$$L_2 = b^2M_1^2 + c^2M_2^2 - 2\frac{\lambda^2 g(\Theta) + \Theta^2 h(\lambda)}{\Theta^2 - \lambda^2}.$$

X) *Ellipsoidal co-ordinates*:

$$x_1^2 = \frac{(s + a^2)(t - a^2)(u - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)}, \quad x_2^2 = \frac{(s - b^2)(t - b^2)(u - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)}, \quad x_3^2 = \frac{stu}{a^2b_2}.$$

$$s > b^2 > t > a^2 > u > 0,$$

$$V = \frac{(t - u)f(s) + (u - s)g(t) + (s - t)h(u)}{(s - t)(t - u)(u - s)},$$

$$L_1 = b^2L_1^2 + c^2L_2^2 + b^2c^2p_3^2 - 2\frac{tu(t - u)f(s) + us(u - s)g(t) + st(s - t)h(u)}{(s - t)(t - u)(u - s)},$$

$$L_2 = M^2 + b^2p_1^2 + a^2p_2^2 + (a^2 + b^2)p_3^2 - 2\frac{(t^2 - u^2)f(s) + (u^2 - s^2)g(t) + (s^2 - t^2)h(u)}{(s - t)(t - u)(u - s)}.$$

XI) *Paraboloidal co-ordinates*:

$$x_1 = \frac{(\mu - a)(\nu - a)(\lambda - a)}{a - b}, \quad x_2 = \frac{(\mu - b)(\nu - b)(\lambda - b)}{b - a}, \quad x_3 = \frac{1}{2}(\mu + \nu + \lambda - a - b).$$

$$\mu > b > \lambda > a > \nu > 0,$$

$$V = \frac{(\nu - \lambda)f(\mu) + (\lambda - \mu)g(\nu) + (\mu - \nu)h(\lambda)}{(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)},$$

$$L_1 = M_3^2 - abp_3^2 + a(M_1p_2 + p_2M_1) - b(M_2p_1 + p_1M_2) + \\ + 8\frac{(\nu - \lambda)\nu\lambda f(\mu) + (\lambda - \mu)\lambda\mu g(\nu) + (\mu - \nu)\mu\nu h(\lambda)}{(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \nu)},$$

$$L_2 = -b(p_1^2 + p_2^2) - a(p_2^2 + p_3^2) + (M_1p_2 + p_2M_1 - p_1M_2 - M_2p_1) + \\ + 8\frac{(\nu^2 - \lambda^2)f(\mu) + (\lambda^2 - \mu^2)g(\nu) + (\mu^2 - \nu^2)h(\lambda)}{(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)}.$$

The potentials allowing separation of variables in the Schrödinger equation are of course not new (they have been originally found in [11] more directly). However, we have proved that two operators, quadratic in the linear momenta, commuting with each other and with the Hamiltonian, can exist if and only if the potential allows the separation of variables in one of the 11 considered systems. Further, we have found the integrals of motion. In general, the operators L_1, L_2 need not have one of the 11 «canonical» forms we have found but any form that can be obtained from them by rotations, translations and linear combinations

of L_1, L_2 and H. In this case the potential V will allow separation in the same type of curvilinear co-ordinate system, which will however be connected with the rectangular system obtained from the «canonical» one by the corresponding rotations and translations.

Since our aim is to construct an algebra from the operators commuting with the Hamiltonian we must find the potentials for which further operators of the considered type exist.

4. Potentials allowing three or more quadratic integrals of motion

Let us consider a potential $V(\mathbf{r})$ allowing the separation of variables in the Schrödinger equation, so that a pair of operators L_1, L_2 of one of the Π types considered in the previous Section exists. Let us assume that an algebra of operators L_i of the type (31) exists, where all L_i commute with $H = -1/2\Delta + V$. Further, let this algebra either be a simple second-rank algebra or a larger algebra containing a simple second-rank subalgebra.

We choose to identify the found operators L_1 and L_2 with the operators H_1 and H_1 of the commuting Cartan subalgebra of the simple algebra. Further, we must find the other operators (denoted E_α) of the algebra. We know that the commutation rule for two operators E_α, E_β with $\alpha \neq -\beta$ is

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_\gamma,$$

where $N_{\alpha\beta} = 0$ if the sum of the two roots $r(\alpha) + r(\beta)$ is not a root. Looking at the root diagrams of the simple groups of rank two, we see that to each operator E_α we can find an operator E_β such that

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0.$$

Thus we can search directly for potentials allowing an additional pair of commuting operators L_1 and L_2 both of the type (31) which we identify with E_α and E_β. However, we can again make use of our classification and the results of the previous Section. This reduces the problem to the following. We must find all potentials allowing the separation of variables in the Schrödinger equation in two systems of co-ordinates, which in general can be different types of curvilinear co-ordinates and can be rotated and translated with respect to each other. This means that we have to consider

$$N = \binom{11}{2} + 11 = 66$$

possibilities. We shall postpone the general considerations to a future publication and in this paper we shall limit ourselves to the case which is probably most interesting from the physical point of view, i. e. to potentials allowing the separation of variables in the spherical co-ordinate system, so that the operators L_1 and L_2 are direct generalizations of the angular momentum and its third projection. Spherically symmetrical potentials are contained as a particular case.

It follows from the symmetry of the problem that the most general potentials allowing the separation of variables in two co-ordinate systems will be obtained if the two systems are taken as similar as possible. Practically, this means that we shall let the origin of the two co-ordinate systems as well as the directions of the co-ordinate axes coincide. Results referring to arbitrarily shifted origins and rotated axes are usually particular cases of those obtained for the coinciding case.

These arguments will be elaborated in the second Part of this investigation and exceptional cases will be considered, e.g., cases when the origin of one system coincides with a focus in another, etc.

Here we shall consider the case when both pairs of operators L_1, L_2 and L_3, L_4 are «canonical», specifically L_1, L_2 have the form V) and L_3, L_4 have one of the forms I)–XI) so that the co-ordinates are defined exactly as above.

Table I

Potentials for which the Schrödinger equation separates
in the spherical co-ordinate system and at least in one additional system

Potential	Additional system	Remark
$V_1 = \alpha\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + \frac{\beta}{x_1^2} + \frac{\gamma}{x_2^2} + \frac{\delta}{x_3^2}$	rectangular elliptic cylindrical ellipsoidal paraboloidal	$\alpha = \delta = 0$
$V_2 = \frac{\alpha}{x_2^2} + \frac{\beta}{x_3^2} + \gamma \frac{x_1}{x_2^2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	parabolic cylindrical	
$V_3 = \alpha\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + \frac{\beta}{x_3^2} + \frac{h(x_2/x_1)}{x_1^2 + x_2^2}$	circular cylindrical prolate spheroidal oblate spheroidal	
$V_4 = \frac{\alpha}{r} + \beta \frac{\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} h(\mathrm{tg}\,\varphi)$	parabolic rotational	
$V_5 = f(r) + \frac{\alpha}{x_1^2} + \frac{\beta}{x_2^2} + \frac{\gamma}{x_3^2}$	conical	

To demonstrate the method we shall consider one of the most complicated cases, namely the simultaneous separation of variables in spherical and ellipsoidal co-ordinates, in some detail. The results in all other cases will then be given in Table I, omitting their proofs.

By assumption, we have

$$V(\mathbf{r}) = f(r^2) + \frac{1}{r^2} g\left(\cos^2\theta\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} h\left(\sin^2\varphi\right) = \frac{(t-u)A(s) + (u-s)B(t) + (s-t)W(u)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \tag{47}$$

with

$$x_1^2 = \frac{(s-a)(t-a)(u-a)}{a(a-b)} = r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi,$$

$$x_2^2 = \frac{(s-b)(t-b)(u-b)}{b(b-a)} = r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi,$$

$$x_3^2 = \frac{stu}{ab} = r^2 \cos^2\theta.$$

It follows from the right-hand side of (47) that

$$\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}(s-t)V = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial u}(t-u)V = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial s}(s-u)V = 0. \tag{48}$$

Expressing r^2, $\cos^2\theta$ and $\sin^2\varphi$ y in terms of s, t and u we have

$$V = f(s+t+u-a-b) + \frac{1}{s+t+u-a-b} g\left(\frac{stu}{ab(s+t+u-a-b)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{s+t+u-a-b-stu/ab} h\left[\frac{(s-b)(t-b)(u-b)}{b(b-a)(s+t+u-a-b-stu/ab)}\right] =$$

$$= f + \frac{ab}{stu} g_1 + \frac{1}{(s-b)(t-b)(u-b)} h_1, \tag{49}$$

where $g_1\left(\cos^2\theta\right) = \cos^2\theta g\left(\cos^2\theta\right)$, $h_1\left(\sin^2\varphi\right) = b(b-a)\sin^2\varphi h\left(\sin^2\varphi\right)$.

Substituting $V(\mathbf{r})$ into two of eq. (48) we obtain, after rather lengthy calculations

$$r^6 f'' - \sin^2\theta g_1'' + 2g_1' + \frac{(u-a)(u-b)}{ab}\left\{g_1'' - \frac{\cos^2\varphi}{\sin^6\theta}\frac{1}{b(b-a)}h_1'' + \frac{2}{\sin^6\theta}\frac{1}{b(b-a)}h_1'\right\} = 0,$$
$$r^6 f'' - \sin^2\theta g_1'' + 2g_1' + \frac{(s-a)(s-b)}{ab}\left\{g_1'' - \frac{\cos^2\varphi}{\sin^6\theta}\frac{1}{b(b-a)}h_1'' + \frac{2}{\sin^6\theta}\frac{1}{b(b-a)}h_1'\right\} = 0. \tag{50}$$

From this we have

$$r^6 f'' - \sin^2\theta g_1'' + 2g_1' = 0,$$
$$g_1'' - \frac{\cos^2\varphi}{\sin^6\theta}\frac{1}{b(b-a)}h_1'' + \frac{2}{\sin^6\theta}\frac{1}{b(b-a)}h_1' = 0.$$

These equations can easily be separated and solved. Thus we obtain the potential

$$V(\mathbf{r}) = \alpha\cdot\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + \frac{\beta}{x_1^2} + \frac{\gamma}{x_2^2} + \frac{\delta}{x_3^2} \tag{51}$$

and it is simple to verify that this potential allows the separation of variables in the spherical and ellipsoidal system.

The procedure is similar in all other cases and gives the results summarized in Table I. The quantities α, β, γ and δ are constants, $f(r)$ and $h(\mathrm{tg}\,\varphi)$ are arbitrary functions.

We see that the first two potentials are completely determined whereas the last three contain an arbitrary function. The reason for this is that in the first two cases all the operators L_1, L_2, L_3 and L_4 are different, whereas in the other cases we have found only three different operators, commuting with the Hamiltonian (since the operator $M_3^2 - 2h(\mathrm{tg}\,\varphi)$ is common to the potentials II), V), VI), VII) and VIII) and the operator $M^2 - 2[r^2V\text{-}f(r)]$ is common to the potentials V) and IX)).

It is evident that the potentials V_3, V_4 and V_5 of Table I must be further specified before a search for the degeneracy of the energy levels and for the algebra of a higher symmetry group can be started. It is necessary to demand that further integrals of motion should exist. This will be considered in Part II of this investigation.

5. Conclusion

Let us recapitulate the main results obtained in this paper.

i) Operators commuting with a nonrelativistic Hamiltonian $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(\mathbf{r})$ have been considered and it was shown that operators linear in the derivatives and arbitrary in the co-ordinates must be simply linear combinations with constant coefficients of the generators of the group E_3. Operators quadratic in the derivatives (and arbitrary in the co-ordinates) must be quadratic symmetrical polynomials (with constant coefficients) in the same generators.

ii) All potentials were found for which a pair of linear operators exists, commuting with H and with each other. It is shown that a pair of quadratic commuting operators exists if and only if the potential allows the separation of variables in the Schrödinger equation in one of the 11 co-ordinate systems in which the equation $\Delta\psi = \lambda\psi$ separates. All such potentials as well as the corresponding integrals of motion are listed.

iii) Table I lists all potentials allowing the separation of variables in spherical co-ordinates and in at least one additional co-ordinate system. We see that the well-known potentials α/r and ωr^2 with dynamical symmetries are obtained as specific cases, but that

the results are more general. The existence of four independent integrals of motion specifies the potential completely, three specify it up to one unknown function.

In Part II we shall consider the existence of further integrals of motion in the cases when the potential is not sufficiently specified and we shall investigate potentials allowing the separation of variables in two arbitrary co-ordinate systems. We shall consider in more detail the existence and significance of linear integrals of motion. Further, we shall investigate the found potentials, i. e. find the classical trajectories and determine when these are closed curves, solve the Schrödinger equation so as to determine the additional degeneracy of the energy levels and form algebras out of the integrals of motion.

As a preliminary we should like to remark that in the case of the potential (51) we have a complete analogy with one of the potentials considered in the two-dimensional case (8) so that wo can directly write the classical trajectories and the quantum mechanical energy levels and wave functions as well as the operators generating the symmetry group, in this case, SU_3.

* * *

One of the authors (P. W.) is very indebted to Prof. P. Buduni for a stimulating discussion and to M. Gmitro for helpful comments, and wishes to thank Profs. A. Salam and P. Budiini as well as the IAEA for their warm hospitality at the International Centre for Theoretical Physics, Trieste, where part of this investigation was completed. He gratefully acknowledges financial support from the IAEA and UNESCO.

Литература

1. *Houtappel R. M., Vandam H., Wigner E. P.* Rev. Mod. Phys., **37**, 595, 1965.
2. *Pauli W.* Zeits. Phys., **36**, 368, 1926; *Focк V. A.* Zeits. Phys., **98**, 145, 1935; Bargmann V. *Zeits. Phys.*, **99**, 576, 1936.
3. *Jauch J. M., Hill E. L.* Phys. Rev., **57**, 641, 1940; *Demkov Yu. N.* Žurn. Eksp. Teor. Fis., **44**, 2007, 1963.
4. *Dothan Y., Gell-Mann M., Ne'eman Y.* Phys. Lett., **17**, 148, 1965; *Mukunda N., Sudarshan E. C. G., O'Raifeartaigh L.* Phys. Rev. Lett., **15**, 1041, 1965; *Buduni P.* Nuovo Cim., **44**, 363, 1966; *Vitale B.* Invariance and Noninvariance Dynamical Groups. Lectures Notes. Madras, 1966.
5. *Fradkin D. M.* Progr. Theor. Phys., **37**, 798, 1967.
6. *Bertrand J.* Gompt. Rend., **77**, 849, 1873.
7. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Mechanics. London, 1960.
8. *Winternitz P., Smorodninsky Ya. A., Uhlíř M., Friš I.* Yad. Fiz., **4**, 625, 1966; *Friš I., Mandrosov V., Smorodinsky Ya. A., Uhlíř M., Winternitz P.* Phys. Lett., **16**, 354, 1965.
9. *Winternitz P., Friš I.* Yad. Fiz., **1**, 889, 1965; *Lucač I., Smorodinsky Ya. A., Winternitz P.* Dubna, preprint JINR E2-2982, 1966.
10. *Smorodinsky Ya. A., Tugov I. I.* Žurn. Eksp. Teor. Fiz., **50**, 653, 1966; Dubna, preprint JINR, 1965. P. 2307.
11. *Eisenhart L. P.* Phys. Rev., **74**, 87, 1948.

Интегральные представления релятивистских амплитуд и асимптотические теоремы

Г. И. Кузнецов*, Я. А. Смородинский

1. В работе Виленкина и Смородинского [1] были рассмотрены различные варианты интегральных разложений скалярной функции по неприводимым (бесконечномерным) унитарным представлениям группы Лоренца. Однако вне рамок этой работы оставался вопрос об условиях сходимости появляющихся интегралов. Естественно, что условия сходимости интегралов существенны для задачи. Сходимость интегралов прежде всего означает, что интегральное разложение практически возможно, т. е. что мы можем связать преобразования Лоренца для исходной функции с известными преобразованиями ее неприводимых компонент.

Таким образом, условия сходимости следует считать следствием релятивистской инвариантности. Это утверждение надо понимать в следующем смысле. Рассмотрим, например, амплитуду упругого рассеяния. Она является функцией двух переменных, которые, как показано в работе [1], можно считать пробегающими поверхность верхней полости двухполостного гиперболоида вращения $u^2 = 1$ (u — 4-скорость одной из частиц). Тогда операторы сдвига на этой поверхности (которые, очевидно, реализуют собственную группу Лоренца) могут быть использованы для преобразования амплитуды рассеяния от одного значения переменных к другому.

Мы будем называть расширенным условием релятивистской инвариантности возможность перехода от одного значения амплитуды рассеяния к другому с помощью операторов сдвига на гиперболоиде. Заметим, что обычное условие инвариантности состоит лишь в том, что амплитуда зависит от инвариантных параметров s, t.

Такое расширение определения инвариантности, необходимое для введения разложений, приводит естественным путем к условиям поведения функций при больших значениях аргументов. По-видимому, такие условия должны быть, в конце концов, эквивалентными асимптотическим условиям типа теоремы Померанчука [2], получаемым из условий аналитичности. Примеры такой связи между условием сходимости и асимптотическими теоремами и составляют предмет настоящей работы.

2. Будем исходить из разложения амплитуд по собственным функциям оператора Лапласа на гиперболоиде, полученного в работе [1], используя только разложение в сферической системе координат:

$$f(E,\theta,\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\cdot 2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{lm}(-)^l\rho^2\frac{a_{lm}(\rho)\Gamma(-i\rho)}{\Gamma(-i\rho-l)}\,\frac{P^{-1/2-l}_{-1/2-i\rho}(\operatorname{ch}a)}{\sqrt{\operatorname{sh}a}}\,Y_{lm}(\theta,\varphi)\,d\rho, \quad (1)$$

где $E = \operatorname{ch} a$, θ — угол рассеяния, угол φ записан для полноты, ρ характеризует представление группы Лоренца,

---

* Сотрудник Института атомной энергии им. И. В. Курчатова.

$$\frac{a_{lm}(\rho)\Gamma(-i\rho)}{\Gamma(-i\rho-l)}=\frac{a_{lm}(-\rho)\Gamma(i\rho)}{\Gamma(i\rho-l)}. \tag{2}$$

Условия (2) отображают симметрию подынтегральной функции относительно ρ (см. [3]). Коэффициенты $a_{lm}(\rho)$ определяются по формуле

$$a_{lm}(\rho)=\frac{(-)^l(2\pi)^{3/2}\Gamma(i\rho)}{2\Gamma(i\rho-l)}\int f(a,\theta,\varphi)\,\frac{P^{-1/2-l}_{-1/2+i\rho}(\operatorname{ch}a)}{\sqrt{\operatorname{sh}a}}\,Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\operatorname{sh}^2 a\,da\,d\Omega. \tag{3}$$

Функция, для которой справедливы прямое и обратное преобразования (1), (3), должна удовлетворять следующим условиям:

1) быть квадратично интегрируемой

$$\int |f(x)|^2\,dx<\infty; \tag{4}$$

здесь x — совокупность переменных a, θ, φ, а $dx=\operatorname{sh}^2 a\,da\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ — элемент объема;

2) $T_g f(x)=f(g^{-1}x)$ (5)

— реализовать регулярное представление T_g группы движений на гиперболоиде, изоморфной группе Лоренца [4]. Это есть то условие, о котором говорилось выше (см. п. 1).

Пусть $E\to\infty$ при фиксированном θ. Тогда, если подынтегральная функция в (1) есть равномерно относительно ρ сходящаяся к пределу $\varphi=\underset{z\to\infty}{f}(\rho,z)$ функция и интеграл (1) равномерно сходится относительно E, то вместо предела интеграла можно рассматривать предел подынтегральной функции (что обычно и делается, см. работы [2, 5]).

Воспользовавшись асимптотическим представлением присоединенной функции Лежандра $P^\mu_\nu(z)$

$$P^{-1/2-l}_{-1/2-i\rho}(z)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left\{\frac{\Gamma(-i\rho)\exp(-i\rho\ln 2z)}{\Gamma(-i\rho+l+1)}+\frac{\Gamma(i\rho)\exp(i\rho\ln 2z)}{\Gamma(i\rho+l+1)}\right\}, \tag{6}$$

получаем

$$f_{\text{асимпт}}(E,\theta)\approx\frac{\text{const}}{E^{1/4}(E^2-1)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{A(\theta,\rho)\exp(i\rho\ln 2E)+A(\theta,-\rho)\exp(-i\rho\ln 2E)\right\}d\rho, \tag{7}$$

где

$$A(\theta,\rho)=\sum_l(-)^l\frac{|\Gamma(i\rho)|^2a_l(\rho)\rho^2P_l(\theta)}{\Gamma(-i\rho-l)\Gamma(i\rho+l+1)}, \tag{8}$$

причем

$$A(\theta,-\rho)\neq A^*(\theta,\rho).$$

Поскольку $\ln 2E\to\infty$ при фиксированном θ, то из-за осцилляций в экспоненте интегрирование по ρ в (7) должно фактически ограничиваться областью малых значений ρ.

Заметим, что если мы используем условие равномерной сходимости подынтегральной функции и интеграла, т. е. осуществляем перенос символа предела под знак интеграла, то интегрирование в (7) должно производиться в конечных пределах.

Из выражения (7), как следствие гармонического анализа, вытекает «соотношение неопределенностей»

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\pi}\right)\Delta\xi \sim 1. \qquad (9)$$

Здесь $\xi = \ln 2E$.

3. Получим соотношения между амплитудами рассеяния $f(E,\theta)$ и $\tilde{f}(E,\theta)$ соответственно частицы и античастицы на одной и той же мишени. Нам будет удобнее пользоваться лабораторной системой координат (л. с.) и выбирать в качестве переменных E, θ энергию рассеянной частицы и угол рассеяния, которые связаны с координатами a, θ $(\operatorname{ch} a = E)$ точки на гиперболоиде.

Выпишем связь между мандельстамовскими переменными s, t, u и переменными E, θ для реакции

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4:$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2(1 + E_2), \qquad (10)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = 2(1 - E_4),$$

$$t = (p_2 - p_4)^2 = 2 - 2E_2E_4 + 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_4|\cos\theta, \qquad (11)$$

$$p_i^2 = 1, \quad p_1 = (1, 0, 0, 0).$$

Поскольку $E = E_4 \to \infty$, то это возможно лишь за счет стремления к бесконечности энергии налетающей частицы E_2. Условие же $\cos\theta = \text{const} \neq 1$ требует также бесконечно большого переданного импульса, т. е. E_3 и E_4 стремятся к бесконечности по одному и тому же закону, только с различными коэффициентами.

Переход в u-канал $(s \to u)$ соответствует в амплитуде замене $E \to -E$.

Используя условие перекрестной симметрии в форме [6]

$$\tilde{f}(E + i0, \theta) = f(-E - i0, \theta) = f^*(-E + i0, \theta) \qquad (12)$$

и выражение (7), получаем

$$\operatorname{Re}\tilde{f} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{-[A_1(\rho)e^{-\pi\rho} + A_1(-\rho)e^{\pi\rho}]\cos\rho\ln 2E + [A_2(\rho)e^{-\pi\rho} - A_2(-\rho)e^{\pi\rho}\sin\rho\ln 2E]\Big\}\,d\rho, \qquad (13)$$

$$\operatorname{Im}\tilde{f} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{[A_1(\rho)e^{-\pi\rho} - A_1(-\rho)e^{\pi\rho}]\sin\rho\ln 2E + [A_2(\rho)e^{-\pi\rho} + A_2(-\rho)e^{\pi\rho}]\cos\rho\ln 2E\Big\}\,d\rho. \qquad (14)$$

Здесь $\tilde{f}$ — амплитуда рассеяния античастицы; $A_1 = \operatorname{Re} A$; $A_2 = \operatorname{Im} A$.

Напишем выражения типа (13), (14) для амплитуды рассеяния частицы $f(E,\theta)$:

$$\operatorname{Re}\tilde{f} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{[A_1(\rho) + A_1(-\rho)]\cos\rho\ln 2E - [A_2(\rho) - A_2(-\rho)]\sin\rho\ln 2E\Big\}\,d\rho, \qquad (15)$$

$$\operatorname{Im}\tilde{f} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{[A_1(\rho) - A_1(-\rho)\sin\rho\ln 2E + [A_2(\rho) + A_2(-\rho)]\cos\rho\ln 2E\Big\}\,d\rho. \qquad (16)$$

17 Зак. 198

Поскольку интегрирование в (13)–(16) ограничивается малыми значениями ρ, то $e^{\pm\pi\rho} \sim 1$, а это означает, что

$$\operatorname{Im} \tilde{f}_{\text{асимпт}} \approx \operatorname{Im} f_{\text{асимпт}}, \tag{17}$$

$$\operatorname{Re} \tilde{f}_{\text{асимпт}} \approx -\operatorname{Re} f_{\text{асимпт}}, \tag{18}$$

т. е.

$$\left|\tilde{f}_{\text{асимпт}}(E,\theta)\right| \approx \left|f_{\text{асимпт}}(E,\theta)\right|. \tag{19}$$

Равенство амплитуд рассеяния при $\theta = 0$ впервые было получено Померанчуком с помощью дисперсионных соотношений и требования постоянства полного сечения [2].

Для ненулевого угла рассеяния равенство (19) получено Мейманом (см. работу [5], где приведены ссылки на другие работы того же автора) с использованием

$f(E)$	$\rho\, a(\rho)$	$f(E)$	$\rho\, a(\rho)$
$\frac{1}{E\ln E}$	$\theta(\rho) - \theta(-\rho)$	$\frac{\ln^2 E}{E}$	$\sim \frac{1}{2i}(\delta''_-(\rho) - \delta''_+(\rho)) \sim P\frac{1}{\rho^3}$
$\frac{1}{E}$	$\sim \frac{1}{2i}(\delta_- - \delta_+) \sim P\frac{1}{\rho}$	$\frac{\ln^{2n} E}{E}$	$\sim P\frac{1}{\rho^{2n+1}}$
$\frac{\ln E}{E}$	$\sim \delta'(\rho)$	$\frac{\ln^{2n+1} E}{E}$	$\sim \delta^{(2n+1)}(\rho)$

принципа причинности и локальности, а также Логуновым и др. [7, 8] с помощью теоремы Фрагмена—Линделефа.

Для $\tilde{f}(E,\theta)$ можно записать представление (7), где вместо функций $A(\theta,\rho)$ будут стоять новые функции $B(\theta,\rho)$, а также легко написать выражение для действительных и мнимых частей:

$$\operatorname{Re} \tilde{f} = \frac{1}{E} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ [B_1(\rho) + B_1(-\rho)] \cos\rho \ln 2E - [B_2(\rho) - B_2(-\rho)] \sin\rho \ln 2E \right\} d\rho, \tag{20}$$

$$\operatorname{Im} \tilde{f} = \frac{1}{E} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ [B_1(\rho) - B_1(-\rho)] \sin\rho \ln 2E + [B_2(\rho) + B_2(-\rho)] \cos\rho \ln 2E \right\} d\rho. \tag{21}$$

Из (13), (14) и (20), (21) получаем алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} B_1(\rho) + B_1(-\rho) = -A_1(\rho)e^{-\pi\rho} - A_1(-\rho)e^{\pi\rho}, \\ B_1(\rho) - B_1(-\rho) = -A_1(\rho)e^{-\pi\rho} - A_1(-\rho)e^{\pi\rho}, \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} B_2(\rho) + B_2(-\rho) = A_2(\rho)e^{-\pi\rho} + A_2(-\rho)e^{\pi\rho}, \\ -B_2(\rho) + B_2(-\rho) = A_2(\rho)e^{-\pi\rho} - A_2(-\rho)e^{\pi\rho}, \end{cases} \tag{23}$$

решение которых дает связь между коэффициентами B и A:

$$\begin{aligned} B_1(\pm\rho) &= A_1(\mp\rho)e^{\pm\pi\rho}, \\ B_2(\pm\rho) &= A_1(\mp\rho)e^{\pm\pi\rho}. \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, теорема о равенстве амплитуд может быть получена из условия сходимости интегральных разложений на группе. При этом аналитические свойства функций явно не используются. Теорема оказывается следствием, на наш взгляд, более физического условия, гласящего, что амплитуда рассеяния определяется своим значением и всеми производными в какой-либо одной точке пространства (гиперболоида). Такое свойство функции эквивалентно (по крайней мере с физической точки зрения) условию причинности.

Квадратичная интегрируемость $f(E,\theta)$ требует, чтобы на бесконечности $|f(E,\theta)|$ убывала быстрее, чем $1/E$. Если отказаться от квадратичной интегрируемости функций, то парциальные амплитуды $A(\rho,\theta)$ станут обобщенными функциями типа приведенных в таблице для $\theta = 0$.

Авторы выражают свою признательность Н. Н. Мейману за полезные советы и обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Виленкин Н. Я.*, *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **46**, 1793, 1964.
2. *Померанчук И. Я.* ЖЭТФ, **34**, 725, 1958.
3. *Гельфанд И. М.*, *Граев М. И.*, *Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1962.
4. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. Наука, 1965.
5. *Мейман Н. Н.* В сб. Вопросы физики элементарных частиц, Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964.
6. *Берестецкий В. Б.* УФН, **76**, 25, 1962.
7. *Логунов А. А.*, *Нгуен Ван Хьеу*, *Тодоров И. Т.*, *Хрусталев О. А.* ЖЭТФ, **46**, 1079, 1964.
8. *Logunov A. A.*, *Nguyen Van Hieu*, *Todorov I. T.* Preprint E-1520, JINR, 1964.

Унитарные представления группы Лоренца и функции со спином

М. А. Либерман, Я. А. Смородинский, М. Б. Шефтель

1. Введение

В работе [1] были рассмотрены функции, которые образуют базис представлений группы движений гиперболоида или, что то же самое, представлений класса I (максимально вырожденные представления). Эти функции могут служить базисом для интегральных представлений амплитуд рассеяния в форме, указанной в упомянутой работе. В то же время их можно рассматривать как решение волнового уравнения для свободных частиц без спина и разлагать по ним, например, волновую функцию бесспиновых частиц во внешнем поле.

Естественным продолжением работы [1] должно быть получение функций для построения других представлений группы Лоренца.

Построение представления начинается с выбора пространства, в котором это представление будет реализовано. В математической постановке вопроса основную роль играют сами групповые свойства, из которых выводится соответствующая алгебра Ли, а вопросы конкретной реализации носят подчиненную (часто лишь иллюстративную) роль. В физике задача реализации представлений (выбор функций) связана с решением уравнений и является обычно целью исследования. Более того, часто разные реализации представлений одной и той же группы отвечают разным задачам. Например, группа $SU(3)$ отвечает задаче об осцилляторе (функции Эрмита) и симметрии элементарных частиц (функции Лежандра).

В физических задачах пространство обычно задается условиями проблемы. Сдвиги (дифференцирование) в этом пространстве (вместе с условиями симметрии) определяют алгебру Ли, по которой уже строится группа. Ясно, что при таком построении могут оказаться использованными не все представления группы, а лишь часть из них (как, например, в кулоновской задаче или в задаче об осцилляторе). Формально ограничение представлений оказывается следствием дополнительной симметрии, присущей базису, что приводит иногда в свою очередь к появлению дополнительных квантовых чисел.

Хорошо известным примером такого рода являются шаровые функции со спином Берестецкого [2]. Эти функции реализуют базис всех представлений группы $O(3)$. В то же время они составлены как линейные комбинации функций, на которых можно построить более широкую группу, а именно группу $O(3) \otimes O(3)$. Поэтому функции Берестецкого обладают дополнительным свойством — они являются тензором определенного ранга (спинором), в то время как в группе $O(3)$, вообще говоря, нет отдельно спинового квантового числа, а есть только квантовое число полного момента количества движения.

Ссылка на функции Берестецкого делает понятным дальнейший выбор реализации представления группы Лоренца.

В однородной группе Лоренца нет, очевидно, оператора, которому можно было бы сопоставить спин. Но можно ввести дополнительное квантовое число спина, если выбрать такую реализацию представления группы $\mathcal{L}$, которая допускала бы

расширение до группы Пуанкаре P. Этого можно, например, добиться, задав на конусе не скалярную шаровую функцию, а функцию Берестецкого и совершив орисферное преобразование Гельфанда—Граева [3]. Такой путь, однако, приводит к громоздким выкладкам, которые мы пока не смогли свести к более простому виду.

Поэтому мы выбрали другой, более прямой способ, реализуя представление на пространстве функций, определенных на прямом произведении двух пространств — гиперболоида (с бесконечномерным представлением) и сферы (с конечномерным спиновым представлением) или конуса. Представление, таким образом, будет строиться как прямое произведение неприводимых представлений: бесконечномерного неунитарного и конечномерного неунитарного. В качестве базиса бесконечномерного представления выбираются функции из [4], в качестве базиса конечномерного представления выбирается специальный вид представления $(s, 0)$, отвечающий функции с одним значением спина. Общий случай и применение результатов к уравнениям для частиц с высшими спинами будут представлены отдельной работой.

2. Алгебра группы Лоренца

На гиперболоиде реализуются лишь наиболее вырожденные представления вида (ip_0, ip_0), соответствующие скалярным частицам. Желая получить представления, соответствующие состояниям частиц с произвольным спином s, необходимо, как говорилось во Введении, дополнить гиперболоид до пространства, являющегося прямым произведением гиперболоида на конечномерное спиновое пространство. В таком пространстве можно будет реализовать представления (m, p) основной серии с $-s \leqslant m/2 \leqslant s$. Такое рассмотрение является непосредственным обобщением работы [1].

Систему координат в пространстве скоростей будем описывать, задавая четыре однородные декартовы координаты скорости u_0, $\mathbf{u}$ через углы; для этого введем сферическую систему координат на гиперболоиде

$$\begin{aligned} u_0 &= \operatorname{ch} a, & u_2 &= \operatorname{sh} a \sin\theta \sin\varphi, \\ u_3 &= -\operatorname{sh} a \cos\theta, & u_1 &= \operatorname{sh} a \sin\theta \cos\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Сферическая система этого специального вида выбрана для того, чтобы сохранить стандартный вид спиновых матриц. В этой системе координат генераторы группы Лоренца имеют вид

$$\begin{aligned} L_1 &= -i\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)I + L_1^s, \\ L_2 &= i\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)I + L_2^s, \\ L_3 &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi}I + L_3^s, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= -i\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{cth} a\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\operatorname{cth} a\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)I + K_1^s, \\ K_2 &= -i\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{cth} a\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\operatorname{cth} a\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)I + K_2^s, \\ K_3 &= i\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial a} - \operatorname{cth} a\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)I + K_3^s, \end{aligned}$$

где I — единичная $(2s+1)\times(2s+1)$-матрица, и удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям [4]. Так как представления реализуются в пространстве, являющемся прямым произведением пространства гиперболоида на конечномерное спиновое пространство, то $L_i = L_i^0 + L_0^s$, $K_i = K_i^0 + K_0^s$, где L_i, K_i — орбитальные генераторы на гиперболоиде, а искомое представление является произведением представлений вида (ip_0, ip_0) на гиперболоиде и $(s, 0)$ в конечномерном спиновом пространстве [5] [1]. Здесь L_i^s и K_i^s — матрицы размерности $(2s+1)\times(2s+1)$, удовлетворяющие известным коммутационным соотношениям (см. [4]). Благодаря такому выбору представлений мы работаем с минимальным числом спинорных компонент.

3. Построение базисных функций

Неприводимое представление группы Лоренца характеризуется двумя операторами Казимира

$$\Delta = L_i^2 - K_i^2, \quad \Delta' = 2iL_iK_i.$$

Функции f, образующие базис неприводимого представления группы Лоренца, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 - p^2 - 1\right] f, \\ \Delta' f &= impf. \end{aligned} \tag{3}$$

Для унитарных неприводимых представлений из основной серии m целое, а p вещественно. Поскольку представления (m, p) и $(-m, -p)$ эквивалентны, то для однозначности выберем область изменения $-\infty < m < \infty$, $0 \leqslant p < \infty$. Строим базисные функции в виде

$$\left\langle a, \theta, \varphi \,\middle|\, p\frac{m}{2}\, jM \right\rangle = \sum_{i=1}^{2s+1} \sum_{\mu=-s}^{s} B_i^s(j, m, p)(l_i s j M \,|\, l_i s m_l \mu) f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi)\varphi_\mu^s, \tag{4}$$

где $l_i = j + s - i + 1$; коэффициенты Клебша—Гордана отвечают сложению $\mathbf{s} + \mathbf{l}_i = \mathbf{j}$, так что $|j - s| \leqslant l_i \leqslant |j + s|$; $f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi)$ — базисные функции бесконечномерного представления на гиперболоиде (ip_0, ip_0), а φ_μ^s — базисные функции конечномерного представления, соответствующие частице со спином s. Для таких представлений $K_i^s = -iL_i^s$. Условие диагональности L^2 определяет зависимость (4) от M. Функции $f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi)$ — собственные функции оператора $\Delta_- = \Delta - \Delta'$:

$$\Delta_- f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi) = \left[\left(\frac{m}{2} - ip\right)^2 - 1\right] f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi). \tag{5}$$

Заметим, что оператор Δ_- не содержит спиновых матриц. Регулярное в нуле решение (5) имеет вид [2]

$$f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi) = \frac{N(l_i)}{\operatorname{sh}^{1/2} a} P_{-1/2+ip_0}^{-(l_i+1/2)}(\operatorname{ch} a)\, Y_{l_i m_l}(\theta, \varphi), \tag{6}$$

где $-ip_0 = {}^1\!/_2 m - ip$, а шаровые функции нормированы так, что интеграл от их квадрата модуля по сфере равен единице и они имеют свойство симметрии $Y_{lm} = Y_{l-m}^*$, фиксирующее фазу.

---

[1] Другими словами, мы используем спинор, у которого все индексы одного типа.

[2] Выбор регулярного в нуле решения уравнения (5) позволяет определить нерелятивистский предел.

Вид $N(l_i)$ получается из требования, чтобы матричные элементы K_i^0 имели канонический вид для представления (ip_0, ip_0):

$$(iF_3^0)f_{m_l}^{l_i} = -\left[(l_i - m_l)(l_i + m_l)\frac{l_i^2 + p_0^2}{4l^2 - 1}\right]^{1/2} f_{m_l}^{l_i - 1} + \\ + \left[(l_i + m_l + 1)(l_i - m_l + 1)\frac{(l_i + 1)^2 + p_0^2}{4(l_i + 1)^2 - 1}\right]^{1/2} f_{m_l}^{l_i + 1}, \qquad (7)$$

$$F_3 = K_3.$$

Отсюда, используя (2), получаем

$$(iF_3^0)f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi) = \left[-\cos\theta\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{cth} a \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\frac{N(l_i)}{\operatorname{sh}^{1/2} a}\, P_{-1/2+ip_0}^{-(l_i+1/2)}(\operatorname{ch} a)\, Y_{l_i m_l}(\theta, \varphi) =$$

$$= \left[-\cos\theta\frac{\partial}{\partial a} + \operatorname{cth} a \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\frac{\overline{N}(l_i, m_l)}{\operatorname{sh}^{1/2} a} P_{-1/2+ip_0}^{-(l_i+1/2)}(\operatorname{ch} a)\, P_{l_i}^{m_l}(\cos\theta) e^{i m_l \varphi}. \qquad (8)$$

Если воспользоваться рекуррентными соотношениями для функций Лежандра, то выражение (8) перепишется в виде

$$(iF_3^0)f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi) = \frac{\overline{N}(l_i, m_l)}{\operatorname{sh}^{1/2} a}\left\{\frac{(l_i - m_l + 1)}{2l_i + 1}\left[(l_i + 1)^2 + p_0^2\right] P_{-1/2+ip_0}^{-(l_i+3/2)}(\operatorname{ch} a) \times \right. \\ \left. \times P_{l_i+1}^{m_l}(\cos\theta) e^{i m_l \varphi} - \frac{(l_i + m_l)}{(2l_i + 1)} P_{-1/2+ip_0}^{-(l_i-1/2)}(\operatorname{ch} a)\, P_{l_i-1}^{m_l}(\cos\theta) e^{i m_l \varphi}\right\}. \qquad (9)$$

Сравнивая (9) и (7), получаем формулу для повышения значения l_i на единицу:

$$\overline{N}(l_i, m_l) = \left[\frac{(l_i^2 + p_0^2)(l_i - m_l)(2l_i + 1)}{(l_i + m_l)(2l_i - 1)}\right]^{1/2} \overline{N}(l_i - 1, m_l). \qquad (10)$$

Учитывая, что

$$\overline{N}(l_i, m_l) = N(l_i)\frac{(-1)^{m_l}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(2l_i + 1)(l_i - m_l)}{2(l_i - m_l)!}\right]^{1/2}$$

находим

$$N(l_i) = \sqrt{l_i^2 + p_0^2}\, N(l_i - 1). \qquad (11)$$

Решение (11) с учетом (6) имеет вид

$$N(l_i) = \left\{\frac{\Gamma\left[l_i + 1 + \left(\frac{m}{2} - ip\right)\right]\Gamma\left[l_i + 1 - \left(\frac{m}{2} - ip\right)\right]}{\Gamma\left[l_{i\,\min} + \left(\frac{m}{2} - ip\right)\right]\Gamma\left[l_{i\,\min} - \left(\frac{m}{2} - ip\right)\right]}\right\}^{1/2}, \qquad (12)$$

где

$$l_{i\,\min} = \frac{1}{2}|m| + s - i + 2.$$

Уравнение

$$\Delta_+ f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi) = \left[\left(\frac{1}{2}m + ip\right)^2 - 1\right] f_{m_l}^{l_i}(a, \theta, \varphi),$$

где

$$\Delta_+ = \Delta + \Delta',$$

приводит к условию для m

$$\frac{1}{2}m = -s, -s+1, \ldots, s-1, s. \tag{13}$$

В качестве базисных функций φ^s_μ мы выбираем

$$\varphi^s_\mu(\alpha) = \delta_{\alpha, s-\mu+1} \quad (-s \leqslant \mu \leqslant s).$$

В скалярном случае $m = 0$, $p_0 = p$ функции $f^{l_i}_{m_l}(a, \theta, \varphi)$ переходят в функции, полученные в работе [1], и реализуют унитарные представления на гиперболоиде.

В общем случае отличного от нуля s p_0 комплексно при $m \neq 0$ и представление, реализуемое на этих функциях, бесконечномерно и неунитарно. Таким образом, задача состоит в перемножении двух неунитарных представлений: бесконечномерного на гиперболоиде и конечномерного в спиновом пространстве — и вырезании из произведения унитарной части. Это достигается следующим образом. Мы действуем генераторами группы на функции (4), причем орбитальные и спиновые части действуют на $f^{l_i}_{m_l}$ и φ^s_μ независимо.

Например, [5]

$$H^0_+ f^{l_i}_{m_l} = \left[(l_i + m_l + 1)(l_i - m_l)\right]^{1/2} f^{l_i}_{m_l+1} \quad \text{и т. п.,} \tag{14}$$

$$H^s_+ \varphi^s_\mu = \left[(s + \mu + 1)(s - \mu)\right]^{1/2} \varphi^s_{\mu+1} \quad \text{и т. п.} \tag{15}$$

$$H_+ = L_1 + iL_2.$$

Действие генераторов группы на функции

$$\langle a, \theta, \varphi | p\,{}^1\!/\!{}_2 m j M\rangle \equiv \Phi^j_M$$

для унитарных представлений основной серии определяется следующим образом [4, 5]:

$$F_3\Phi_M = \left[(j-M)(j+M)\right]^{1/2}\frac{i}{j}\left[\frac{(j^2 - {}^1\!/\!{}_4 m^2)(j^2+p^2)}{4j^2-1}\right]^{1/2}\Phi^{j-1}_M + M\frac{mp}{2j(j+1)}\Phi^j_M -$$
$$- \left[(j+M+1)(j-M+1)\right]^{1/2}\frac{i}{(j+1)}\left[\frac{\left[(j+1)^2 - {}^1\!/\!{}_4 m^2\right]\left[(j^2+1)^2+p^2\right]}{4(j+1)^2-1}\right]^{1/2}\Phi^{j+1}_M \tag{16}$$

и т. д.

Для наших целей удобно воспользоваться следующим соотношением:

$$(iF_3)\Phi^j_j = \frac{imp}{2(j+1)}\Phi^j_j + \frac{\sqrt{2j+1}}{(j+1)}\left[\frac{\left[(j+1)^2 - {}^1\!/\!{}_4 m^2\right]\left[(j+1)^2+p^2\right]}{4(j+1)^2-1}\right]^{1/2}\Phi^{j+1}_j. \tag{17}$$

Применяя (14), (15), (17) к (4), после ряда несложных преобразований получаем рекуррентное соотношение для B^s_i:

$$B^s_i(j)(l_i s j j\,|\,l_i s j - \mu\mu)\left[\frac{imp}{2(j+1)-\mu}\right] + \frac{\sqrt{2j+1}}{j+1}\left\{\frac{\left[(j+1)^2 - {}^1\!/\!{}_4 m^2\right]\left[(j+1)^2+p^2\right]}{4(j+1)^2-1}\right\}^{1/2}\times$$
$$\times B^s_{i+1}(j+1)(l_i s j + 1 j\,|\,l_i s j - \mu\mu) = -B^s_{i-1}(j)(l_i + 1 s j j\,|\,l_i + 1 s j - \mu\mu)\times$$
$$\times\left[(l_i + 1 - j + \mu)(l_i + 1 + j - \mu)\right]^{1/2}\left[\frac{(l_i+1)^2+p_0^2}{4(l_i+1)^2-1}\right]^{1/2} +$$
$$+ B_{i+1}(j)(l_i - 1 s j j\,|\,l_i - 1 s j - \mu\mu)\left[(l_i + j - \mu)(l_i - j + \mu)\frac{l_i^2+p_0^2}{4l_i^2-1}\right]^{1/2}. \tag{18}$$

Если в равенстве (18) выбрать $\mu = i - s - 1$, то мы находим следующее соотношение для B_i^s:

$$B_i^s(j)(l_isjj\,|\,l_isl_ii-s-1)\left[\frac{imp}{2(j+1)}+(s-i+1)\right]+$$
$$+B_{i+1}^s(j+1)(l_isj+1j\,|\,l_isl_ii-s-1)\frac{\sqrt{2j+1}}{j+1}\left\{\frac{[(j+1)^2-{}^1\!/\!_4m^2]\,[(j+1)^2+p^2]}{4(j+1)^2-1}\right\}^{1/2}=$$
$$=-B_{i-1}^s(j+1)(l_i+1sjj\,|\,l_i+1sl_ii-s-1)\sqrt{2l_i+1}\left[\frac{(l_i+1)^2+p_0^2}{4(l_i+1)^2-1}\right]^{1/2}.$$

После подстановки в это выражение значений коэффициентов Клебша—Гордана

$$B_i^s(j)\left[\frac{imp}{2(j+1)}+(s+1-i)\right]+B_{i+1}^s(j+1)\frac{1}{(j+1)}\left[\left[(j+1)^2-\frac{m^2}{4}\right][(j+1)^2+p^2]\right]^{1/2}\times$$
$$\times\left[\frac{i(2s-i+1)}{(2j-i+2)(2j+2s-i+3)}\right]^{1/2}=B_{i-1}^s(j)\left[(j+s-i+2)^2-\left(\frac{m}{2}-ip\right)^2\right]^{1/2}\times$$
$$\times\left[\frac{(i-1)(2s-i+2)(2j+2s-2i+3)}{(2j+2s-i+3)(2j+2-i)(2j+2s-2i+5)}\right]^{1/2}.$$

Для дальнейших вычислений нам удобно перейти от коэффициентов $B_i^s(j)$ к величинам $A_i(j)$:

$$A_i^s(j)=\frac{B_i^s(j)N(l_i)}{B_1^s(j)N(l_1)}.$$

Тогда с помощью выражения (4) получаем окончательный вид функций, реализующих базис представления группы Лоренца (p,m):

$$\left\langle a,\theta,\varphi\,\middle|\,p\frac{m}{2}\,jM\right\rangle=G(j,s,m,p)\sum_{i=1}^{2s+1}\sum_{\mu=-s}^{s}A_i^s(j,p,m)(l_isjM\,|\,l_ism_l\mu)\times$$
$$\times\frac{1}{\mathrm{sh}^{1/2}a}P_{-1/2+ip_0}^{-(l+1/2)}(\mathrm{ch}\,a)\,Y_{l_im_l}(\theta,\varphi)\varphi_\mu^s,\qquad(19)$$

где

$$ip_0=-\frac{1}{2}m+ip,$$
$$G(j,s,m,p)=B_1^s(j,m,p)N(l_1)\qquad(20)$$

и ${}^1\!/\!_2|m|$ определяет нижнюю границу возможных значений s. Коэффициенты $A_i^s(j)$ определяются рекуррентными соотношениями[3)]

$$A_i^s(j)\left[\frac{imp}{2(j+1)}+(s+1-i)\right]+A_{i+1}^s(j+1)\left[(j+s+1)^2-\left(\frac{m}{2}-ip^2\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[\frac{(2j+2s+2)(2j+1)(2s-i+1)i}{(2j+2)(2j+2s+1)(2j+2-i)(2j+2s-i+3)}\right]^{1/2}=$$
$$=A_{i-1}^s(j)\left[\frac{(i-1)(2s-i+2)(2j+2s-2i+3)}{(2j+2s-i+3)(2j+2-i)(2j+2s-2i+5)}\right]^{1/2}.\qquad(21)$$

[3)] Условие существования нетривиального решения системы однородных уравнений (21) приводит к ограничению на ${}^1\!/\!_2m$: ${}^1\!/\!_2m=-s,-s+1,\dots,s-1,s$.

Приведем значения первых трех коэффициентов $A_i^s(j)$. По определению $A_1^s(j) \equiv 1$. Положив в (21) $i = 1$, находим для следующего коэффициента

$$A_2(j) = \frac{[(imp/2j) + s]}{[(\frac{1}{2}m - ip)^2 - (j+s)^2]} \left[\frac{j}{s}(2j + 2s - 1)\right]^{1/2};$$

аналогично, положив $i = 2$, получаем

$$A_3^s(j) = \frac{(2j + 2s - 1)}{[(j+s)^2 - (\frac{1}{2}m - ip)^2]} \left[\frac{2j}{(2s-1)(2j+2s)}\right]^{1/2} \times$$
$$\times \left\{ \frac{[(imp/2j) + s - 1][(imp/2(j-1)) + s]}{[(j+s-1)^2 - (\frac{1}{2}m - ip)^2]} \left[\frac{(j-1)}{s}(2j + 2s - 3)\right]^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2j+2s-1)} \left[\frac{s(2j+2s-3)}{(j-1)}\right]^{1/2} \right\}.$$

Нам осталось еще определить $B_1^s(j)$. Для этого выберем в формуле (18)

$$l_i = j + s + 1 \quad \text{и} \quad \mu = -s,$$

тогда

$$\frac{\sqrt{2j+1}}{(j+1)} \left\{ \frac{[(j+1)^2 - \frac{1}{4}m^2]\,[(j+1)^2 + p^2]}{4(j+1)^2 - 1} \right\}^{1/2} (j+s+1sj+1j\,|\,j+s+1sj+s-s) B_1(j+1) =$$
$$= B_1(j)(j+ssjj\,|\,j+ssj+s-s) \left[(2j+2s+1)\frac{(j+s+1)^2 + p_0^2}{4(j+s+1)^2 - 1}\right]^{1/2}.$$

Подставляя сюда выражение для коэффициентов Клебша—Гордана, получаем

$$B_1^s(j+1) = B_1^s(j)(j+1) \left\{ \frac{[(j+s+1)^2 + p_2^0](2j+2s+2)(2j+1)}{[(j+1)^2 - \frac{1}{4}m^2]\,[(j+1)^2 + p^2](2j+2)(2j+2s+1)} \right\}^{1/2}. \tag{22}$$

Рекуррентное соотношение (22) дает следующее выражение для $B_1^s(j)$:

$$B_1^s(j) = N_1(m, p, s) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}|m| + 1)} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\Gamma[(j+s+1) + (\frac{1}{2}m - ip)]\,\Gamma[(j+s+1) - (\frac{1}{2}m - ip)]}{\Gamma[(\frac{1}{2}|m| + s + 1) + (\frac{1}{2}m - ip)]\,\Gamma[(\frac{1}{2}|m| + s + 1) - (\frac{1}{2}m - ip)]} \times \right.$$
$$\times \frac{\Gamma[(\frac{1}{2}|m| + 1) + \frac{1}{2}m]\,\Gamma[(\frac{1}{2}|m| + 1) - \frac{1}{2}m]\,|\Gamma(\frac{1}{2}|m| + 1 + ip)|^2}{\Gamma(j + \frac{1}{2}m + 1)\Gamma(j - \frac{1}{2}m + 1)|\Gamma(j + 1 + ip)|^2} \times$$
$$\left. \times \frac{(2j+2s)!!(2j-1)!!|m|!!(|m|+2s-1)!!}{(|m|+2s)!!(|m|-1)!!(2j)!!(2j+2s-1)!!} \right\}^{1/2}. \tag{23}$$

Так как мы рассматриваем унитарные представления, то можем выбрать инвариантную норму в гильбертовом пространстве функций $\Phi_M^j(a, \theta, \varphi)$ положительно определенной. Условие

$$N_1(|m|, p, s) = \frac{\Gamma(s + 1 + ip)}{\Gamma(|m| + s + 1 + ip)} \tag{24}$$

как раз и осуществляет такой выбор, причем

$$N_1(-|m|, p, s) = N_1(|m|, -p, s) = N_1^*(|m|, p, s).$$

Приведем еще выражение для нерелятивистского предела функций $\langle a,\theta,\varphi|p\,{}^1\!/\!{}_2 mjM\rangle$. Учитывая, что $\operatorname{th} a = |\mathbf{v}|/c$, после несложных вычислений получаем

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ v/c\to 0}} \langle a,\theta,\varphi|p\,{}^1\!/\!{}_2 mjM\rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{2s+1}\sum_{\mu=-s}^{s} B_i^s(j,m,p)(l_isjM|l_ism_l\mu)\frac{N(l_i)}{\sqrt{2}\Gamma(l_i+{}^3\!/\!{}_2)}\left(\frac{a}{2}\right)^{l_i}\varphi_\mu^s.$$

Заметим, что таким образом в состояниях с определенным четырехмерным моментом в нерелятивистском пределе наибольший вклад дает волна с наименьшим значением $l_i = l_{i\,\min} = {}^1\!/\!{}_2|m| + s - i + 2$.

4. Определение скалярного произведения

Перейдем теперь к определению скалярного произведения в гильбертовом пространстве функций $\langle a,\theta,\varphi|p\,{}^1\!/\!{}_2 mjM\rangle$. Для этого рассмотрим функции $\Psi_{M(1/2m)}^{j(p)}(a,\theta,\varphi)$, реализующие унитарные неприводимые представления полной (с отражениями) группы Лоренца. Функции $\Psi_{M(1/2m)}^{j(p)}(a,\theta,\varphi)$ являются биспинорами, образованными из функций $\Phi_M^j(a,\theta,\varphi)$

$$\Psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix},$$

где спиноры φ и χ преобразуются соответственно по представлениям $(s,0)$ и $(0,s)$:

$$\Psi_{M(1/2m)}^{i(p)}(a,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle a,\theta,\varphi|p-{}^1\!/\!{}_2\,mjM\rangle\\ (-1)^{j+s+m}\langle a,\pi-\theta,\pi+\varphi|p-{}^1\!/\!{}_2\,mjM\rangle\end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Здесь операция пространственного отражения определяется следующим образом:

$$\Psi'(a,\theta,\varphi) = i\Gamma^0\Psi(a,\pi-\theta,\pi+\varphi),$$

где

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},$$

а I — единичная матрица, размерности $(2s+1)\times(2s+1)$. Выражение (25) может быть получено из явного представления генераторов полной группы Лоренца:

$$\mathcal{L}_i = \begin{pmatrix}L_i^0+L_i^s & 0\\ 0 & L_i^0+L_i^s\end{pmatrix},\quad \mathcal{K}_i = \begin{pmatrix}K_i^0-iL_i^s & 0\\ 0 & K_i^0+iL_i^s\end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Определим теперь норму в гильбертовом пространстве функций $\Psi_{M(1/2m)}^{j(p)}(a,\theta,\varphi)$ следующим образом[4]:

[4] Это скалярное произведение инвариантно по отношению к полной группе Лоренца. Заметим, что скалярное произведение для функций $\langle a,\theta,\varphi|p\,{}^1\!/\!{}_2 mjM\rangle$, инвариантное только по отношению к собственной группе Лоренца

$$\left(\Phi_M^j(a,\theta,\varphi),\ \Phi_M^j(a,\theta,\varphi)\right) = \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} da\,d\theta\,d\varphi\,\operatorname{sh}^2 a\sin\theta\,\Phi_M^{+j}(a,\theta,\varphi)\Phi_M^j(a,\theta,\varphi), \qquad (27')$$

приводит к расходящемуся интегралу.

$$\left(\Psi^{j(p)}_{M(1/2m)}(a,\theta,\varphi),\ \Psi^{j(p)}_{M(1/2m)}(a,\theta,\varphi)\right) =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} da\, d\theta\, d\varphi\, \mathrm{sh}^2 a \sin\theta \Psi^{+j(p)}_{M(1/2m)}(a,\theta,\varphi)\Gamma^0 \Psi^{j(p)}_{M(1/2m)}(a,\theta,\varphi), \qquad (27)$$

где Ψ^+ — функция, эрмитово сопряженная функции Ψ. Так как функции $\Psi^{j(p)}_{M(1/2m)}(a,\theta,\varphi)$ образуют базис неприводимых представлений группы Лоренца, то для них имеет место соотношение ортогональности

$$\left(\Psi^{j(p)}_{M(1/2m)}(a,\theta,\varphi),\ \Psi^{j'(p')}_{M'(1/2m')}(a,\theta,\varphi)\right) = \delta_{mm'}\delta_{jj'}\delta_{MM'}\delta(p-p').$$

Отметим, что плотность $\Psi^+\Gamma^0\Psi$ не является положительно определенной. Скалярное произведение, даваемое выражением (27), всегда положительно, так как функции $\Psi^{j(p)}_{M(1/2m)}(a,\theta,\varphi)$ реализуют унитарное представление полной группы Лоренца.

5. Связь с решениями уравнений для свободных полей

Так как биспиноры $\Psi^j_M = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$, реализующие унитарное неприводимое представление полной однородной группы Лоренца, построены как прямое произведение конечномерных представлений специального вида $(s,0)\otimes(0,s)$ на бесконечномерные представления на гиперболоиде, то эти представления расширяются до неприводимых представлений группы Пуанкаре. Учитывая, что все возможные релятивистские уравнения для свободных полей с определенной массой $\varkappa$ и спином s выводятся из тех соображений, чтобы решения преобразовывались по неприводимым представлениям группы Пуанкаре [6] $(\varkappa, s)$, очевидно, что построенные выше функции $\Psi^{j(p)}_{M(1/2m)}(a,\theta,\varphi)$ являются решениями таких уравнений и образуют полный набор функций, по которому можно разложить произвольное решение.

В качестве иллюстрации этого утверждения мы выбираем релятивистские уравнения, решениями которых являются спиноры, содержащие минимальное число компонент, необходимых для описания спина s и преобразующихся по представлению вида $(s,0)\otimes(0,s)$ [7]. Такие уравнения не требуют дополнительных условий, необходимых для исключения лишних спинорных компонент [8].

Эти уравнения имеют вид

$$\left(\mathscr{P}^{(s)}(p) - \varkappa^{2s}\right)\Psi = 0, \qquad (28)$$

где

$$\mathscr{P}^{(s)}(p) = -i^{2s}\gamma^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}} p_{\mu_1}p_{\mu_2}\ldots p_{\mu_{2s}}, \quad p_{\mu_i} = -i\frac{\partial}{\partial q_{\mu_i}},$$

а обобщенные γ-матрицы Дирака определяются следующим образом:

$$\gamma^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}} = -i^{2s}\begin{pmatrix} 0 & t^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}} \\ \bar{t}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}} & 0\end{pmatrix};$$

здесь

$$\bar{t}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}} = \pm t^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}},$$

знак плюс берется для четного числа пространственных индексов, а знак минус — для нечетного числа. $(2s+1)$-рядные матрицы $t^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}}_{\sigma\sigma'}$ являются непосредственным обобщением матриц Паули и удовлетворяют следующим условиям:

1. $t^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}}_{\sigma\sigma'}$ — симметричны по всем индексам μ.
2. $g_{\mu_1\mu_2}t^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}} = 0$.
3. $t^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}}_{\sigma\sigma'}$ — тензор в том смысле, что

$$D^{(s)}(\Lambda)\, t^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}} D^{(s)+}(\Lambda) = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1}\Lambda^{\mu_2}_{\nu_2}\ldots\Lambda^{\mu_{2s}}_{\nu_{2s}} t^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{2s}},$$

где $D^{(s)}(\Lambda)$ – $(2s+1)$-рядная матрица, соответствующая преобразованию Лоренца Λ в представлении $(s, 0)$. Можно показать, что

$$\mathscr{P}^{(s)}(p) = m^{2s}\begin{pmatrix} 0 & \exp(-2a\mathbf{n}\mathbf{L}^{(s)}) \\ \exp(2a\mathbf{n}\mathbf{L}^{(s)}) & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \operatorname{sh} a = \frac{|\mathbf{p}|}{m}.$$

Мы ищем решение уравнения (28) такое, при котором спинор $\varphi = \langle a, \theta, \varphi \mid p\,{}^1\!/\!{}_2 mjM\rangle$ реализует неприводимое унитарное представление собственной группы Лоренца. В этом случае можно показать, что решением (28) будет биспинор (25). В Приложении приводится явный вид функций — решений уравнения (28) для спина $s = {}^1\!/\!{}_2$ и 1.

Вообще говоря, уравнение (28) для каждой спинорной компоненты как уравнение $2s$-го порядка имеет 2s независимых решений. Действительно, так как

$$\gamma^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}}\gamma^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{2s}} p_{\mu_1}p_{\mu_2}\ldots p_{\mu_{2s}}\cdot p_{\nu_1}p_{\nu_2}\ldots p_{\nu_{2s}} = \left(p^2\right)^{2s},$$

то, действуя на уравнение (28) оператором

$$\left((-i^{2s})\gamma^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}} p_{\mu_1}p_{\mu_2}\ldots p_{\mu_{2s}} + \varkappa^{2s}\right),$$

получаем

$$\left[\left(p^2\right)^{2s} - \left(\varkappa^2\right)^{2s}\right]\Psi = 0. \tag{29}$$

Отсюда видно, что $2s$ решений соответствует $2s$ корням уравнения $\left[\left(p^2\right)^{2s} - \left(\varkappa^2\right)^{2s}\right] = 0$.

Однако мы выделяем единственное «физическое решение», соответствующее свободной частице с массой $\varkappa$, дополнительным условием $p^2 = \varkappa^2$, фиксирующим фазу и означающим, что базис строится на верхней полости вещественного гиперболоида.

В заключение мы пользуемся случаем поблагодарить Д. П. Желобенко, В. И. Огиевецкого и И. В. Полубаринова за полезные обсуждения.

Приложение 1

Спин ½

В этом случае уравнение (29) есть уравнение Дирака

$$\left(\mathscr{P}^{(1/2)}(p) - \varkappa\right)\Psi = 0, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

или, учитывая (1),

$$\begin{aligned}\chi_1 &= (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a\cos\theta)\varphi_1 + \operatorname{sh} a \sin\theta e^{-i\varphi}\varphi_2,\\ \chi_2 &= \operatorname{sh} a\sin\theta e^{i\varphi}\varphi_1 + (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a\cos\theta)\varphi_2.\end{aligned} \tag{П.1}$$

Спинор $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ выбираем в виде

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \langle a,\theta,\varphi|p\,{}^1\!/\!_2 jM\rangle =$$

$$= \frac{G({}^1\!/\!_2)}{\operatorname{sh}^{1/2}a}(j+{}^1\!/\!_2{}^1\!/\!_2 jM|j+{}^1\!/\!_2{}^1\!/\!_2 M-{}^1\!/\!_2{}^1\!/\!_2)\frac{(-1)^{M-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(j+1)(j+1-M)!}{(j+M)!}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left[P^{-(j+1)}_{-1+ip}(\operatorname{ch} a)\begin{pmatrix} P^{M-1/2}_{j+1/2}(\cos\theta)e^{i(M-1/2)\varphi}\\ \dfrac{1}{(j-M+1)}P^{M+1/2}_{j+1/2}(\cos\theta)e^{i(M+1/2)\varphi}\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(j+1-ip)}P^{-j}_{-1+ip}(\operatorname{ch} a)\begin{pmatrix}\dfrac{(j+M)}{(j-M+1)}P^{M-1/2}_{j-1/2}(\cos\theta)e^{i(M-1/2)\varphi}\\ \dfrac{-1}{(j-M+1)}P^{M+1/2}_{j-1/2}(\cos\theta)e^{i(M+1/2)\varphi}\end{pmatrix}\right]. \tag{П.2}$$

Подставляя выражение (П. 2) в (П. 1), получаем для спинора χ следующее выражение:

$$\chi(a,\theta,\varphi) = (-1)^{j+3/2}\langle a,\pi-\theta,\pi+\varphi|p\,{-}^1\!/\!_2\, jM\rangle.$$

Волновые функции нормируются условием[5]

$$\left(\Psi^{j(p)}_{M(1/2m)}(a,\theta,\varphi),\ \Psi^{j'(p')}_{M'(1/2)}(a,\theta,\varphi)\right) = |G({}^1\!/\!_2)|^2\frac{(1+4p^2)\,|\Gamma(-{}^1\!/\!_2+ip)|^2}{|\Gamma(j+2+ip)|^2}\delta_{jj'}\delta_{MM'}\delta(p'-p). \tag{П.3}$$

Приложение 2

Спин 1

В этом случае уравнение (29) принимает вид

$$(\mathscr{P}^{(1)}(p)-\varkappa^2)\Psi = 0,\qquad \Psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$$

или, учитывая (1),

$$\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\end{pmatrix} = \left[I+2\begin{pmatrix} -\operatorname{sh} a\cos\theta & \dfrac{\operatorname{sh} a\sin\theta}{\sqrt2}e^{-i\varphi} & 0\\ \dfrac{\operatorname{sh} a\sin\theta}{\sqrt2}e^{i\varphi} & 0 & \dfrac{\operatorname{sh} a\sin\theta}{\sqrt2}e^{-i\varphi}\\ 0 & \dfrac{\operatorname{sh} a\sin\theta}{\sqrt2}e^{i\varphi} & \operatorname{sh} a\cos\theta\end{pmatrix}\right.\times$$

[5] Подставив явное выражение $|G({}^1\!/\!_2)|^2$ в (П. 3), нетрудно убедиться, что нормировочный коэффициент не зависит от j и поэтому Ψ всегда могут быть нормированы на δ-функцию.

$$\times \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a \cos\theta & \frac{\operatorname{sh} a \sin\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & 0 \\ \frac{\operatorname{sh} a \sin\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \operatorname{ch} a & \frac{\operatorname{sh} a \sin\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ 0 & \frac{\operatorname{sh} a \sin\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a \cos\theta \end{pmatrix} \Bigg] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.4})$$

Ищем решение в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \langle a, \theta, \varphi | p 1 j M \rangle =$$

$$= \frac{G(1)}{\operatorname{sh}^{1/2} a} (j+11jM|j+11M-11) \frac{(-1)^{M-1}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{(2j+3)(j-M+2)!}{2(j+M)!} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[P^{-(j+3/2)}_{-3/2+ip}(\operatorname{ch} a) \begin{pmatrix} P^{M-1}_{j+1}(\cos\theta) & e^{i(M-1)\varphi} \\ \frac{\sqrt{2}}{(j-M+2)} & P^{M}_{j+1}(\cos\theta) e^{iM\varphi} \\ \frac{1}{(j-M+1)(j-M+2)} & P^{M+1}_{j+1}(\cos\theta) e^{i(M+1)\varphi} \end{pmatrix} - \right.$$

$$- \frac{(2j+1)}{j(j+2-ip)} P^{-(j+1/2)}_{-3/2+ip}(\operatorname{ch} a) \begin{pmatrix} \frac{(-1)(j+M)}{(j-M+2)} P^{M-1}_j(\cos\theta) e^{i(M-1)\varphi} \\ \frac{-\sqrt{2}M}{(j-M+1)(j-M+2)} P^{M}_j(\cos\theta) e^{iM\varphi} \\ \frac{1}{(j-M+1)(j-M+2)} P^{M+1}_j(\cos\theta) e^{i(M+1)\varphi} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{(j+1)}{j(j+2-ip)(j+1-ip)} P^{-(j-1/2)}_{-3/2+ip}(\operatorname{ch} a) \times$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} \frac{(j+M)(j+M-1)}{(j-M+1)(j-M+2)} P^{M-1}_{j-1}(\cos\theta) e^{i(M-1)\varphi} \\ \frac{-\sqrt{2}(j+M)}{(j-M+1)(j-M+2)} P^{M}_{j-1}(\cos\theta) e^{iM\varphi} \\ \frac{1}{(j-M+1)(j-M+2)} P^{M+1}_{j-1}(\cos\theta) e^{i(M+1)\varphi} \end{pmatrix} \right]. \qquad (\text{П.5})$$

. Подставляя выражение (П. 5) в (П. 4), после несложных преобразований получаем

$$\chi(a, \theta, \varphi) = (-1)^{j+1} \langle a, \pi - \theta, \pi + \varphi | p - 1 j M \rangle.$$

Волновые функции нормированы условием[6)]

$$\left(\Psi^{j(p)}_{M(1)}(a,\theta,\varphi), \Psi^{j'(p')}_{M'(1)}(a,\theta,\varphi) \right) = |G(1)|^2 \frac{4(2j+1)(p^4+p^2)|\Gamma(-1+ip)|^2}{j|\Gamma(j+3+ip)|^2} \delta_{jj'} \delta_{MM'} \delta(p'-p). \qquad (\text{П.6})$$

[6)] См. сноску [5)].

Литература

1. *Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **46**, 1793, 1964.
2. *Берестецкий В. Б.* ЖЭТФ, **17**, 12, 1947; *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
4. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
5. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
6. *Умэдзава X.* Квантовая теория поля. ИИЛ, 1958.
7. *Weinberg S.* Phys. Rev., **133**, B1318, 1964.
8. *Fierz M., Pauli W.* Proc. Roy. Soc, **A173**, 211, 1939.

Пуанкаре- и лоренц-инвариантные разложения релятивистских амплитуд

П. Винтерниц*, Я. А. Смородинский, М. Б. Шефтель

1. Введение

Последние несколько лет уделялось много внимания проблеме разложении релятивистских амплитуд рассеяния и реакций [1–21]. Такие разложения, по-видимому, должны играть важную роль при исследовании общих аналитических свойств амплитуды и послужат естественным аппаратом для дальнейшего развития и обобщения таких различных подходов к теории сильных взаимодействий, как метод реджевских полюсов, асимптотические теоремы и т. п. Они обеспечат естественную теоретико-групповую интерпретацию таких важных понятий, как комплексный момент, сигнатура и т. п., а также станут особенно интересными в свя́зи с дальнейшим развитием теории рассеяния при высоких энергиях, приведшим к гипотезам фиксированных полюсов, возможного существования «дочерних траекторий» [22, 25], разрезов в комплексной J-плоскости и т. п.

2. Два подхода к релятивистским разложениям

Общая теория лоренц-инвариантных разложений развита в работе Виленкина и Смородинского [3] (далее В—С). Идеологию этого направления можно сформулировать следующим образом: амплитуды процессов типа $1+2 \to 3+4$ зависят от двух независимых кинематических переменных. Обычные параметры Мандельстама s и t неудобны для релятивистских разложений, поскольку физическая область их изменения (сектор в мандельстамовской плоскости) не обладает разумной геометрией, и, более того, если один из этих параметров фиксирован, то другой не дает удобной параметризации какой-либо подгруппы группы Лоренца или Пуанкаре. Вместо s и t мы выбираем компоненты 4-скорости $u_\mu = p_\mu/m$ одной из частиц и затем рассматриваем амплитуду как функцию, определенную на верхней полости гиперболоида $u^2 = 1$ (в случае нулевых спинов функция не зависит от азимутального угла φ). Различные возможные параметризации приводят к различным разложениям, рассмотренным в работах [3, 4].

Релятивистская инвариантность этих разложений имеет двоякий смысл. С одной точки зрения она просто выражает лоренцеву инвариантность (и пуанкаре-инвариантность) амплитуды, означающую, что мы можем произвольно поместить на гиперболоиде $u^2 = 1$ кинематический график [5], описывающий рассеяние (идентифицируя, например, вершину гиперболоида со скоростью одной из частиц или со скоростью центра масс, системы Брейта или любой другой и выбирая удобным образом направления пространственных осей). Лоренцевы преобразования от одной системы к другой соответствуют движению кинематического графика как целого по гиперболоиду, и инвариантность амплитуды означает, что преобразования

* Сотрудник Института ядерных исследований ЧСАН, Чехословакия.

коэффициентов разложения по неприводимым представлениям группы Лоренца компенсируются преобразованиями соотношений, связывающих выбранные кинематические переменные с s и t.

Другое требование, связанное с рассматриваемыми разложениями, которое мы называем «расширенной лоренц-инвариантностью», более интересно и выражает определенные аналитические свойства амплитуд рассеяния. Поскольку амплитуда теперь определена на гиперболоиде, группа движений которого изоморфна однородной группе Лоренца, различные значения переменных связаны лоренцевскими преобразованиями. Полученные разложения по базисным функциям неприводимых представлений группы Лоренца дают возможность в принципе выражать значения амплитуды для произвольных значений параметров через ее значения для фиксированной системы параметров. Следует подчеркнуть, что в противоположность обычной лоренцевой- (или пуанкаре-) инвариантности, которая относится к одной и той же амплитуде, видимой разными наблюдателями, «расширенная лоренц-инвариантность» связывает значения амплитуды для различных значений кинематических параметров s и t, видимые одним и тем же наблюдателем. Предполагаемая сходимость разложения, в прямом смысле (означая квадратичную интегрируемость амплитуд, разлагаемых по унитарным представлениям из основной серии) или в некотором обобщенном, есть новое предположение, которое приводит к новым физическим результатам, таким, как асимптотические теоремы [7]. Таким образом, расширенная лоренц-инвариантность содержит определенные предположения о сходимости, которую можно рассматривать как проявление существования определенных (неизвестных) «уравнений движения» или принципов причинности. В дальнейшем подход работ [3–7] будем называть подходом I.

Другой подход — II был развит в статьях Йооса [10, 11], Толлера [12, 13], Салама и др. [14, 15]. Их анализ непосредственно основан на пуанкаре-инвариантности амплитуды рассеяния, причем они рассматривают два различных типа «схем связи» для произведений неприводимых представлений группы Пуанкаре.

По существу, как подчеркнуто в работах [12, 14], это эквивалентно следующей процедуре. Амплитуда при фиксированном значении полного 4-импульса $p_1 + p_2$ («прямая связь») или передачи импульса $p_3 - p_1$ («связь в кросс-канале») определяется как функция на малой группе группы Пуанкаре, соответствующей этому фиксированному 4-вектору, и затем разлагается по неприводимым представлениям этой малой группы. Математически это соответствует гармоническому анализу амплитуд рассеяния по представлениям группы $O(3)$ для фиксированного $p_1 + p_2$ и по представлениям $O(3)$, $O(2,1)$, E_2 или $O(3,1)$ для фиксированного $p_3 - p_1$, являющегося соответственно времениподобным, пространственноподобным, изотропным и нулевым вектором.

Целью настоящей работы является установить связь между двумя упомянутыми направлениями и заодно подчеркнуть, что первый подход, основанный на использовании неприводимых представлений группы $O(3,1)$ движений в пространстве независимых кинематических переменных, также явно инвариантен относительно группы Пуанкаре.

Чтобы сделать проблему более ясной, напомним: пуанкаре-инвариантность означает, что амплитуда зависит только от двух «существенных» кинематических переменных (s и t или подходящих их комбинаций) и все другие переменные (например, все остальные компоненты 4-импульсов начальных и конечных частиц) можно фиксировать ad hoc. В работе В—С выбор системы координат эквивалентен выбору специальных значений «несущественных» параметров. Два существенных параметра служат в качестве переменных разложений.

В методе Толлера, Салама и др. сужение группы Пуанкаре на одну из ее малых групп соответствует тому, что одному из существенных параметров приписывается постоянное значение. Малая группа параметризуется вторым существенным параметром (и углом φ), являющимся единственной переменной разложения. Это эквивалентно более строгой (но более сложной) процедуре, предложенной Йоосом [10, 11], непосредственно основанной на редукции прямых произведений неприводимых представлений группы Пуанкаре с использованием явных выражений коэффициентов Клебша—Гордана для этой группы [20] с целью получить пуанкаре-инвариантные разложения амплитуд.

3. Системы координат и малые группы

Перейдем теперь к явным формулам для разложений в отдельных координатных системах и укажем их связь с разложениями по малым группам.

Для упрощения доказательств рассмотрим только бинарные реакции частиц с нулевым спином. Рассмотрение случая произвольных спинов находится в процессе разработки [8].

В настоящей работе мы рассмотрим только три из тридцати четырех возможных разложений на трехмерном гиперболоиде [23] (семь из которых связаны с подгруппами группы Лоренца [4, 9]).

А. Сферическая система (S-система)

S-система, в которой 4-скорость параметризуется как

$$u = (u_0, u_1, u_2, u_3) = (\operatorname{ch} a, \operatorname{sh} a \sin\theta\cos\varphi, \operatorname{sh} a \sin\theta \sin\varphi, \operatorname{sh} a \cos\theta),$$
$$0 \leqslant a < \infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{1}$$

специально удобна для рассмотрения рассеяния в с. ц. м. Действительно, рассмотрим в s-канале процесс

$$1 + 2 \to 3 + 4 \tag{2}$$

и выберем такую систему координат, где $0xz$ — плоскость реакции ($\varphi = 0$ для всех частиц), 3-импульс $\mathbf{p}_1$ направлен вдоль оси $0z$ и 4-скорость центра масс

$$u_s = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{s}}$$

имеет компоненты $u_s = (1, 0, 0, 0)$ (см. рис. 1). Импульсы частиц теперь имеют вид

$$\begin{aligned}
p_1 &= m_1(\operatorname{ch} a_1, 0, 0, \operatorname{sh} a_1),\\
p_2 &= m_2(\operatorname{ch} a_2, 0, 0, -\operatorname{sh} a_2),\\
p_3 &= m_3(\operatorname{ch} a_3, \operatorname{sh} a_3 \sin\theta_s, 0, \operatorname{sh} a_3 \cos\theta_s),\\
p_4 &= m_4(\operatorname{ch} a_4, -\operatorname{sh} a_4 \sin\theta_s, 0, -\operatorname{sh} a_4 \cos\theta_s).
\end{aligned} \tag{3}$$

Сохранение импульса и выбор с. ц. м., в которой $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$, означает, что

$$m_1 \operatorname{sh} a_1 = m_2 \operatorname{sh} a_2, \quad m_1 \operatorname{ch} a_1 + m_2 \operatorname{ch} a_2 = m_3 \operatorname{ch} a_3 + m_4 \operatorname{ch} a_4,$$
$$m_3 \operatorname{sh} a_3 = m_4 \operatorname{sh} a_4. \tag{4}$$

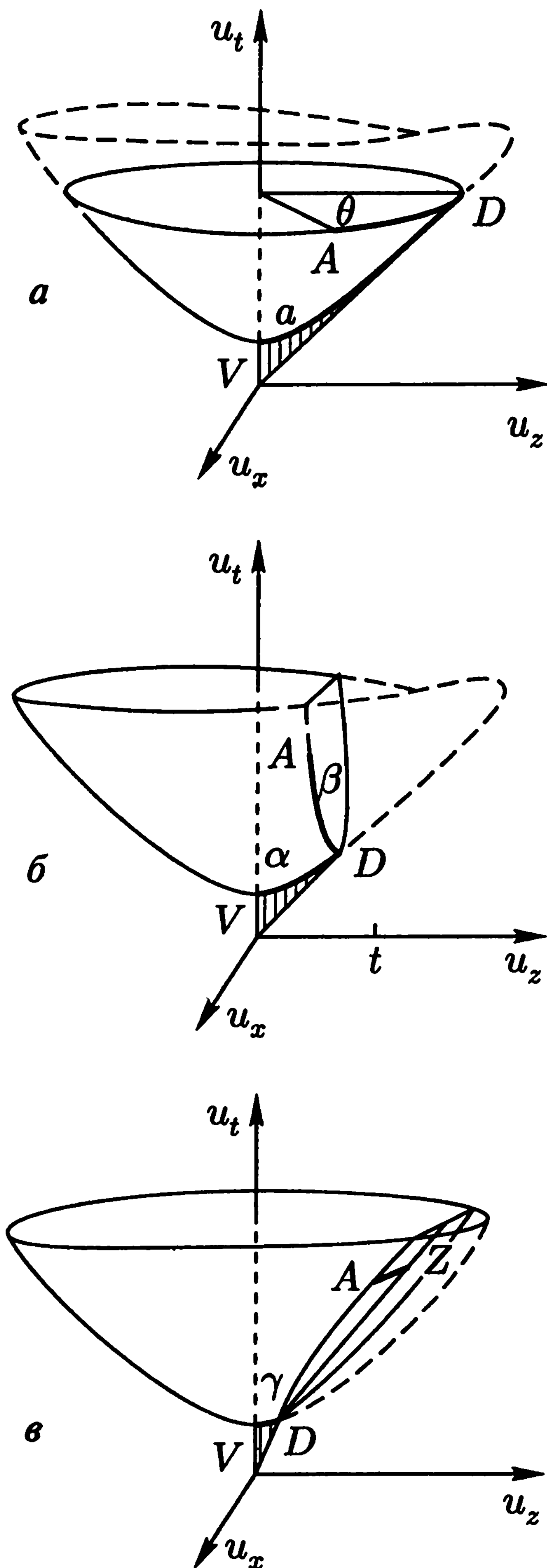


Рис. 1. Системы координат: *а* — сферическая S; *б* — гиперболическая H; *в* — орисферическая O ($\overline{Z}A = re^{-\gamma}$)

Выберем $a_3 = a_s$ и θ_s в качестве независимых переменных. Тогда их выражения через $s = (p_1 + p_2)^2$ и $t = (p_1 - p_3)^2$ будут иметь вид

$$\begin{gathered} m_3 \operatorname{ch} a_s = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \\ \cos\theta_s = \left[2s\left(t - m_1^2 - m_3^2\right) + \right. \\ \left. + \left(s + m_1^2 - m_2^2\right)\left(s + m_3^2 - m_4^2\right)\right] \times \\ \times \left\{\left[s - (m_1 - m_2)^2\right]\left[s - (m_1 + m_2)^2\right] \times \right. \\ \left. \times \left[s - (m_3 - m_4)^2\right]\left[s - (m_3 + m_4)^2\right]\right\}^{-1/2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Для физической области t-канала

$$2 + \overline{4} \to \overline{1} + 3, \tag{6}$$

в котором 4-скорость $u_t = (p_2 - p_4)/\sqrt{t}$ помещена в вершину гиперболоида $u_t = (1, 0, 0, 0)$, имеют место аналогичные формулы:

$$\begin{gathered} m_1 \operatorname{ch} a_t = \frac{t + m_1^2 - m_3^2}{2\sqrt{t}}, \\ \cos\theta_t = -\left[2t\left(s - m_1^2 - m_2^2\right) + \right. \\ \left. + \left(t + m_1^2 - m_3^2\right)\left(t + m_2^2 - m_4^2\right)\right] \times \\ \times \left\{\left[t - (m_1 + m_3)^2\right]\left[t - (m_1 - m_3)^2\right] \times \right. \\ \left. \times \left[t - (m_2 + m_4)^2\right]\left[t - (m_2 - m_4)^2\right]\right\}^{-1/2}. \end{gathered} \tag{7}$$

Разложение амплитуды рассеяния в этих переменных имеет вид

$$\begin{gathered} f(a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \rho^2 d\rho \times \\ \times A_l(\rho) \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} P_{-1/2+i\rho}^{-(l+1/2)}(\operatorname{ch} a)\, P_l(\cos\theta); \end{gathered} \tag{8)}$$

$P_\mu^\nu(z)$ — функции Лежандра. Формулы, обратные как разложению (8), так и формулам разложения во всех других системах координат, даны в работе [3]. В подходе II выбор с. ц. м. как раз приводит к обычному фазовому анализу, а именно: малая группа выбирается фиксированием вектора $p_1 + p_2$ и таким образом фиксированием также и существенного параметра a. Разложение просто есть

$$f(a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(a)\, P_l(\cos\theta). \tag{9}$$

Таким образом, в этом случае разложение В—С можно получить независимо от теоретико-групповых соображений, разлагая коэффициент в (9):

$$B_l(a) = \int_0^\infty \rho^2 d\rho A_l(\rho) \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} P^{-(l+1/2)}_{-1/2+i\rho}(\operatorname{ch} a). \tag{10}$$

Более тонкие вопросы, касающиеся условий, при которых (10) сходится, извлечения расходящихся частей амплитуды, и обобщение для процессов со спином будут рассмотрены отдельно.

Б. Гиперболическая система ($\bar{H}$-система)

$\bar{H}$-система, в которой

$$\begin{gathered} u = (\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\beta, \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta \cos\varphi, \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta \sin\varphi, \operatorname{sh}\alpha), \\ -\infty < \alpha < \infty, \quad 0 \leqslant \beta < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \end{gathered} \tag{11}$$

оказывается специально полезной в связи с системой Брейта. Мы определяем систему Брейта, помещая 4-скорость

$$u_t = \frac{p_4 - p_2}{\sqrt{-t}} = \frac{p_1 - p_3}{\sqrt{-t}}$$

в точку (0,0,0,1) на однополостном гиперболоиде $u^2 = -1$. В случае равных масс $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$, для которого система Брейта обычно определяется, 4-скорость $(p_2 + p_4)/\sqrt{(p_2 + p_4)^2}$ принимает координаты (1,0,0,0). Фиксируя остающиеся несущественные параметры выбором плоскости реакции в качестве $0xz$ и оси $0z$ вдоль 3-векторов $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_4$, получаем

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1(\operatorname{ch}\alpha_1 \operatorname{ch}\beta, \operatorname{ch}\alpha_1 \operatorname{sh}\beta, 0, \operatorname{sh}\alpha_1), \\ p_2 &= m_2(\operatorname{ch}\alpha_2, 0, 0, \operatorname{sh}\alpha_2), \\ p_3 &= m_3(\operatorname{ch}\alpha_3 \operatorname{ch}\beta, \operatorname{ch}\alpha_3 \operatorname{sh}\beta, 0, \operatorname{sh}\alpha_3), \\ p_4 &= m_4(\operatorname{ch}\alpha_4, 0, 0, \operatorname{sh}\alpha_4), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} m_1 \operatorname{ch}\alpha_1 = m_3 \operatorname{ch}\alpha_3, \quad m_2 \operatorname{ch}\alpha_2 = m_4 \operatorname{ch}\alpha_4, \\ m_1 \operatorname{sh}\alpha_1 + m_2 \operatorname{sh}\alpha_2 = m_3 \operatorname{sh}\alpha_3 + m_4 \operatorname{sh}\alpha_4. \end{gathered} \tag{13}$$

Кинематические диаграммы даны на рис. 1, *б*, 2, *б*. Они нарисованы для случая

$$t \leqslant -\max\left(\left|m_1^2 - m_3^2\right|, \left|m_2^2 - m_4\right|\right)$$

и будут несколько отличаться во всех остальных случаях (например, для $-|m_4^2 - m_2^2| \leqslant t \leqslant 0$; 0 точка B будет лежать на оси $0z$ влево от 1 и 2), но это не влияет на последующие формулы.

Выбирая $\alpha_1 = \alpha_s$ и β_s в качестве независимых переменных в S-канале, находим

$$\begin{gathered} m_1 \operatorname{sh}\alpha_s = \frac{t + m_1^2 - m_3^2}{2\sqrt{-t}}, \\ \operatorname{ch}\beta_s = -\left[2t\left(s - m_1^2 - m_2^2\right) + \left(t + m_1^2 - m_3^2\right)\left(t + m_2^2 - m_4^2\right)\right] \times \\ \times \left\{\left[t - (m_1 - m_3)^2\right]\left[t - (m_1 + m_3)\right]^2\left[t - (m_2 - m_4)^2\right]\left[t - (m_2 + m_4)^2\right]\right\}^{-1/2}. \end{gathered} \tag{14}$$

Аналогичные формулы для $m_2 \operatorname{sh}\alpha_t$ и $\operatorname{ch}\beta_t$ в системе Брейта t-канала получаются перестановкой s и t и следующей заменой всех индексов:

$$1 \to 2, \quad 2 \to 4, \quad 3 \to 1, \quad 4 \to 3.$$

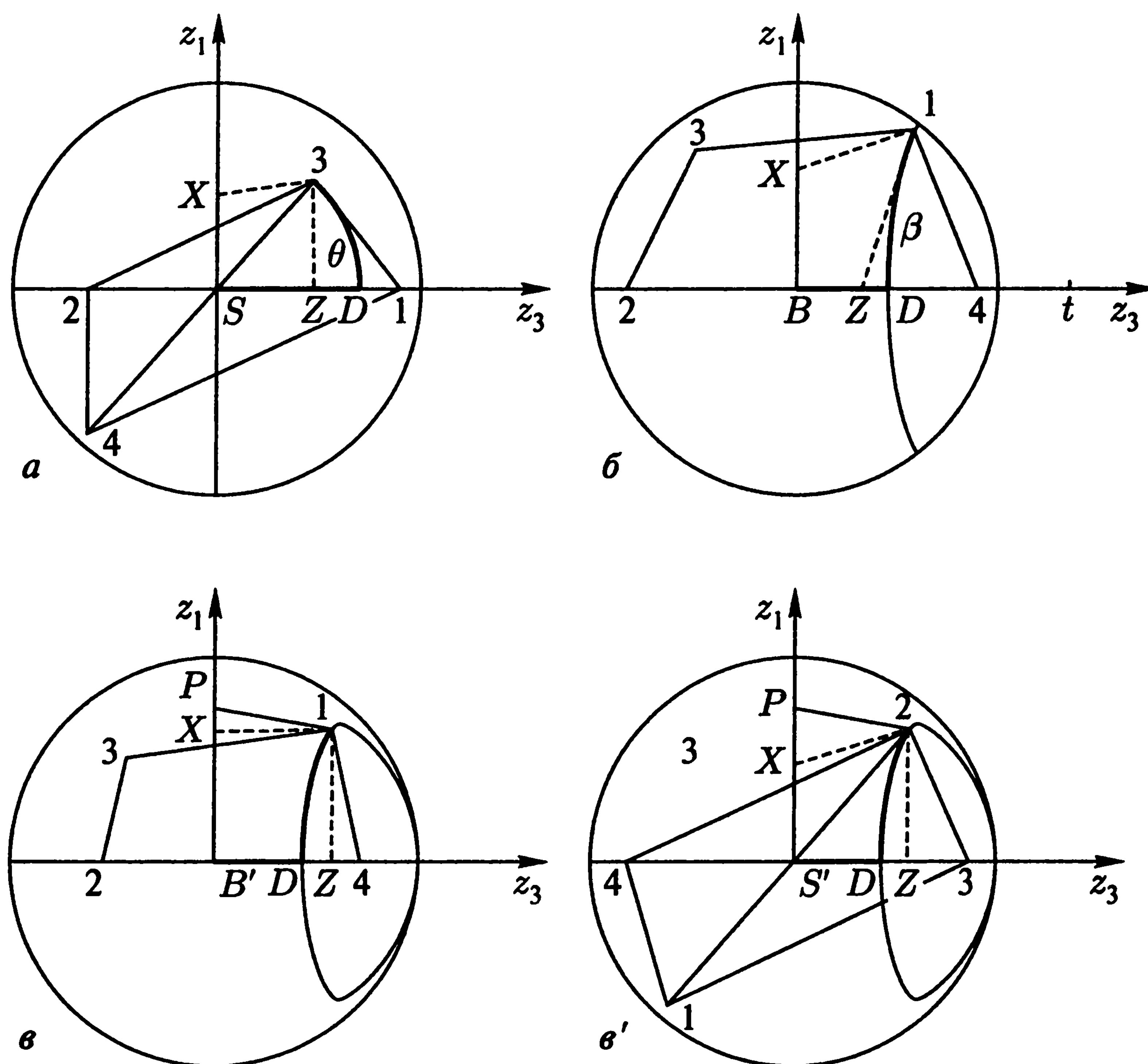


Рис. 2. Процессы: *а* — $1+2 \to 3+4$ в S-системе ($\overline{SD} = \text{th}\, a$); *б* — $1+2 \to 3+4$ в H-системе ($\overline{BD} = \text{th}\,\alpha$, $\overline{BX} = \text{th}\,\beta$); *в* — $1+2 \to 3+4$ в «брейтоподобной» O-системе ($\overline{B'D} = \text{th}\,\gamma$, $\overline{B'P} = r$); *в'* — $1+2 \to 3+4$ в «с.ц. подобной» O-системе ($\overline{S'D} = \text{th}\,\gamma$, $\overline{S'P} = r$). Использована плоскость Бельтрами (см. с. 268)

Тогда лоренц-инвариантное разложение в соответствии с методами В—С имеет вид

$$f(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_0^\infty q\, \text{th}\, \pi q\, dq \Big\{ A^+(\rho,q) \frac{1}{\sqrt{\text{ch}\,\alpha}} P_{-1/2+i\rho}(-i\, \text{sh}\,\alpha) + \\ + A^-(\rho,q) \frac{1}{\sqrt{\text{ch}\,\alpha}} P^{iq}_{-1/2+i\rho}(i\, \text{sh}\,\alpha) \Big\} P_{-1/2+iq}(\text{ch}\,\beta). \tag{15}$$

В подходе II мы фиксируем передачу импульса $p_1 - p_3$, т. е. переменную α (или t в соответствии с (7)), и таким образом получаем малую группу $O(2,1)$ и разложение по $P_{-1/2+iq}(\text{ch}\,\beta)$, которое совпадает с (15), если положить

$$B_q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}\,\alpha}} \int_0^\infty \rho^2 d\rho \big\{ A^+(\rho,q) P^{iq}_{-1/2+i\rho}(-i\, \text{sh}\,\alpha) + A^-(\rho,q) P^{iq}_{-1/2+i\rho}(i\, \text{sh}\,\alpha) \big\}. \tag{16}$$

В. Орисферическая система (O-система)

4-скорость в O-системе параметризуется следующим образом:

$$u = \left(\text{ch}\,\gamma + \frac{1}{2} r^2 e^{-\gamma}, r e^{-\gamma} \cos\varphi, r e^{-\gamma} \sin\varphi, \text{sh}\,\gamma + \frac{1}{2} r^2 e^{-\gamma} \right), \\ -\infty < \gamma < \infty, \quad 0 \leqslant r < \infty. \tag{17}$$

Эта система, в соответствии с подходом I, может быть использована для описания рассеяния частиц с произвольными массами и произвольными значениями кинематических переменных. Соответствующая лоренцева система выбирается фиксированием «несущественного» изотропного вектора $K(s,t)$. Чтобы стало ясным соотношение между O-системой и разложениями по малой группе E_2, соответствующей $t=(p_4-p_2)^2=0$, удобно выбрать вектор $K(s,t)$ как

$$K(s,t)=p_4\frac{m_2}{m_4}\,e^{-A(s,t)}-p_2, \tag{18}$$

$$\operatorname{ch}A(s,t)=\frac{p_2p_4}{m_2m_4}=\frac{m_2^2+m_4^2-t}{2m_2m_4}. \tag{19}$$

Легко проверить, что

$$K^2(s,t)=0,\quad K(s,0)=(p_4-p_2)|_{t=0}. \tag{20}$$

Система координат определяется, как обычно, выбором в качестве $0xz$ плоскости реакции, $0z$ вдоль импульсов $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_2$ и вектора $K(s,t)$ в стандартной форме

$$K(s,t)=(\omega,0,0,\omega). \tag{21}$$

4-импульсы частиц теперь имеют вид

$$\begin{aligned}
p_1&=m_1\left(\operatorname{ch}\gamma_1+\frac{1}{2}r_1^2e^{-\gamma_1},\ r_1e^{-\gamma_1},\ 0,\ \operatorname{sh}\gamma_1+\frac{r_1^2}{2}e^{-\gamma_1}\right),\\
p_2&=m_2(\operatorname{ch}\gamma_2,\ 0,\ 0,\ \operatorname{sh}\gamma_2),\\
p_3&=m_3\left(\operatorname{ch}\gamma_3+\frac{1}{2}r_3^2e^{-\gamma_3},\ r_3e^{-\gamma_3},\ 0,\ \operatorname{sh}\gamma_3+\frac{r_3^2}{2}e^{-\gamma_3}\right),
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered}
m_1\left(e^{\gamma_1}+r_1^2e^{-\gamma_1}\right)+m_2e^{\gamma_2}=m_3\left(e^{\gamma_3}+r_3^2e^{-\gamma_3}\right)+m_4e^{\gamma_4},\\
m_1e^{-\gamma_1}+m_2e^{-\gamma_2}=m_3e^{-\gamma_3}+m_4e^{-\gamma_4},\\
m_1r_1e^{-\gamma_1}=m_3r_3e^{-\gamma_3},\quad \omega=m_2e^{\gamma_4}\operatorname{sh}(\gamma_4-\gamma_2).
\end{gathered} \tag{23}$$

Соответствующие кинематические графики даны на рис. 1, *в* и 2, *в*. Заметим, что если ввести

$$\omega_1\equiv\frac{Kp_1}{m_1}=\omega e^{-\gamma_1}, \tag{24}$$

где ω — частота (энергия) «фотона» K, видимая наблюдателем в системе покоя частицы I, то получим $\gamma_1=-\ln(\omega_1/\omega)$. Таким образом, ω служит масштабом измерения частоты и $e^{-\gamma_1}$ определяет эффект Допплера для «фотона» K, связанный с системой покоя I, что очевидно определяет скорость первой частицы. Это — проявление интересного свойства O-системы (и геометрии орисферы в пространстве Лобачевского), а именно того, что w может быть выбрано произвольно.

При нашем выборе (21) и (22) ω удовлетворяет условию

$$\varepsilon\equiv\operatorname{sign}\omega=\operatorname{sign}(m_4-m_2)=\operatorname{sign}(\gamma_4-\gamma_2).$$

Выбирая $\gamma_1 = \gamma_s$ и $r_1 = r_s$ в качестве новых переменных, получаем

$$m_1\omega e^{-\gamma_s} = \frac{(s - m_1^2 - m_2^2)(m_2^2 - m_4^2 + t + \varepsilon R) + 2m_2^2(t + m_1^2 - m_3^2)}{2(m_2^2 + m_4^2 - t - \varepsilon R)},$$

$$\left(\frac{r_s}{\omega}\right)^2 = \frac{(m_2^2 + m_4^2 - t - \varepsilon R)^2}{m_2^2 R^2}\left[(s - m_1^2 - m_2^2)(m_2^2 - m_4^2 + t + \varepsilon R) + \right. \tag{25}$$
$$\left. + 2m_2^2(t + m_1^2 - m_3^2)\right]^{-2}\left\{R^2\left[(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2\right] - \right.$$
$$\left. - \left[(s - m_1^2 - m_2^2)(m_2^2 - m_4^2 + t) + 2m_2^2(t + m_1^2 - m_3^2)\right]^2\right\},$$

где

$$R = \left\{\left[t - (m_2 - m_4)^2\right]\left[t - (m_2 + m_4)^2\right]\right\}^{1/2}.$$

Сравнивая рис. 2, *б* и *в*, видим, что лоренцева система отсчета, которой мы пользуемся в O-системе, очень напоминает систему Брейта. Другая лоренцева система в том же канале получается при стандартизации другого изотропного вектора, а именно

$$K' = p_3 \frac{m_4}{m_3} e^{-A'} + p_4.$$

Эта система напоминает с. ц. м. и непосредственно не связана с малой группой, соответствующей изотропной передаче импульса. Две аналогичные орисферические системы можно построить в t-канале и при кроссинг-преобразовании «брейтоподобная» система в одном канале переходит в «ц. м.-подобную» систему в другом.

Лоренц-инвариантные разложения в этих переменных имеют вид (мы полагаем $\omega = 1$)

$$f(\gamma, r) = \int_0^\infty \rho^2\, d\rho \int_0^\infty k\, dk\, A(\rho, k) e^\gamma K_{i\rho}(k e^\gamma) J_0(kr), \tag{26}$$

где $K_\nu(z)$ и $J_m(z)$ — соответственно цилиндрические функции Мак-Дональда и Бесселя, и применимы для всех значений s и t.

В подходе II разложения по малой группе E_2 получаются только для $t = 0$. В этом случае формулы (25) упрощаются:

$$m_1\omega e^{-\gamma_s} = \frac{m_1^2 - m_3^2}{2},$$
$$\left(\frac{r_s}{\omega}\right)^2 = \frac{4}{(m_1^2 - m_3^2)(m_4^2 - m_2^2)}\left[s - m_1^2\left(1 + \frac{m_4^2 - m_2^2}{m_1^2 - m_3^2}\right) - m_2^2\left(1 + \frac{m_1^2 - m_3^2}{m_4^2 - m_2^2}\right)\right] \tag{27}$$

(в полном согласии с работой [14]). В этом специальном случае, полагая

$$B_k(\gamma) = \int_0^\infty \rho^2\, d\rho\, A(\rho, k) e^\gamma K_{i\rho}(k e^\gamma),$$

мы получаем из (26) обычное разложение по E_2.

Г. Малая группа $O(3, 1)$

В подходе I амплитуда рассеяния всегда разлагается по неприводимым представлениям группы Лоренца $O(3, 1)$, и это можно сделать для произвольных значений кинематических переменных.

В подходе II группа $O(3,1)$ есть малая группа, соответствующая фиксированному нулевому вектору, так что соответствующие разложения имеют место только в специальном случае, когда передача импульса $p_1 - p_3$ есть нулевой вектор. Это соответствует упругому рассеянию вперед, т. е.

$$m_1 = m_3, \quad m_2 = m_4, \quad t = 0. \tag{28}$$

Салам и др. [15] предложили обобщение, в котором разложение по $O(3,1)$ применяется для амплитуд с произвольным t и произвольными спинами. В отличие от В—С они разлагают только по одной переменной (а именно по $\operatorname{ch}\beta_s$ H-системы), оставляя зависимость от t (или α_s) в коэффициентах разложения.

Разложения в подходе I можно, конечно, применять и в случае (28), а также редуцировать к одномерным разложениям. В S-системе последние можно получить непосредственно, полагая $\theta = 0$; в H- и O-системах необходим предельный переход от выбранного пространственноподобного или изотропного вектора к нулевому вектору. В частности, для H-системы (28) означает

$$\alpha = 0, \quad \operatorname{ch}\beta = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_1m_2},$$

и из (15) мы получаем разложение

$$f(0,\beta) = \int_0^\infty q \operatorname{th}\pi q \, dq \, B_q(0) P_{-1/2+iq}(\operatorname{ch}\beta). \tag{29}$$

Соответствующие разложения в O-системе легко можно получить; здесь же мы не будем углубляться в детали.

Д. Инвариантные разложения и кроссинг-преобразование

Вопросы, относящиеся к кроссинг-преобразованию из одного канала реакции в другой, приобретают специальное значение в связи с лоренц-инвариантными разложениями. Если предполагать определенные аналитические свойства амплитуд, то кроссинг-преобразование можно рассматривать как аналитическое продолжение из физической области одного канала в физическую область другого. Выполняя такие преобразования при фиксированных значениях несущественных параметров и фиксированном выборе существенных, мы получаем преобразование из стандартной лоренцевой системы в одном канале, вообще говоря, в другую систему в кросс-канале, связанную с первой комплексным преобразованием Лоренца [24].

В частности, сравнивая формулы (7) и (14), мы видим, что параметры системы Брейта в S-канале связаны с параметрами с. ц. м. в t-канале:

$$\alpha_s + a_t = i\frac{\pi}{2}, \quad \beta_s = i\theta_t. \tag{30}$$

Такая связь имеет простую геометрическую интерпретацию, обсуждаемую в Приложении[1].

Бойс [16] рассмотрел разложение по β_s, соответствующее малой группе $O(2,1)$, и показал, что если амплитуда удовлетворяет одномерному дисперсионному соотношению для фиксированного t, то это разложение есть аналитическое продолжение разложения по $O(3)$ в t-канале по переменной $\cos\theta_t$.

[1] Формулу (30) можно назвать «правилом подстановки»; она дает связь между координатами, видимыми двумя наблюдателями (один в точке s, а другой — в нефизической точке t), с использованием одного и того же семейства координатных поверхностей.

Отложим обсуждение проблемы аналитического продолжения и кроссинг-преобразования для двумерных разложений в подходе I до последующих публикаций. Здесь мы хотим только подчеркнуть, что свойства этих разложений относительно кроссинг-преобразования должны быть простыми, поскольку параметр ρ, фигурирующий в них, связан с операторами Казимира группы Лоренца и, таким образом, инвариантен также и относительно комплексной группы Лоренца, реализующей переходы между каналами. Однако ожидается, что для доказательства действительности аналитического продолжения от (15) к (8) нам необходимо будет постулировать двойные дисперсионные представления по s и t мандельстамовского типа.

4. Выводы

Суммируем основные выводы, следующие из сказанного выше.

1. Методы В—С дают возможность писать лоренц-инвариантные разложения по базисным функциям неприводимых представлений $O(3,1)$ для произвольных значений кинематических переменных s и t. Системы координат S, H и O соответствуют, с одной стороны, различным лоренцевым системам отсчета и, с другой стороны, редукции группы $O(3,1)$ соответственно к ее подгруппам $O(3)$, $O(2,1)$ и E_2.

2. Разложения в S- и H-системах можно получить из «пуанкаре-инвариантных разложений» по малым группам $O(3)$ и $O(2,1)$, если коэффициенты в разложениях по малым группам разложить по остающемуся «существенному» параметру определенным образом, предписываемым структурой представлений $O(3,1)$.

3. Разложение в O-системе (для произвольных t) ость обобщение разложения по малой группе E_2, применимого только для $t=0$. Для $t=0$ лоренц-инвариантные разложения в O-системе связаны с разложениями по малой группе E_2 таким же образом, как разложения в S- и H-системах связаны соответственно с представлениями малых групп $O(3)$ и $O(2,1)$.

4. Из общего обсуждения следует, что рассматриваемые разложения (в подходе I) пуанкаре-инвариантны в обычном смысле, но также удовлетворяют условию «расширенной лоренц-инвариантности», определенной в разделе 2.

5. Мы уже подчеркивали, что «расширенная лоренц-инвариантность» есть предположения о сходимости интегралов и рядов, фигурирующих в разложениях. Формулы, написанные в настоящей работе, предполагают квадратичную интегрируемость, поскольку амплитуда разлагается только по унитарным представлениям из основной серии. Однако это никоим образом не необходимо, и формулы В—С равно применимы для дополнительных серий и для неунитарных представлений.

Таким образом, если известно асимптотическое поведение амплитуды, то можно найти более общие разложения, включающие в себя интегралы по определенным контурам в комплексной ρ-плоскости, и затем сдвигать контур к вещественной оси, выделяя вклады сингулярностей в ρ-плоскости (например, «лоренцевых полюсов» [12–13]).

6. Разложения в H-системе непосредственно связаны с проблемой «дочерних траекторий» [22, 25], поскольку в этом случае $O(3,1)$ редуцируется к $O(2,1)$. Но предлагаемый общий формализм не приводит к определенным заключениям даже для упругого рассеяния вперед. Действительно, из (29) можно видеть, что коэффициент разложения $B_q(0)$ $(t=0)$ зависит от «комплексного момента» q неизвестным образом (поскольку коэффициенты A^+ и A^- в (15) зависят как от ρ, так и от q), так что существование доминирующего лоренцевского полюса по ρ не приводит к определенным следствиям для полюсов по q. Однако гипотеза существования дочерних траекторий Редже, расположенных через одинаковые интервалы, может

быть введена в теорию, если сделать определенные динамические предположения о поведении $A^+(\rho, q)$ и $A^-(\rho, q)$ как функций.

С другой стороны, физические аргументы против существования дочерних траекторий приводились различными авторами [25], и вопрос о том, каковы правильные динамические предположения, далеко не решен. По-видимому, существование дочерних траекторий эквивалентно предположению о «динамической» симметрии определенного типа.

7. Следует отметить, что лоренц-инвариантные разложения не обязательно связывать с разложениями по малым группам — они являются более общими, поскольку существует много других координатных систем, для которых оператор Лапласа на гиперболоиде допускает разделение переменных [21].

8. Имеется еще одно свойство инвариантных разложений, которое мы обсудим в последующих публикациях. Коэффициенты в инвариантных разложениях амплитуд могут быть разложены далее на члены, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы перестановок трех аргументов s, t и u $(s + t + u = \text{const})$. Таким способом мы получим дополнительные квантовые числа.

В последующих публикациях мы планируем вернуться к проблеме лоренц-инвариантных разложений для произвольных спинов, обсудить их связь с аналитическими свойствами амплитуд, установить их свойства относительно кроссинг-преобразования и применить их к отдельным физическим процессам.

В заключение мы благодарим Р. Мир-Касимова и М. Углиржа за полезные обсуждения.

Приложение

Системы координат в пространстве Лобачевского

Мы кратко суммируем здесь основные свойства систем координат, используемых в этой работе. Детальное обсуждение соответствующей кинематики уже было опубликовано в работах [5, 26]. Следует подчеркнуть, что хотя знание геометрии Лобачевского никоим образом не является необходимым для понимания лоренц-инвариантных разложений, оно упрощает кинематику и дает возможность заменить сложные алгебраические вычисления простым геометрическим рассмотрением.

Кинематика процесса иллюстрируется «кинематическим графиком», т. е. четырьмя точками, представляющими 4-скорости $u = p/m$ на верхней полости гиперболоида $u^2 = 1$ в пространстве Минковского 4-импульсов. На этом языке параметризация процесса $1 + 2 \to 3 + 4$ расчленяется на три этапа:

1. Выбор системы координат определенного типа на гиперболоиде.

2. Специальная локализация кинематического графика на гиперболоиде (т. е. идентификация какой-либо скорости, например с. ц. м., с началом системы координат и определенных направлений в пространстве скоростей — с координатными осями).

3. Выражение компонент импульса одной из начальных или конечных частиц через выбранные координаты.

Обсудим эти этапы отдельно.

Этап 1. В этой работе мы рассматриваем только три типа систем координат, а именно: S-, H- и O-системы (см. рис. 1, *а*, *б*, *в*). С теоретико-групповой точки зрения эти системы соответствуют редукциям

$$O(3,1) \supset O(3) \supset O(2), \quad O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(2), \quad O(3,1) \supset E_2 \supset O(2).$$

Геометрически это системы, имеющие один центр и аксиальную симметрию. Это означает, что в каждой из этих систем одно семейство координатных поверхностей есть семейство концентрических сфер (гиперсфер, орисфер); второе получается вращением вокруг оси $0z$ связки линий, пересекающихся в соответствующем центре; третье семейство есть связка плоскостей, пересекающихся вдоль оси $0z$ (строгие определения см. в работе [23]).

Опишем отдельные системы. Мы всегда выбираем $V = (1,0,0,0)$ в качестве начала системы координат на гиперболоиде и, пользуясь аксиальной симметрией, выбираем угол φ в плоскости $0xy$ в качестве одной из координат. Этот угол не нарисован на трехмерных рис. 1.

В S-системе мы помещаем центр в точку $V = (1,0,0,0)$, получая, таким образом, семейство сфер, одна из которых указана окружностью на рис. 1, *а*, и семейство прямых, пересекающихся в вершине V. Точка A теперь параметризуется «расстоянием» $a = \widehat{VD}$ (более точно — области под гиперболой на рис. 1, *а*) до сферы, на которой она лёжит, и углом (на сфере).

В H-системе мы помещаем центр в точку (0,0,0,1) на однополостном гиперболоиде (мнимое пространство Лобачевского), получая семейство гиперсфер (гиперболоидов, получаемых на рис. 1, *б* сечением исходного гиперболоида плоскостью, перпендикулярной Oz) и семейство расходящихся прямых (одна из которых проходит через V). Точка A теперь параметризуется расстоянием $\alpha = \widehat{VD}$ до соответствующего двумерного гиперболоида и расстоянием $\beta = \widehat{DA}$ вдоль гиперболоида.

В O-системе мы помещаем центр в точку $(\omega,0,0,\omega)$ светового конуса, получая семейство орисфер (парабол на рис. 1, *в*), получаемых сечением гиперболоида плоскостями, перпендикулярными образующей $(\omega,0,0,-\omega)$, и семейство параллельных прямых, одна из которых проходит через V. Тогда A параметризуется расстоянием $\gamma = \widehat{VD}$ до орисферы и r, где $re^{-\gamma}$ — расстояние вдоль орисферы. Эти геометрические свойства лучше всего видны, если ввести новые координаты:

$$W_1 = re^{-\gamma}, \quad W_2 = u_0 + u_3 = e^{\gamma} + r^2 e^{-\gamma}, \quad W_3 = u_0 - u_3 = e^{-\gamma}.$$

Следовательно, γ фиксирует сечение $u_0 - u_3 = \text{const}$ (орисферу) и W_1, W_2 — координаты на орисфере (параболе) $W_1^2 + 1 = e^{-\gamma} W_2$. Таким образом, $r = \text{const}$ соответствует связке параллельных прямых и параболоид обладает евклидовой геометрией с масштабным фактором $e^{-\gamma}$, определяемым расстоянием сечения от начала.

O-система в пространстве скоростей имеет интересную физическую интерпретацию. Скорость (относительная) наблюдателя может быть измерена, если определять отношение частоты ω' реального фотона, видимой наблюдателем, к некоторой стандартной частоте ω (см. формулу (24) и следующий за ней текст).

Таким образом, в O-системе должна быть выбрана еще одна точка, а именно система, в которой K имеет частоту ω. Эта неоднозначность в определении K, упомянутая в тексте, существует благодаря тому, что «расстояние» до K бесконечно в любой системе координат, и только разности двух таких расстояний имеют физический смысл. С этой точки зрения одна система координатных линий соответствует наблюдателям, которые все измеряют одну и ту же частоту, а другая система — тем, которые измеряют одно и то же направление распространения.

Этапы 2 и 3. Теперь обсудим локализацию кинематического графика на гиперболоиде, т. е. выбор специальных лоренцевых систем отсчета. Их удобно иллюстрировать кинематическими графиками, нарисованными в модели Бельтрами пространства Лобачевского. В этой работе мы всегда полагаем $\varphi = 0$, так что можно пользоваться двумерной моделью, в которой световой конус изображается единичным кругом.

Внутренность его есть вещественное пространство Лобачевского, соответствующее $u^2 = 1$, а внешность — мнимое пространство, соответствующее $u^2 = -1$. Связь между кинематическими графиками на гиперболоиде и в модели Бельтрами получается, если ввести неоднородные координаты

$$\operatorname{th} z_i = \frac{p_i}{p_0}, \tag{П.1}$$

так что расстояние между двумя точками равно гиперболическому тангенсу их относительной скорости. В модели Бельтрами прямые линии проектируются в прямые линии, а углы искажаются.

Кинематические графики па плоскости Бельтрами даны на рис. 2, *а*, *б*, *в*, соответственно для S-, H- и O-систем. Точки X и Z всегда есть неоднородные координаты параметризуемой скорости (т. е. они получаются, если выпустить перпендикуляры из соответствующей точки на оси z_1 и z_3). Точка D есть пересечение z_3 и сферы (гиперсферы, орисферы), на которой находится параметризуемая точка, так что расстояние от начала (вершины гиперболоида) есть соответственно $\operatorname{th} a$, $\operatorname{th}\alpha$ и $\operatorname{th}\gamma$.

Линия $P1$ ($P2$) на рис. 2, *в* (2, *в*$'$) параллельна оси z_3. Вдоль осей фактически отложены $\operatorname{th} z_1$ и $\operatorname{th} z_3$. Пользуясь рис. 2 и элементарными формулами тригонометрии в геометрии Лобачевского, легко проверить, что неоднородные координаты параметризуемой точки точно такие, какие мы бы получили из формулы (П. 1).

S-система удобна специально для описания рассеяния в с. ц. м. Мы идентифицируем скорость S с. ц. м. с вершиной V (начало системы координат на рис. 2, *а*) и направляем ось z_3 по $\mathbf{u}_1$ в с. ц. м.

Удобно связать H-систему с системой Брейта и идентифицировать скорость B этой системы с вершиной V и направить ось z_3 по $\mathbf{u}_4$ в системе Брейта.

Как было упомянуто выше, можно ввести два различных типа O-систем. Рис. 2, *в* соответствует «брейтоподобной» O-системе, в которой $\mathbf{u}_4$ направлен вдоль z_3 и точка B', соответствующая стандартизации K (см. (21)), идентифицируется с вершиной V. «Ц.м.-подобная» O-система иллюстрируется рис. 2, *в*$'$, в котором z_3 направлена вдоль $\mathbf{u}_3$ и скорость S', получаемая стандартизацией

$$K' = p_3 \frac{m_4}{m_3} e^{-A'} + p_4,$$

идентифицируется с началом.

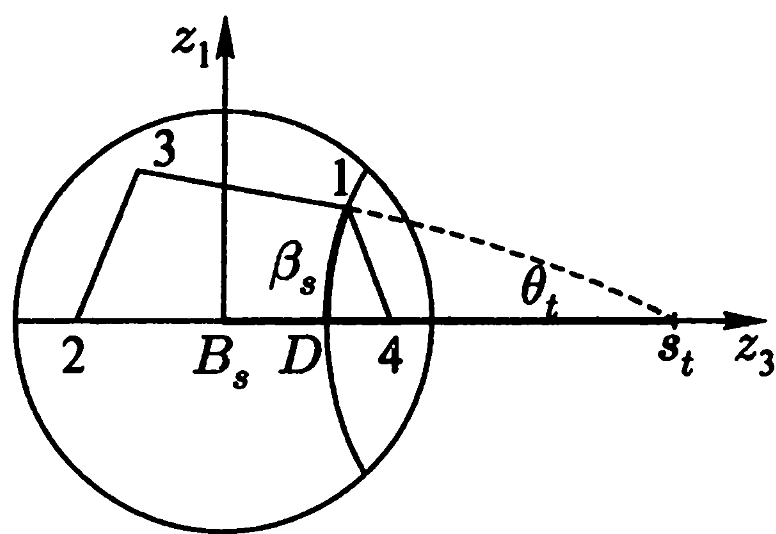


Рис. 3. Связь между рассеянием в s- и t-каналах в H- и S-системах ($\overline{B_s D} = \operatorname{th}\alpha$, $\overline{DS_t} = \operatorname{th} a_t$)

Рисунки, как описано выше, всегда соответствуют физической области s-канала. Однако мы можем также использовать их для описания процессов в l-канале и таким образом получить геометрически правила подстановки (30). Действительно, рассмотрим точку t на рис. 2, *б* (точка (0,0,0,1) на рис. 1, *б*) в качестве начала S-системы в нефизической области t-канала (см. рис. 3). Расстояние между B_s (скорость системы Брейта в s-канале) и S_t (скорость с. ц. м. в t-канале) есть $\operatorname{th} B_s S_t = \infty$, так что имеем $B_s S_t = i\pi/2$. Непосредственно из рис. 3 теперь можно получить соотношения (30):

$$\beta_s = i\theta_t, \quad \alpha_s + a_t = i\frac{\pi}{2}.$$

Литература

1. *Долгинов А. З.* ЖЭТФ, **30**, 746, 195с; *Долгинов А. З., Топтыгин И. Н.* ЖЭТФ, **35**, 794, 1958; **37**, 1441, 1959; *Долгинов А. З., Москалев А. Н.* ЖЭТФ, **37**, 1697, 1959.
2. *Шапиро И. С.* ДАН СССР, **106**, 647, 1956; Phys. Lett., **1**, 293, 1962.
3. *Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **46**, 1793, 1964.
4. *Винтерниц П., Смородинский Я. А., Углирж М.* ЯФ, **1**, 163, 1965; *Винтерниц П., Фриш И.* ЯФ, **1**, 889, 1965.
5. *Смородинский Я. А.* Атомная энергия, **14**, 110, 1963; Fortschr. Physik, **13**, 157, 1905.
6. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **3**, 383, 1966.
7. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Препринт Р2-3250, ОИЯИ, 1967.
8. *Liberman M. A., Smorodinsky Ya. A., Sheftel M. B.* Preprint E2–3294, JINR, 1967.
9. *Lukač J., Smorodinsky Ya., Winternitz P.* Preprint E2–2982, JINR, 1967.
10. *Joos H.* Fortschr. Physik, **10**, 65, 1962.
11. *Joos H.* Lectures in Theoretical Physics, **VIIA**, Boulder, Colorado, 1965.
12. *Toller M.* Preprints Th-770, Th-780, CERN, 1967 (там же см. ссылки на предыдущие работы).
13. *Sciarrino A., Toller M.* Intern. Report 108, Instituto di Fisica G. Marconi, Roma, 1966.
14. *Boyce J. F., Delbourgo R., Abdus Salam, Strathdee J.* Preprint 1C/67/9, Trieste, 1967.
15. *Delbourgo R., Abdus Salam, Strathdee J.* Phys. Lett., **25B**, 230, 1967.
16. *Boyce J. F.* J. Math. Phys., **8**, 675, 1967.
17. *Hadjioannou F. T.* Nuovo Cim., **44**, 185, 1966.
18. *Akyeampong D. A., Boyce J. F., Rashid M. A.* Preprint IC/1/67/59, Triteste, 1967.
19. *Anderson R. L., Raczka R., Rashid M. A., Winternitz P.* Preprints IC/67/50, IC/67/64, Trieste, 1907.
20. *Moussa A., Stora R.* Lectures in Theoretical Physics, **VIIA**, Boulder, Colorado, 1965.
21. *Roffmann E. H.* Phys. Rev. Lett., **16**, 210, 1966.
22. *Волков Д. В., Грибов В. Н.* ЖЭТФ, **44**, 1068, 1963; *Domokos G., Suranyi P.* Nucl. Phys., **54**, 529, 1964; *Coldberger M. L., Jones C. E.* Phys. Rev., **150**, 1260, 1966; *Freedman D., Wang J.* Phys. Rev., **153**, 1596, 1967; *Freedman D., Jonos C. E., Wang J.* Phys. Rev., **155**, 1645, 1967; *Domokos G.* Phys. Rev., **159**, 1387, 1967; *Freedman D., Wang J.* Phys. Rev. Lett., **18**, 863, 1967; *Domokos G.* Phys. Lett., **24B**, 293, 1967; *Durand L.* Phys. Rev., **154**, 1537, 1967; *Taylor J. C.* Preprint 19-16, Oxford, 1967.
23. *Олевский М. П.* Матем. сб., **27**, 379, 1950.
24. *Streater R. F., Wightman A. S.* PCT, Spin and Statistics and all that. W. A. Benjamin, Inc., 1964.
25. *Oakes R.* Phys. Lett., **24B**, 154, 1967; R. Omnés, E. Loader. Cambridge Univ. preprint, 1967; H. F. Jones, M. D. Scadron. Imperial College preprint, 1967.
26. *Смородинский Я. А.* Вопросы физики элементарных частиц. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1963.

Об интегральных преобразованиях, связанных с уравнением Клейна—Гордона

Я. А. Смородинский, Е. Л. Сурков

1. Введение

В квантовой теории рассеяния используется известное разложение плоской волны на сферические волны. Его можно интерпретировать как разложение решения уравнения Пуассона по неприводимым представлениям группы вращений. Естественно также написать аналогичное разложение релятивистской плоской волны $\exp(-ipx)$ и других решений уравнения Клейна—Гордона по неприводимым представлениям группы Лоренца. В этой заметке получены соответствующие интегральные преобразования, связанные как с уравнением Клейна—Гордона $(\widehat{p}^2 - m^2)\varphi = 0$, так и с уравнением Даламбера $\widehat{p}^2\psi = 0$. Эти преобразования проще всего получить с помощью орисферного преобразования Гельфанда—Граева, связывающего гиперболоид $p^2 = 1$ с конусом $k^2 = 0$.

Заметим, что эта связь может быть использована и при разложении амплитуды рассеяния, так как амплитуду четыреххвостки можно интерпретировать как функцию одного из ее концов. Так, например, амплитуду комптон-эффекта можно считать функцией электронного конца, соответственно заданной на гиперболоиде $p^2 = m^2$, или же функцией фотонного конца, заданной на конусе $k^2 = 0$. Этот случай может служить хорошей иллюстрацией двух разных реализаций представлений группы Лоренца на конусе и гиперболоиде.

2. Уравнение Клейна—Гордона

Начнем с очевидного замечания. Преобразование Фурье переводит решения волнового уравнения Клейна—Гордона в координатном пространстве

$$(\Box_x + 1)\varphi(x) = 0 \tag{1}$$

в функции $f(p)$, заданные на гиперболоиде $p^2 = 1$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ipx} f(p)\, \theta(p_0)\, \delta\big(p^2 - 1\big)\, d^4p, \tag{2}$$

$$f(p)\, \theta(p_0)\, \delta\big(p^2 - 1\big) = \int e^{ipx} \varphi(x)\, d^4x \tag{2a}$$

(здесь и в дальнейшем мы положим для простоты, что масса $m = 1$, и рассмотрим положительно-частотные решения уравнения (1)).

С точки зрения представлений группы Лоренца проще изучать (в частности, разлагать на неприводимые компоненты) функции, заданные на конусе $k^2 = 0$. Орисферное преобразование Гельфанда—Граева [1], уже применявшееся [2] при

инвариантном разложении релятивистских амплитуд, позволяет перейти с гиперболоида $p^2 = 1$ на конус $k^2 = 0$:

$$F(k) = \int \delta(kp - 1)\, f(p)\, \theta(p_0)\, \delta\left(p^2 - 1\right) d^4p, \tag{3}$$

$$f(p) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bigg|_{t=1} \int \delta(kp - t)\, F(k)\, \theta(k_0)\, \delta\left(k^2\right) d^4k. \tag{3a}$$

Сделаем еще один шаг. Будем считать, что функция на конусе $F(k)$ есть фурье-образ некоторой волновой функции $\psi(y)$, удовлетворяющей уравнению Клейна—Гордона с нулевой массой

$$\Box_y \psi(y) = 0. \tag{4}$$

Теперь у нас есть четыре пространства: (x), (p), (k), (y), связанные тремя парами преобразований

$$(x) \leftrightarrow (p), \quad (p) \leftrightarrow (k), \quad (k) \leftrightarrow (y).$$

В разделе 3 мы приведем оставшиеся три пары интегральных преобразований

$$(x) \leftrightarrow (k), \quad (y) \leftrightarrow (p), \quad (x) \leftrightarrow (y).$$

В разделе 4 будет проведен обобщенный анализ Фурье в пространстве (x) (в (p) и (k) он проделан в [1]), т. е. разложение $\varphi(x)$ на компоненты, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы Лоренца. И, наконец, в разделе 5 это разложение будет доведено до конца в некоторых системах координат.

3. Интегральные преобразования $(x) \leftrightarrow (k)$, $(y) \leftrightarrow (p)$, $(x) \leftrightarrow (y)$

1. С помощью (2) и (3) получаем интегральное преобразование с ядром $G(k, x)$, которое переводит функцию $F(k)$, заданную на конусе $k^2 = 0$, в решение уравнения Клейна—Гордона (относительно ограничений на $F(k)$ см. [1]):

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^5 i} \int G(k, x)\, F(k) \frac{d^3k}{2k_0}, \tag{5}$$

$$G(k, x) = \frac{1}{\pi i} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bigg|_{t=1} \int e^{-ipx} \delta(kp - t) \frac{d^3p}{2p_0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bigg|_{t=1} \frac{1}{kx} \exp\left\{-\frac{i}{2}\left[\frac{kx}{t} + \frac{tx^2}{kx}\right]\right\};$$

$$x_0 = x_0 - i\varepsilon.$$

При этом, конечно, $G(k, x)$ удовлетворяет волновому уравнению (1):

$$(\Box_x + 1) G(k, x) = 0, \quad k^2 = 0.$$

Обратное преобразование сводится к одномерному преобразованию Фурье на конусе $x^2 = 0$ в (x) в направлении вектора k:

$$F(k) = (2\pi)^3 \int_{\infty}^{-\infty} e^{it} \varphi(tk)\, dt; \quad \varphi(tk) \equiv \varphi(tk_0, t\mathbf{k}). \tag{5a}$$

Таким образом, решения уравнения Клейна—Гордона можно разлагать не только по плоским волнам, но и по фотоноподобным функциям $G(k, x)$ (фотоноподобным в том смысле, что они заданы на конусе $k^2 = 0$).

Из (5) и (5а) также следует, что, зная волновую функцию на световом конусе $x^2 = 0$, мы можем восстановить ее значения во всем координатном пространстве:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int G(k, x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(tk) e^{it}\, dt\, \frac{d^3k}{2k_0}.$$

2. Пространство решений волнового уравнения с нулевой массой связано с гиперболоидом $p^2 = 1$ с помощью интегрального преобразования с ядром $G(p, y)$

$$\psi(y) = -\frac{1}{(2\pi)^5} \int G(p, y) f(p)\, \frac{d^3p}{2p_0}, \tag{6}$$

$$f(p) = 4\pi \int t^2 e^{it} \psi(tp)\, dt, \tag{6a}$$

где[1])

$$G(p, y) = -\frac{1}{2\pi} \int e^{-iky} \delta(kp - 1) \frac{d^3k}{2k_0} = e^{-ipy} \frac{\sin\left[(py)^2 - y^2\right]^{1/2}}{\left[(py)^2 - y^2\right]^{1/2}},$$

$$\Box_y G(p, y) = 0, \quad p^2 = 1.$$

3. Интегральное преобразование, переводящее решение $p(x)$ волнового уравнения с массой, равной единице, в решение $\psi(y)$ уравнения Клейна Гордона без массы (4), легко получается с помощью (5а) и (6а)

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ixy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it} \varphi(tx)\, dt\right] \theta(x_0) \delta\left(x^2\right) d^4x. \tag{7}$$

Здесь интегрирование ведется сначала вдоль луча tx, лежащего на световом конусе, а затем по верхней поле конуса $x^2 = 0$. Обратное преобразование очень похоже: сначала интегрируем вдоль луча ty, затем y пробегает верхнюю полу двуполого гиперболоида $y^2 = 1$

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi^3} \int e^{-ixy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{it} \psi(ty)\, dt\right] \theta(y_0)\, \delta(y^2 - 1) d^4y. \tag{7a}$$

4. Приведем еще одну интересную функцию, которая удовлетворяет одновременно двум волновым уравнениям — с массой и без массы:

$$(\Box_x + 1) F(x, y) = 0, \quad \Box_y F(x, y) = 0,$$

$$F(x, y) = \int e^{-iky} \frac{1}{kx} \exp\left\{\frac{i}{2}\left[kx + \frac{x^2}{kx}\right]\right\} \frac{d^3k}{2k_0} =$$

$$= \pi^2 \left[(xy)^2 - x^2 y^2\right]^{-1/2} \left\{H_0^{(1)}(\sqrt{z_+}) - H_0^{(1)}(\sqrt{z_-})\right\}.$$

Здесь $z_\pm = x^2 - 2xy \pm 2\left[(xy)^2 - x^2 y^2\right]^{1/2}$. Отметим, что произвольная функция вида

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(xy)^2 - x^2 y^2}} \Phi(z_\pm)$$

является решением уравнения $\Box_y \psi(x, y) = 0$.

---

[1]) В системе, где $p = (1, 0, 0, 0)$, аргумент в следующей ниже формуле есть просто $|y|$.

4. Разложение на неприводимые компоненты

Решения уравнения Клейна—Гордона образуют, очевидно, представление группы Лоренца, поэтому $\varphi(x)$ необходимо разложить на компоненты, преобразующиеся по ее неприводимым представлениям. Проще всего такое разложение выглядит на конусе $k^2 = 0$: если $F(k)$ — функция на конусе, то $F(k, \sigma)$ — ее однородная компонента степени однородности $\sigma(F(tk, \sigma) = t^\sigma F(k, \sigma))$ — будет преобразовываться по неприводимому представлению $(1 + \sigma, 1 + \sigma)$ группы Лоренца [1]

$$F(k, \sigma) = \int_0^\infty F(tk)t^{-\sigma-1}\,dt, \tag{8}$$

$$F(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} F(k, \sigma)d\sigma. \tag{8a}$$

При $\sigma = -1 + i\rho$ представление будет унитарным. С помощью преобразований (5), связывающих (x) с конусом $k^2 = 0$ и (8), мы можем разложить $\varphi(x)$ на неприводимые компоненты $F(k, \sigma)$:

$$F(k,\sigma) = (2\pi)^3\Gamma(\sigma+1)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(tk)(-it)^{-\sigma-1}\,dt, \tag{9}$$

$$\varphi(x) = \frac{i}{8\pi^5}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma e^{-i\pi(\sigma+1)/2}\sigma(\sigma+1)(\sqrt{x^2})^{\sigma+1}H^{(2)}_{\sigma+1}(\sqrt{x^2})\int_\Gamma (kx)^{-\sigma-2}F(k,\sigma)\,d^2k. \tag{9a}$$

Здесь $\arg\sqrt{x^2} = -\pi/2$ при $x^2 < 0$, $\arg kx = -\pi$ при $kx < 0$, d^2k — инвариантная мера на контуре $\Gamma(k) = 1$, пересекающем каждую образующую конуса $k^2 = 0$, так что $k_0^{-1}\,d^3k = d\Gamma\,d^2k$. С помощью (9) нетрудно получить k, σ-компоненту плоской волны

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\,e^{-ipx}; \quad F(k, \sigma) = (kp)^\sigma.$$

5. Системы координат

Разложение на неприводимые компоненты (9) доведем до конца в некоторых системах координат, выбирая различные контуры Γ.

1. Сферическая система координат: контур Γ — сечение конуса плоскостью $k_0 = 1$; $F(\mathbf{k}, \sigma)$ зависит от единичного вектора $\mathbf{k}$ и ее можно разложить по сферическим функциям:

$$F(\mathbf{k}, \sigma) = \sum_{l,m} a_{lm}(\sigma)Y_{lm}(\mathbf{k}). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), (9а), получаем после некоторых вычислений разложение $\varphi(x)$ на неприводимые компоненты в сферической системе координат:

$$\varphi(x) = \frac{i}{2(2\pi)^{7/2}} \sum_{l,m} \frac{1}{|\mathbf{x}|} Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{i\pi(\sigma+1)/2}(\sigma+1)\,\Gamma(-\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma-l-1)\,\Gamma(-\sigma+l)} \times$$
$$\times H^{(2)}_{\sigma+1}(\sqrt{x^2})Q_l^{-\sigma-1}\left(\frac{x_0}{|\mathbf{x}|}\right) a_{lm}(\sigma)\,d\sigma, \quad (11)$$

$$a_{lm}(\sigma) = (2\pi)^3\Gamma(\sigma+1) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int d\mathbf{n}(-it)^{-\sigma-1} Y^*_{lm}(\mathbf{n})\,\varphi(tn), \quad (11a)$$

$n_0 = 1$, $\mathbf{n}^2 = 1$, $d\mathbf{n} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ в (11) при $x^2 < 0$ $x_0 = x_0 - i\varepsilon$,

$$\arg\sqrt{x^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

2. Приведем, наконец, разложение плоской волны $\exp(-ipx)$ на неприводимые компоненты в сферической системе координат:

$$e^{-ipx} = -2\pi i \sum_{l,m} \frac{1}{|\mathbf{x}||\mathbf{p}|} Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) Y^*_{lm}\left(\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right) \times$$
$$\times \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sin\pi\sigma e^{-i\pi(\sigma+1)/2} H^{(2)}_{\sigma+1}(\sqrt{x^2}) Q_l^{-\sigma-1}\left(\frac{x_0}{|\mathbf{x}|}\right) Q_l^{\sigma+1}\left(\frac{p_0}{|\mathbf{p}|}\right) d\sigma.$$

3. Разложения, подобные (11), (11a), можно провести и в остальных системах координат на конусе, перечисленных в [2], — они сводятся к вычислению при различных Г:

$$\int\limits_{\Gamma} (kx)^{-\sigma-2} F(k,\sigma)\, d^2k.$$

При $x^2 > 0$ эти интегралы вычислены в [2], при $x^2 < 0$ — в [3], поэтому мы приведем здесь только результаты для $x^2 = 0$. В этом случае разложение (9) принимает вид:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} 2^{\sigma+1}\sigma\Gamma(\sigma+2) e^{-i\pi(\sigma+1)/2} \int\limits_{\Gamma} (kx)^{-\sigma-2} F(k,\sigma)\, d^2k\, d\sigma. \quad (9б)$$

4. В орисферической системе координат на конусе $x^2 = 0$

$$k_0 = 1+\rho^2, \quad k_1 = 2\rho\sin\alpha, \quad k_2 = 2\rho\cos\alpha, \quad k_3 = -1+\rho^2;$$
$$d^2k = 4\rho\, d\rho\, d\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \infty,$$
$$x_0 = q(1+R^2), \quad x_1 = 2qR\sin A, \quad x_2 = 2qR\cos A, \quad x_3 = q(-1+R^2),$$
$$0 \leqslant A \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant R \leqslant \infty, -\infty \leqslant q \leqslant \infty.$$

$$F(k,\sigma) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \Phi(\varkappa,\theta,\sigma) e^{i\varkappa\rho\cos(\theta-\alpha)} \varkappa d\varkappa\, d\theta,$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2(2\pi)^5} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma \int\limits_0^{\infty} \varkappa d\varkappa \int\limits_0^{2\pi} d\theta\, \sigma\Gamma(-\sigma-1) e^{-i\pi(\sigma+1)/2} (q)^{-\sigma-2} \times$$
$$\times \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{2(\sigma+1)} e^{i\varkappa R\cos(\theta-A)} \Phi(\varkappa,\theta,\sigma),$$

$\arg(q) = -\pi$ при $q < 0$. Обратное преобразование имеет вид:

$$\Phi(\varkappa, \theta, \sigma) = 8\pi\Gamma(\sigma+1)\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \rho\, d\rho\, (-it)^{-\sigma-1} e^{-i\varkappa\rho\cos(\theta-\alpha)} \varphi(tk).$$

5. В цилиндрической системе

$$k_0 = \operatorname{ch} b, \quad k_1 = \operatorname{sh} b, \quad k_2 = \sin\alpha, \quad k_3 = \cos\alpha, \quad d^2k = db\, d\alpha,$$
$$-\infty < b < +\infty; \quad o \leqslant \alpha \leqslant 2\pi;$$
$$x_0 = q\operatorname{ch} B, \quad x_1 = q\operatorname{sh} B, \quad x_2 = q\sin A, \quad x_3 = q\cos A,$$
$$-\infty < B < \infty, \quad 0 \leqslant A \leqslant 2\pi, \quad -\infty < q < \infty;$$
$$F(k, \sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int a_m(\tau, \sigma) e^{i(m\alpha + b\tau)}\, d\tau;$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{(2\pi)^5} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\pi(\sigma+1)/2} \sigma\Gamma(-\sigma-1)\cdot 2^{2(\sigma+1)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma[((m+\sigma+i\tau)/2)+1]\,\Gamma[((m+\sigma-i\tau)/2)+1]}{\Gamma[(m-\sigma+i\tau)/2]\,\Gamma[(m-\sigma-i\tau)/2]} (q)^{-\sigma-2} e^{i(mA+\tau B)} a_m(\tau, \sigma);$$
$$a_m(\tau, \sigma) = 2\pi\Gamma(\sigma+1) \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dB \int_0^{2\pi} dA (-it)^{-\sigma-1} e^{-i(mA+\tau B)} \varphi(tk).$$

Литература

1. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1962.
2. *Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **46**, 1793, 1964.
3. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **2**, 383, 1965.

Двумерные разложения релятивистских амплитуд, траектории Редже и дочерние полюса

П. Винтерниц, Я. А. Смородинский, М. Б. Шефтель

1. Введение

В предыдущих работах (см. [1, 2] и ссылки на предыдущие работы в [2]) мы ввели и обсуждали двумерные разложения релятивистских амплитуд для бинарных процессов рассеяния по обоим независимым кинематическим параметрам s и t (более точно, по удобным комбинациям этих параметров). Амплитуды разлагались в суммы и интегралы по базисным функциям неприводимых представлений однородной группы Лоренца $O(3, 1)$. При таком подходе группа $O(3, 1)$, вообще говоря, выступает не в качестве группы инвариантности амплитуды, а как группа движений в пространстве кинематических параметров.

В [2] мы рассматривали связь между этими двумерными разложениями и релятивистским фазовым анализом [3, 4] по различным малым группам группы Пуанкаре.

В этой работе будем рассматривать некоторые дальнейшие черты двумерных разложений. В частности, рассмотрим разложения в так называемой H-системе, соответствующей редукции $O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(2)$. Это разложение можно рассматривать как интегральное преобразование функции $f(s,t)$ в пространстве скоростей (в координатах Мандельстама), которое приводит к функции $A(\sigma, l)$, определенной в пространстве параметров — квантовых чисел, и соответствует упомянутой выше редукции. (Магнитное квантовое число m наименьшей подгруппы $O(2)$ равно нулю в бесспиновом случае.) Следующая проблема — скоррелировать аналитические свойства образа $A(\sigma, l)$ в пространстве двух комплексных переменных (σ, l) и асимптотики амплитуды при вещественных s или (и) $t \to \infty$. Мы пытаемся найти таким образом связь релятивистских разложений с теорией полюсов Редже и посмотреть, как специфическое асимптотическое поведение образа приводит к движущимся полюсам Редже. Эта связь будет продемонстрирована на потенциальном рассеянии в кулоновом поле.

Далее рассмотрим специфический случай упругого рассеяния вперед, когда группа $O(3, 1)$ фигурирует также в качестве группы инвариантности, т. е. малой группы, соответствующей нулевому вектору переданного импульса. В данном случае мы требуем, чтобы двумерные разложения при $t = 0$ (и массах, удовлетворяющих $m_1 = m_3, m_2 = m_4$) совпадали с разложением Толлера [3] для $t = 0$. Это приводит к интегральному соотношению, которому должны удовлетворять лоренцевы амплитуды (для произвольных l), что обеспечивает возможность [1] существования серий дочерних полюсов [3–6] в плоскости комплексного момента для $t = 0$, соответствующих каждому «лоренцевому полюсу». Сделав определенные естественные предположения об аналитических свойствах лоренц-амплитуд, мы получим те же

[1] Возможность в том смысле, что они могут компенсироваться нулями коэффициентов разложения (образов).

полюса и для произвольных t, но это будут фиксированные полюса, а не траектории Редже. Таким образом, мы не обнаруживаем очевидности существования дочерних траекторий Редже из чистой кинематики.

В этой статье мы ограничимся рассмотрением рассеяния бесспиновых частиц.

2. Редукция $O(3,1) \supset O(2,1)$ и поведение амплитуд при больших передачах импульса

В настоящей работе сконцентрируем внимание на разложениях в H-системе, введенных в [1]. Явные выражения для базисных функций в этой системе так же, как и прямая и обратная формулы разложений, даны в Приложении 1. Эти разложения можно интерпретировать следующим образом.

Напишем обычную формулу Редже [7] для амплитуды рассеяния (все четыре частицы со спином 0):

$$f(s,t) = -\frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(2l+1)\frac{dl}{\sin\pi l}\,a(l,t)\,P_l(\operatorname{ch}\beta). \tag{1}$$

Связь между $\operatorname{ch}\beta$ и s, t дана, например, в [2] (если все массы равны, мы имеем $\operatorname{ch}\beta = -1-(2s/(t-4m^2))$. Для $\gamma = -1/2$ формула (1) есть разложение по унитарным представлениям малой группы $O(2,1)$, соответствующее фиксированному $t<0$. Вообще же γ таково, что $a(l,t)$ голоморфна для $\operatorname{Re} l > \gamma$.

Далее разложим реджеизованную парциальную амплитуду $a(l,t)$ в интеграл так, чтобы при подстановке в (1) получилось двойное разложение по неприводимым представлениям группы Лоренца $O(3,1)$ [2)]

$$\begin{aligned} a(l,t) = -\frac{i}{8\pi\sqrt{2}}\cos\pi l\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}(\sigma+1)\,d\sigma\,\frac{\Gamma(\sigma-l+1)\,\Gamma(\sigma+l+2)}{\Gamma(\sigma+1)}\times \\ \times\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\Big\{A^+(\sigma,l)\big[P_l^{-\sigma-1}(-\operatorname{th}\alpha)+P_l^{-\sigma-1}(\operatorname{th}\alpha)\big]+ \\ +A^-(\sigma,l)\big[P_l^{-\sigma-1}(-\operatorname{th}\alpha)-P_l^{-\sigma-1}(\operatorname{th}\alpha)\big]\Big\} \equiv \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\chi(\sigma,l,t)\,d\sigma. \end{aligned} \tag{2}$$

В общем случае связь между α и s, t также дана в [2], а для равных масс мы имеем $\operatorname{sh}^2\alpha = -t/4m^2$.

Подставляя (2) в (1) для $\gamma = -1/2$ и $\delta = -1$, получаем разложение $f(s,t)$ по основной серии унитарных представлений группы Лоренца. В этом случае ($l = -1/2 + iq$, $\sigma = -1 + ip$) можно написать следующие обратные формулы:

$$a(l,t) \equiv a(l,\alpha) = -\cos\pi l\int\limits_0^\infty f(\alpha,\beta)\,P_l(\operatorname{ch}\beta)\operatorname{sh}\beta\,d\beta, \tag{3}$$

[2)] Отметим появление двух функций A^+ и A^-. H-координаты покрывают (для $\alpha>0$) только одну половину верхней полы гиперболоида ($u_3>0$), и мы должны использовать также половину нижней полы. Это приводит к введению двух амплитуд, соответственно четной и нечетной по $\operatorname{th}\alpha$.

$$A^{\pm}(\sigma,l) = -\sqrt{2}\frac{\Gamma(-\sigma-l-1)\,\Gamma(-\sigma+l)}{\Gamma(-\sigma)\cos\pi l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{ch}\alpha\,d\alpha\,a(l,\alpha)\times$$
$$\times\left[P_l^{\sigma+1}(-\operatorname{th}\alpha)\pm P_l^{\sigma+1}(\operatorname{th}\alpha)\right]. \qquad (4)$$

Если попытаться перейти к неунитарным представлениям, то следует быть более осторожными со сходимостью (4).

Пользуясь выражениями для функций Лежандра в окрестности особых точек, имеем

$$P_l^{\sigma+1}(\pm\operatorname{th}\alpha)\xrightarrow[\alpha\to\pm\infty]{}\frac{1}{\Gamma(-\sigma)}\,e^{\pm\alpha(\sigma+1)},$$
$$P_l^{\sigma+1}(\pm\operatorname{th}\alpha)\xrightarrow[\substack{\alpha\to\mp\infty\\ \operatorname{Re}(\sigma+1)>0}]{}-\frac{\sin\pi l}{\pi}\,\Gamma(\sigma+1)e^{\mp\alpha(\sigma+1)}, \qquad (5)$$
$$P_l^{\sigma+1}(\pm\operatorname{th}\alpha)\xrightarrow[\substack{\alpha\to\mp\infty\\ \operatorname{Re}(\sigma+1)<0}]{}\frac{\Gamma(-\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma+l)\Gamma(-\sigma-l-1)}\,e^{\pm\alpha(\sigma+1)}.$$

Подставляя (5) в (4), получаем условие сходимости

$$|a(l,\alpha)|_{|\alpha|\to\infty} < e^{-(1+|\operatorname{Re}\sigma+1|)|\alpha|}. \qquad (6)$$

Естественно, $|\alpha|\to\infty$ означает $l\to-\infty$, и для равных масс получаем следующее ограничение на поведение при бесконечной передаче импульса

$$|a(l,\alpha)| \equiv |a(l,t)|_{t\to-\infty} < (-t)^{-(1+|\operatorname{Re}\sigma+1|)/2}. \qquad (7)$$

В унитарном случае $\operatorname{Re}\sigma+1=0$, и мы получаем наиболее слабое условие. В общем случае для того, чтобы удовлетворить (7), нужно выбирать не слишком большие $|\operatorname{Re}\sigma+1|$. В качестве примера рассматриваем нерелятивистскую кулоновскую амплитуду (см. раздел 4). В этом случае $a(l,\alpha)\underset{\alpha\to\infty}{\sim}e^{-2\alpha}$ и (6) удовлетворяется.

Если интеграл (4) расходится, то обратное преобразование должно быть модифицировано. Этот случай будет рассмотрен отдельно.

3. Лоренцевы амплитуды и полюса Редже

Функция $a(l,t)$ может иметь сингулярность, если интеграл (2) расходится. Это может случиться или благодаря поведению подынтегральной функции при $|\sigma|\to\infty$, или за счет сингулярностей, попадающих на контур интегрирования, при конечных σ. Разберем эти два случая отдельно.

А. «Лоренц-полюса» и фиксированные полюса в комплексной l-плоскости

Рассмотрим сначала сингулярности в l-плоскости, генерируемые сингулярностями функции $\chi(\sigma,l,t)$ в (2), лежащими на контуре интегрирования при конечном $|\sigma|$. Функции Лежандра $P_\nu^\mu(z)$ — аналитические функции ν и μ для всех конечных значений этих индексов (и имеют существенную особенность при $|\nu|\to\infty$ или $|\mu|\to\infty$). Таким образом, $\chi(\sigma,l,t)$ может стать бесконечной только, если или «нормировочные» Г-функции $\Gamma(\sigma-l+1)$, $\Gamma(\sigma+l+2)$ имеют полюса на контуре интегрирования, или лоренц-амплитуды $A^{\pm}(\sigma,l)$ имеют такие сингулярности[3].

[3] Существование сингулярностей подынтегральных функций необходимо, но недостаточно для существования сингулярностей $a(l,t)$.

Поскольку единственными зависящими от t (зависящими от α) частями $\chi(\sigma, l, t)$ являются функции $P_l^{-\sigma-1}(\mp \operatorname{th}\alpha)$, то очевидно, что положение сингулярностей $a(l,t)$, генерируемых сингулярностями $\chi(\sigma, l, t)$ при конечных $|\sigma|$, не зависит от t, т. е. это фиксированные сингулярности в комплексной l-плоскости.

Фиксированные полюса в l-плоскости, если они существуют, будут доминировать при высоких энергиях в асимптотике амплитуды рассеяния для таких t, при которых они лежат справа от движущихся полюсов. Их свойства можно также исследовать, используя интегральное представление (2). Такие примеры мы дадим ниже.

Б. Лоренц-асимптотики и траектории Редже

Движущиеся полюса у $a(l,t)$ (траектории Редже) могут возникнуть в (2) только за счет интегрирования по бесконечно удаленным частям контура интегрирования. Чтобы исследовать движущиеся полюса Редже, мы должны рассмотреть лоренц-асимптотики, т. е. $A^{\pm}(\sigma, l)$ для $|\sigma| \to \infty$, и вычислить вклад этих асимптотик в $a(l,t)$.

Запишем интеграл в (2) в виде суммы трех членов

$$a(l,t) = \int_{\delta-i\infty}^{\delta-iN} \chi(\sigma,l,t)\,d\sigma + \int_{\delta-iN}^{\delta+iN} \chi(\sigma,l,t)\,d\sigma + \int_{\delta+iN}^{\delta+i\infty} \chi(\sigma,l,t)\,d\sigma = J_1 + J_2 + J_3, \tag{8}$$

где $N \gg 1$ так велико, что мы можем заменить подынтегральные функции в J_1 и J_3 их асимптотическими выражениями. Интеграл J_2 может генерировать только фиксированные сингулярности, которые уже обсуждались.

Чтобы оценить J_1 и J_3, нужно выражение для $P_l^{-\sigma-1}(\mp \operatorname{th}\alpha)$ при $\operatorname{Im}\sigma \to \pm\infty$ и фиксированном $\operatorname{Re}\sigma$. Справочная литература содержит только асимптотические выражения для $\operatorname{Re}\sigma \to \infty$, выражение же, которое нам нужно, получено в Приложении 2, а именно:

$$\begin{aligned} P_l^{\sigma+1}(\varepsilon \operatorname{th}\alpha) &\underset{|\operatorname{Im}(\sigma)+1|\to\infty}{\sim} \frac{e^{-ip}}{\sqrt{2\pi}} (-ip)^{\delta+1/2+ip}\, e^{\varepsilon(\delta+1+ip)\alpha}, \\ P_l^{-\sigma-1}(\varepsilon \operatorname{th}\alpha) &\underset{|\operatorname{Im}(\sigma)+1|\to\infty}{\sim} \frac{e^{-ip}}{\sqrt{2\pi}} (ip)^{-\delta-3/2-ip}\, e^{-\varepsilon(\delta+1+ip)\alpha}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\sigma = \delta + ip$. Формула (9) имеет место для произвольных конечных α, включая комплексные значения.

Рассмотрим интеграл J_3

$$\begin{aligned} J_3(l,\alpha) = \frac{i\cos\pi l}{8\pi\sqrt{2}} \int_N^{\infty} p\,dp \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} \Big\{ &[A^+(\delta+ip,l) + A^-(\delta+ip,l)]\, e^{(\delta+1+ip)\alpha} + \\ &+ [A^+(\delta+ip,l) - A^-(\delta+ip,l)]\, e^{-(\delta+1+ip)\alpha} \Big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Чтобы продолжить вычисление, нужно знать что-либо об асимптотическом поведении лоренц-амплитуд $A^{\pm}(\sigma, l)$, т. е. сделать определенные физические предположения, которые должны, конечно, зависеть от динамики процесса [8]. В качестве совершенно очевидного примера [9], иллюстрирующего порождение траекторий Редже лоренцевыми асимптотиками, а возможно, также и полезность предлагаемого

подхода, рассмотрим следующее предположение:

$$A^+(\sigma, l) + A^-(\sigma, l) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{e^{ipf_1(l)}}{p},$$
$$A^+(\sigma, l) - A^-(\sigma, l) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{e^{ipf_2(l)}}{p}, \tag{11}$$

где $f_1(l)$ и $f_2(l)$ — произвольные функции такие, что

$$\operatorname{Im} f_i(l) > 0, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Подставив (11) в (10), получаем

$$J_3(l, \alpha) = -\frac{\cos \pi l}{8\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} \left\{ \frac{e^{(\delta+1)\alpha} e^{iN[f_1(l)+\alpha]}}{f_1(l) + \alpha} + \frac{e^{-(\delta+1)\alpha} e^{iN[f_2(l)-\alpha]}}{f_2(l) - \alpha} \right\}. \tag{13}$$

Таким образом, предположение (11) приводит к существованию простых полюсов Редже, траектории которых можно получить, решая уравнения

$$f_1(l) + \alpha = 0,$$
$$f_2(l) - \alpha = 0 \tag{14}$$

относительно l.

Вычеты в этих полюсах Редже также можно получить непосредственно из (13). Интеграл $J_1(l, \alpha)$ можно рассмотреть полностью аналогичным образом.

Конечно, можно сделать более общие предположения об асимптотическом поведении $A^\pm(\sigma, l)$. Например, мы можем сразу получить кратные полюса Редже, полагая

$$A^+(\sigma, l) + A^-(\sigma, l) \xrightarrow[p\to+\infty]{} p^n e^{ipf_1(l)}. \tag{15}$$

4. Пример. Траектории Редже из лоренц-асимптотик для кулоновского потенциала

В качестве математического примера, иллюстрирующего метод, предложенный в предыдущем разделе, рассмотрим рассеяние заряженной частицы в нерелятивистском кулоновом поле.

Парциальную амплитуду, полученную решением уравнения Шредингера, можно записать в виде [10]

$$a(l, \alpha) = -\frac{1}{2m \operatorname{ch}\alpha} \left\{ \frac{\Gamma\left(l + 1 - \dfrac{e^2}{2m \operatorname{ch}\alpha}\right)}{\Gamma\left(l + 1 + \dfrac{e^2}{2m \operatorname{ch}\alpha}\right)} - 1 \right\}, \tag{16}$$

где мы положили энергию E равной

$$E = -m^2 \operatorname{ch}^2\alpha = \left(\frac{t}{4}\right) - m^2. \tag{17}$$

Здесь мы будем пользоваться релятивистскими разложениями (1)–(4) и релятивистскими кинематическими переменными α и β для амплитуд, полученных из нерелятивистского уравнения. В этой процедуре нет формального противоречия,

18 Зак. 198

особенно если рассматривать ее только как решаемую модель, демонстрирующую генерацию полюсов Редже лоренц-асимптотиками. Мы не пользуемся симметрией $O(3,1)$ [11] задачи кулоновского рассеяния, которая в этом плане заслуживает отдельного рассмотрения.

Амплитуда $a(l,\alpha)$ удовлетворяет условию сходимости (6) с $\operatorname{Re}\sigma = -1$, так что можно положить $\sigma - 1 + ip$ (поскольку мы рассматриваем произвольные комплексные l, то это не эквивалентно разложению по унитарным представлениям группы Лоренца). В принципе, лоренц-амплитуды $A^{\pm}(\sigma,l)$ для кулоновского рассеяния можно получить подстановкой (16) в (4). Однако нет необходимости производить интегрирование явно, поскольку нам нужен только ведущий член при $p\to\pm\infty$.

Используя (4) и (9), получаем

$$A^{\pm}(\sigma,l) \underset{|p|\to\infty}{\sim} \frac{i\sqrt{2}}{\cos\pi lp}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{ch}\alpha\, d\alpha\, a(l,\alpha)\left[\mp e^{(\delta+1+ip)\alpha} - e^{-(\delta+1+ip)\alpha}\right]. \tag{18}$$

Для вычисления ведущего члена в лоренц-асимптотике даже нет необходимости вычислять этот интеграл. Действительно, можно применить метод, используемый в теории полюсов Редже, а именно сдвинуть контур интегрирования в (18), добавив мнимую часть к α таким образом, чтобы значение интеграла при $|p|\to\infty$ убывало при увеличении $|\operatorname{Im}\alpha|$. Тогда можно заменить интеграл суммой по вычетам подынтегральной функции в полюсах, пересекаемых движением контура.

Для кулоновской амплитуды это дает

$$\begin{aligned}A^{\pm}(p,l) &\underset{p\to\infty}{\simeq} -\frac{i}{\sqrt{2}\cos\pi lmp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\left\{\left[\frac{\Gamma\big(l+1-(e^2)/(2m\operatorname{ch}\alpha)\big)}{\Gamma\big(l+1+(e^2)/(2m\operatorname{ch}\alpha)\big)}\right]-1\right\}\left[\mp e^{ip\alpha} - e^{-ip\alpha}\right] \simeq \\ &\simeq \frac{i}{\sqrt{2}\cos\pi lmp}\left\{\sum_n \int\limits_{c_n^-} d\alpha \frac{(-1)^n}{n!(l+1+n)\,\Gamma(2l+2+n)}\,\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha_n^-(\alpha-\alpha_n^-)}\times\right. \\ &\left.\times\, e^{-ip\alpha} \pm \sum_n\int\limits_{c_n^+} d\alpha\frac{(-1)^n}{n!(l+1+n)\,\Gamma(2l+2+n)}\,\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha_n^+(\alpha-\alpha_n^+)}\,e^{ip\alpha}\right\}.\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь

$$\operatorname{ch}\alpha_n = \frac{e^2}{2m(l+1+n)},\qquad \alpha_n^- = -\alpha_n^+ = \alpha_n,\qquad \operatorname{Im}\alpha_n < 0, \tag{20}$$

$$\left[\operatorname{ch}\alpha - \frac{e^2}{2m(l+1+n)}\right]^{-1} \simeq \left[\operatorname{sh}\alpha_n(\alpha-\alpha_n)\right]^{-1},$$

$c_n^{\pm}$ — замкнутые контура, содержащие один полюс $\alpha_n^{\pm}$.

Далее имеем

$$A^{\pm}(p,l) \underset{p\to\infty}{\simeq} \frac{i}{\sqrt{2}\cos\pi lmp}\sum_n \frac{(-1)^n 2\pi i}{n!(l+1+n)\,\Gamma(2l+2+n)}\left[-\operatorname{cth}\alpha_n^- e^{-ip\alpha_n^-} \pm \operatorname{cth}\alpha_n^+ e^{ip\alpha_n^+}\right].$$

Выполнив аналогичную процедуру для $p\to-\infty$, получим

$$A^{+}(p,l) \underset{p\to\pm\infty}{\simeq} \frac{4\pi}{\sqrt{2}\cos\pi lmp}\sum_n \frac{(-1)^n\operatorname{cth}\alpha_n}{n!(l+1+n)\,\Gamma(2l+2+n)}\,e^{\mp ip\alpha_n},\qquad A^{-}(p,l) \underset{|p|\to\infty}{\sim} 0, \tag{21}$$

т. е. ненулевые члены в A^- убывают быстрее, чем в A^+ при $|p| \to \infty$ (см. далее первую сноску).

Подставляя (21) в (10) и (8) с $J_1 = J_3$, получаем

$$a(l,\alpha) \simeq \frac{i\cos\pi l}{8\pi\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha}\int\limits_N^\infty p\,dp\,\frac{4\pi}{\sqrt{2}\cos\pi l m p}\times$$
$$\times\sum_n \frac{(-1)^n\,\mathrm{cth}\,\alpha_n}{n!(l+1+n)\,\Gamma(2l+2+n)}2\left[e^{ip(\alpha-\alpha_n)}+e^{-ip(\alpha+\alpha_n)}\right]\simeq$$
$$\simeq\frac{(-1)}{2m\,\mathrm{ch}\,\alpha}\sum_n \frac{(-1)^n\,\mathrm{cth}\,\alpha_n}{n!(l+1+n)\,\Gamma(2l+2+n)}\left[\frac{1}{\alpha-\alpha_n}-\frac{1}{\alpha+\alpha_n}\right]. \tag{22}$$

Итак, знание ведущего члена в лоренц-асимптотике дает нам в точности кулоновскую амплитуду в окрестности ее полюсов.

5. Упругое рассеяние при $t = 0$ и дочерние полюса

В предыдущих разделах мы показали, как фиксированные и движущиеся полюса реджеизованной парциальной амплитуды генерируются сингулярностями лоренц-амплитуд. Применим теперь эти соображения к проблеме дочерних полюсов Редже, обсуждаемых, например, в [3–6] в связи с $O(3,1)$-симметрией амплитуд упругого рассеяния вперед. Чтобы прояснить задачу, воспроизведем кратко теоретико-групповую аргументацию, приводящую к дочерним полюсам Редже. Изложение подобно имеющемуся у Шиаррино и Толлера [3], но более простое, поскольку мы рассматриваем только частицы со спином нуль.

Для упругого рассеяния вперед в процессе $1+2\to 3+4$ (массы удовлетворяют $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$) четырехмерный передаваемый импульс — нулевой вектор $p_1 - p_3 = p_4 - p_2 = (0,0,0,0)$. В этом случае перекрестный парциальный анализ [3, 4] означает, что амплитуду рассеяния для $t = 0$ следует представить как функцию на малой группе $O(3,1)$ и разложить ее по приведенным матричным элементам [3, 12] $D^{\nu\rho}_{JJ'\lambda}(\beta)$. Явные выражения для $D^{\nu\rho}_{JJ'\lambda}(\beta)$ даны, например, в [3, 12]; для рассеяния бесспиновых частиц мы имеем

$$D^{0\rho}_{000}(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\beta}}P^{-1/2}_{-1/2+i\rho/2}(\mathrm{ch}\,\beta) = \frac{2}{\rho}\frac{\sin(\rho\beta/2)}{\mathrm{sh}\,\beta}, \tag{23}$$

где β — та же переменная, что фигурирует в разложении в H-системе.

Таким образом, в рассматриваемом случае можно написать

$$f(s,t)|_{t=0} \equiv f(s,0) = \int\limits_0^\infty \rho^2\,d\rho\,a(\rho)D^{0\rho}_{000}(\beta). \tag{24}$$

С другой стороны, теория полюсов Редже связана с разложениями по представлениям $O(2,1)$, и мы можем разложить представления $O(3,1)$ по подгруппе $O(2,1)$. Для бесспиновых частиц это эквивалентно следующему:

$$D^{0\rho}_{000}(\beta) = \int\limits_0^\infty q\,\mathrm{th}\,\pi q\,dq\,C(\rho,q)P_{-1/2+iq}(\mathrm{ch}\,\beta). \tag{25}$$

Пользуясь свойством ортогональности

$$\int_0^\infty P_{-1/2+iq}(\operatorname{ch}\beta)\, P_{-1/2+iq'}(\operatorname{ch}\beta)\operatorname{sh}\beta\, d\beta = \frac{1}{q\operatorname{th}\pi q}\,\delta(q-q'), \tag{26}$$

получаем

$$C(\rho, q) = \frac{2}{\rho}\int_0^\infty \sin\frac{\rho\beta}{2}\, P_{-1/2+iq}(\operatorname{ch}\beta)\, d\beta. \tag{27}$$

Интеграл (27) вычислен в Приложении 3. Окончательно получаем

$$f(s,0) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty a(\rho)\operatorname{sh}\frac{\pi\rho}{2}\,\rho\, d\rho \int_0^\infty q\operatorname{th}\pi q\, dq\, \Gamma\left(\frac{1/2 + iq - 1/2 i\rho}{2}\right)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{1/2 - iq - 1/2 i\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1/2 - iq + 1/2 i\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1/2 + iq + 1/2 i\rho}{2}\right)P_{-1/2+iq}(\operatorname{ch}\beta). \tag{28}$$

Это разложение $f(s,0)$ по унитарным представлениям. Поскольку мы хотим рассматривать лоренц-полюса в комплексной ρ-плоскости и полюса Редже в комплексной l-плоскости, требуется более общее разложение.

Полагая $\sigma = -1 + 1/2 i\rho$, интеграл (24) можно переписать в виде

$$f(s,0) = 4i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty}(\sigma+1)^2 d\sigma\, a(\sigma)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}\beta}}\, P^{-1/2}_{1/2+\sigma}(\operatorname{ch}\beta) = \tag{29а}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty}(\sigma+1)^2 d\sigma\, a(\sigma)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}\beta}}\, Q^{-1/2}_{1/2+\sigma}(\operatorname{ch}\beta). \tag{29б}$$

Обобщим теперь это выражение на неунитарные представления (так что будет возможно разлагать функции $f(s,0)$ не квадратично интегрируемые по β). Эта процедура не вполне законна. (Заметим, что (29а) и (29б) эквивалентны только на унитарном контуре интегрирования.) Обобщим, однако, (29б):

$$f(s,0) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}(\sigma+1)^2 d\sigma\, a(\sigma)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}\beta}}\, Q^{-1/2}_{1/2+\sigma}(\operatorname{ch}\beta) \tag{30}$$

и сдвинем контур интегрирования вправо, предполагая, что $a(\sigma)$ мероморфная функция:

$$f(s,0) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\int_{\substack{delta'-i\infty\\ \delta'\to+\infty}}^{\delta'+i\infty}(\sigma+1)^2 d\sigma\, a(\sigma)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}\beta}}\, Q^{-1/2}_{1/2+\sigma}(\operatorname{ch}\beta) +$$
$$+ 2\pi i\frac{8}{\sqrt{2\pi}}\sum_k \rho(\sigma_k)(\sigma_k+1)^2\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}\beta}}\, Q^{-1/2}_{1/2+\sigma_k}(\operatorname{ch}\beta), \tag{31}$$

где $\rho(\sigma_k)$ — вычеты $a(\sigma)$ в «толеровских полюсах». Для больших β (асимптотических энергий) полюсные члены будут доминировать над интегралом.

В Приложении 3 выражена «лоренцева функция» $P^{-1/2}_{-1/2+{}^1\!/\!_2 i\rho}(\operatorname{ch}\beta)$ через «реджевскую» функцию $P_{-1/2+iq}(\operatorname{ch}\beta)$. Обобщая это выражение на неунитарные представления, т. е. комплексные ρ и q (строгость такой процедуры под вопросом), выражая обе P-функции через Q-функции, аппроксимируя интеграл последовательностью полюсов и сравнивая асимптотические выражения отдельных членов (см. [3]), получаем асимптотическое разложение

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}\beta}}Q^{-1/2}_{1/2+\sigma}(\operatorname{ch}\beta)\underset{\operatorname{ch}\beta\to\infty}{\sim}\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_n\left(\sigma+\frac{3}{2}+2n\right)\times$$
$$\times\frac{\Gamma(n+{}^1\!/\!_2)\,\Gamma(-\sigma-n-1)}{\Gamma(-\sigma)\,\Gamma(\sigma+2)}\Gamma(\sigma+{}^3\!/\!_2+n)\frac{(-1)^n}{n!}Q_{\sigma+1+2n}(\operatorname{ch}\beta). \tag{32}$$

Если подставим (32) в (31), мы, наконец, получим разложение вкладов «толлеровских полюсов» в $f(s,0)$ по сериям дочерних редже-полюсов:

$$f(s,0)=\frac{8}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\substack{\delta-i\infty\\ \delta\to\infty}}^{\delta+i\infty}(\sigma+1)^2d\sigma\,a(\sigma)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}\beta}}Q^{-1/2}_{1/2+\sigma}(\operatorname{ch}\beta)-$$
$$-8\sum_k\rho(\sigma_k)(\sigma_k+1)\sum_n(\sigma_k+{}^3\!/\!_2+2n)(-1)^n\times$$
$$\times\frac{\Gamma(n+{}^1\!/\!_2)\,\Gamma(-\sigma_k-n-1)\Gamma(\sigma_k+n+{}^3\!/\!_2)}{n!\Gamma(-\sigma_k)\,\Gamma(\sigma_k+1)}Q_{\sigma_k+1+2n}(\operatorname{ch}\beta). \tag{33}$$

В рамках одномерных разложений по малым группам нет способа определить, являются ли эти дочерние полюса фиксированными или точками пересечения траекторий Редже с осью $t=0$. В следующем разделе мы продемонстрируем, что те же самые семейства дочерних полюсов генерируются лоренц-полюсами нормировочных Г-функций в двумерных $O(3,1)$-разложениях, так что в соответствии с аргументацией раздела 3 они являются фиксированными полюсами в комплексной l-плоскости.

6. Двумерные разложения для упругого рассеяния при $t=0$ и малая группа $O(3,1)$

Применение разложения по малой группе $O(3,1)$, редуцированного к подгруппе $O(2,1)$, при $t=0$ при равных массах приводит к выражению (28). С другой стороны, мы можем непосредственно применить разложение в H-системе из [1] к этому случаю[4], т. е. положить $\alpha=0$ (и $\varphi=0$) в формулах Приложения 1. Таким образом, получаем

$$f(s,0)=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\limits_0^\infty\rho^2d\rho\int\limits_0^\infty q\operatorname{th}\pi q\,dq\,A^+(\rho,q)\left(1/2^{i\rho/2+2}\pi^{5/2}\right)\left(\operatorname{ch}\pi q-i\operatorname{sh}\pi\frac{\rho}{2}\right)\times$$
$$\Gamma\left(\frac{{}^1\!/\!_2-iq-{}^1\!/\!_2 i\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{{}^1\!/\!_2+iq-{}^1\!/\!_2 i\rho}{2}\right)\frac{\Gamma({}^1\!/\!_2+iq+{}^1\!/\!_2 i\rho)\Gamma({}^1\!/\!_2-iq+{}^1\!/\!_2 i\rho)}{\Gamma(1+{}^1\!/\!_2 i\rho)}P_{-1/2+iq}(\operatorname{ch}\beta). \tag{34}$$

[4] Отметим, что если массы попарно равны ($m_1=m_3$, $m_2=m_3$), то P-инвариантность означает четность амплитуды по α и остается только член с $A^+(\rho,q)$.

Сравнивая (34) и (28), находим, что два разложения совпадают, если коэффициенты удовлетворяют интегральному соотношению

$$\int_0^\infty \rho^2\, d\rho 2^{1/2i\rho} \frac{\Gamma((1/2+iq+1/2i\rho)/2)\,\Gamma((1/2+iq+1/2i\rho)/2)}{\Gamma(1+1/2\rho)} \Big\{ A^+(\rho,q) -$$

$$- a(\rho)\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\rho}{2}\, 2^{-1/2i\rho+3}\Gamma(1/2i\rho)\Gamma\left(\frac{1/2-iq-1/2i\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1/2+iq-1/2i\rho}{2}\right)\Big\} = 0. \quad (35)$$

Таким образом, тот факт, что при $t = 0$ (и массах, удовлетворяющих $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$) группа $O(3,1)$ есть группа инвариантности амплитуды, накладывает ограничение (35) на «симметричную лоренцеву амплитуду» $A^+(\rho, q)$ в H-системе.

Теперь перейдем к случаю неунитарных представлений. Разложение в H-системе по унитарным представлениям при $t = 0$ можно также записать в виде

$$f(s,0) = -\frac{i}{\pi^{5/2}\sqrt{2}} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} 2^\sigma \frac{d\sigma}{\Gamma(\sigma)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (2l+1)\, dl\, \Gamma\left(\frac{\sigma-l+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma+l+2}{2}\right) \times$$

$$\times A^+(\sigma,l)Q_{-l-1}(\mathrm{ch}\,\beta) \quad (36)$$

с $\delta = -1$ и $\gamma = -1/2$. Обобщим теперь это выражение на произвольные γ и δ и покажем, как это разложение приводит к тем же результатам, что и разложение по малой группе в предыдущем разделе. Действительно, рассмотрим большие энергии, т. е. $\mathrm{ch}\,\beta \to \infty$. Сдвинем одновременно контуры интегрирования по σ и по l влево (так, чтобы не пересекать полюсов Г-функций). Предполагая, что $A^+(\sigma, l)$ мероморфна по σ и голоморфна по l в некоторой полосе, получаем, что вычеты в полюсах $A^+(\sigma, l)$ будут давать вклад, доминирующий при больших β над интегралом по новому контуру:

$$f(s,0) = (2\pi i)\frac{(-i)}{\pi^{5/2}\sqrt{2}} \sum_k \frac{2^{\sigma_k}}{\Gamma(\sigma_k)} \int_{\gamma'-i\infty}^{\gamma'+i\infty} (2l+1) dl\, R^+(\sigma_k, l) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{\sigma_k-l+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma_k+l+2}{2}\right)Q_{-l-1}(\mathrm{ch}\,\beta), \quad (37)$$

где $R^+(\sigma_k, l)$ — вычет $A^+(\sigma, l)$ в k-м полюсе. Теперь сдвинем контур в оставшемся интеграле влево, предполагая, что $R^+(\sigma_k, l)$ голоморфна по l и оставим только члены, возникающие за счет полюсов Г-функций, лежащих влево от контура $\mathrm{Re}\, l = \gamma'$.

Окончательно получаем

$$f(s,0) = \frac{(-8i)}{\sqrt{\pi}} \sum_k \frac{2^{\sigma_k}}{\Gamma(\sigma_k)} \sum_n (\sigma_k + 2n + 3/2) R^+(\sigma_k, -\sigma_k - 2 - 2n) \times$$

$$\times \frac{(-1)^n}{n!}\Gamma(\sigma_k + 3/2 + n) Q_{\sigma_k+1+2n}(\mathrm{ch}\,\beta). \quad (38)$$

Таким образом, в полной аналогии с Толлером и др. [3] мы получили последовательность лоренц-полюсов, каждый из которых приводит к возникновению бесконечной серии дочерних полюсов. Однако, поскольку эти полюса не имеют ничего общего с лоренцевыми асимптотиками, обсуждавшимися в разделе 3, мы заключаем, что это фиксированные полюса в l-плоскости. Далее, можно связать вычет $R^+(\sigma_k, -\sigma_k - 2 - 2n)$ с вычетом $\rho(\sigma_k)$ толлеровской амплитуды.

Сделаем еще несколько замечаний. При выводе (38) мы предполагали определенные аналитические свойства $A^+(\sigma, l)$ и $R^+(\sigma_k, l)$. Если они не имеют места, например если эти функции не голоморфны по l, результат (38) все же воспроизводится, но получаются еще дополнительные, не подобные дочерним члены.

До сих пор условие унитарности для амплитуды рассеяния не использовалось в рамках двумерных релятивистских разложений. Вполне возможно, что унитарность приведет к ограничениям на лоренцевы амплитуды, исключающим генерацию фиксированных полюсов (в том число и фиксированных дочерних полюсов) в комплексной l-плоскости (см. также [13]).

7. Выводы

Основные результаты настоящей работы следующие:

1. Двумерные разложения релятивистских амплитуд должны быть полезным дополнением к обычной теории полюсов Редже.

2. Коэффициенты в этих разложениях, которые мы называем лоренц-амплитудами $A^{\pm}(\sigma, l)$, определяют поведение реджеизованной парциальной амплитуды $a_l(t)$ в окрестности ее сингулярностей. А именно определенные асимптотические выражения для $A^{\pm}(\sigma, l)$ генерируют движущиеся реджевские сингулярности, в то время как «лоренц-полюса» $A^{\pm}(\sigma, l)$ при конечных σ генерируют фиксированные полюса в l-плоскости.

3. Требование того, чтобы двумерные разложения совпадали с разложением по малой группе $O(3,1)$ при $t = 0$ в случае равных масс, означает, что $A^+(\sigma, l)$ должна удовлетворять определенному интегральному условию.

4. Дочерние полюса Редже, введенные в [3, 6] при $t = 0$ в случае равных масс, генерируются лоренц-полюсами при конечных σ и, следовательно, являются фиксированными полюсами. Таким образом, мы не обнаруживаем очевидности существования дочерних траекторий из чистой кинематики, но не исключаем возможные динамические механизмы, вынуждающие траектории Редже проходить через дочерние полюса.

Мы благодарны И. Т. Тодорову за полезные обсуждения.

Приложение 1

Разложения в S- и H-системах

Воспроизведем разложения по ортонормированным системам базисных функций в S- и H-системах и заодно устраним некоторые опечатки, сделанные в [1].

Сферическая система координат соответствует редукции $O(3,1) \supset O(3) \supset O(2)$ (см. [2]). В S-системе 4-скорость параметризуется так:

$$u = (u_0, u_1, u_2, u_3) = (\operatorname{ch} a, \operatorname{sh} a \sin\theta\cos\varphi, \operatorname{sh} a \sin\theta \sin\varphi, \operatorname{sh} a \cos\theta). \qquad (\text{П}1.1)$$

Разложение амплитуды $f(u)$ в общем неунитарном случае имеет вид

$$f(u) = \frac{i}{2} \sum_{lm} \int\limits_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} (\sigma+1)^2 \, d\sigma \, a_{lm}(\sigma) \frac{\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\sigma+1-l)} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} P_{\sigma+1/2}^{-l-1/2}(\operatorname{ch} a) Y_{lm}(\theta, \varphi). \qquad (\text{П}1.2)$$

В унитарном случае $\sigma = -1+ip$ оно переходит в разложение по ортонормированной системе функций

$$f(u) = \sum_{lm} \int_0^\infty a_{lm}(p)\Phi_{plm}(a,\theta,\varphi)p^2 dp, \tag{П1.3}$$

$$\left(\Phi_{p'l'm'}, \Phi_{plm}\right) = \frac{\delta(p-p')}{p^2}\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{П1.4}$$

где

$$\Phi_{plm}(a,\theta,\varphi) = \frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(ip-l)} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} P^{-l-1/2}_{-1/2+ip}(\operatorname{ch} a) Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Обратная формула следует непосредственно

$$a_{lm}(p) = \int_0^\infty \operatorname{sh}^2 a\, da \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(u)\Phi^*_{plm}(a,\theta,\varphi). \tag{П1.5}$$

Гиперболическая система координат соответствует редукции $O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(2)$ [2]. В H-системе 4-скорость параметризуется так:

$$u = (\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\beta, \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta \cos\varphi, \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta \sin\varphi, \operatorname{sh}\alpha). \tag{П1.6}$$

Имеем следующую формулу разложения:

$$f(u) = \frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\substack{\delta-i\infty \\ -\sigma-1}}^{\delta+i\infty} (\sigma+1)\, d\sigma \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (l+1/2) \operatorname{ctg}\pi l\, dl\, \frac{\Gamma(\sigma-l+1)\Gamma(\sigma+l+2)}{\Gamma(\sigma+1)\Gamma(l+1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(1+l-m)}{\operatorname{ch}\alpha} \left[a^+_m(\sigma,l)P^{-\sigma-1}_l(-\operatorname{th}\alpha) + a^-_m(\sigma,l)P^{-\sigma-1}_l(\operatorname{th}\alpha)\right] P^m_l(\operatorname{ch}\beta)e^{im\varphi}. \tag{П1.7}$$

В унитарном случае $\sigma = -1+ip$, $l = -1/2+iq$ это переходит в

$$f(u) = \sum_m \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\infty q \operatorname{th}\pi q\, dq \left[a^+_m(p,q)\Phi^+_{pqm}(\alpha,\beta,\varphi) + a^-_m(p,q)\Phi^-_{pqm}(\alpha,\beta,\varphi)\right], \tag{П1.8}$$

а обратная формула принимает вид

$$a^\pm_m(p,q) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{ch}^2\alpha\, d\alpha \int_0^\infty \operatorname{sh}\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(u)\Phi^{\pm *}_{pqm}(\alpha,\beta,\varphi), \tag{П1.9}$$

где базисные функции

$$\Phi^\pm_{pqm}(\alpha,\beta,\varphi) = \frac{\Gamma(1/2+iq+ip)\Gamma(1/2-iq+ip)}{2\pi\Gamma(1+ip)} \frac{\Gamma(1/2-m+iq)}{\Gamma(1/2+iq)} \times$$

$$\times \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} P^{-ip}_{-1/2+iq}(\mp \operatorname{th}\alpha) P^m_{-1/2+iq}(ch\beta)e^{im\varphi} \tag{П1.10}$$

удовлетворяют условию ортонормировки

$$(\Phi^\pm_{p'q'm'}, \Phi^\pm_{pqm}) = \left(\frac{\delta(p-p')}{p^2}\right)\left(\frac{\delta(q-q')}{q \operatorname{th}\pi q}\right)\delta_{mm'}, \quad (\Phi^\pm_{p'q'm'}, \Phi^\mp_{pqm}) = 0. \tag{П1.11}$$

Возможно удобно определить амплитуды $A_m^{\pm}(p,q)$:

$$a_m^+(p,q)\Phi_{pqm}^+ + a_m^-(p,q)\Phi_{pqm}^- = A_m^+(p,q)\frac{\Phi_{pqm}^+ + \Phi_{pqm}^-}{\sqrt{2}} + A_m^-(p,q)\frac{\Phi_{pqm}^+ - \Phi_{pqm}^-}{\sqrt{2}}, \quad (\text{П1.12})$$

где

$$A_m^{\pm}(p,q) = \frac{[a_m^+(p,q) \pm a_m^-(p,q)]}{\sqrt{2}}.$$

Приложение 2

Асимптотическая формула для функций Лежандра

Здесь мы выведем асимптотическое выражение для $P_l^{\pm(\sigma+1)}(\varepsilon\,\mathrm{th}\,\alpha)$ при $\mathrm{Im}\,\sigma \to \pm\infty$, $\mathrm{Re}\,\sigma$ фиксированном. $P_\nu^\mu(z)$ означает функцию Лежандра на разрезе [14], $\mathrm{th}\,\alpha$ принимает произвольные конечные комплексные значения и $\varepsilon = \pm 1$. Начнем с соотношения между $P_\nu^\mu(z)$ и гипергеометрической функцией Гаусса

$$P_l^{\pm(\sigma+1)}(\varepsilon\,\mathrm{th}\,\alpha) = \frac{e^{\pm\varepsilon(\sigma+1)\alpha}}{\Gamma[1 \mp (\sigma+1)]}\, {}_2F_1\left[-l,\ l+1;\ 1 \mp (\sigma+1);\ \frac{(1-\varepsilon\,\mathrm{th}\,\alpha)}{2}\right]. \quad (\text{П2.1})$$

Следующие формулы получаются необходимой модификацией формул в [15] для того, чтобы они стали применимы в нашем специальном случае.

Для функции Гаусса имеем асимптотический ряд, который можно также использовать и для $|\,\mathrm{th}\,\alpha| > 1$:

$$ {}_2F_1\left[-l,\ l+1;\ 1 \mp (\sigma+1);\ \frac{(1-\varepsilon\,\mathrm{th}\,\alpha)}{2}\right] \simeq$$
$$\simeq \frac{\Gamma[1 \mp (\sigma+1)]}{[\mp(\sigma+1)]^{-l}\Gamma[1 \mp (\sigma+1) + l]}\left[1 + \sum_{\chi=1}^{\infty} \frac{d_\chi \Gamma(-l+\chi)}{\Gamma(-l)[\mp(\sigma+1)]^\chi}\right] \quad (\text{П2.2})$$

для $\left|\arg[1 \mp (\sigma+1) + l]\right| < \pi/2$ (по поводу вычисления d_χ см. [15]), а для $\left|\arg[\mp(\sigma+1) - l]\right| < \pi/2$ соответствующая формула получается заменой $l \to -l-1$. Оставляя только главный член этого асимптотического разложения, получаем

$$P_l^{\pm(\sigma+1)}(\varepsilon\,\mathrm{th}\,\alpha) \underset{|p|\to\infty}{\simeq} \frac{1}{[\mp(\sigma+1)]^{-l}\Gamma[1 \mp (\sigma+1) + l]}\, e^{\pm\varepsilon(\sigma+1)\alpha}, \quad (\text{П2.3})$$

где $\sigma = \delta + ip$.

Асимптотики Г-функций вычисляем, оставляя только неисчезающие члены в ряду Стирлинга для $\ln\Gamma(z)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Gamma(-\sigma+l) &\underset{|p|\to\infty}{\simeq} \sqrt{2\pi}\, e^{ip}(-ip)^{-\delta+\gamma-1/2-i(p-q)}, \\ \Gamma(\sigma+l+2) &\underset{|p|\to\infty}{\simeq} \sqrt{2\pi}\, e^{-ip}(ip)^{\delta+\gamma+3/2+i(p+q)}, \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

где $l = \gamma + iq$.

И окончательно мы имеем ведущий член в виде

$$P_l^{\pm(\sigma+1)}(\varepsilon\,\mathrm{th}\,\alpha) \underset{|p|\to\infty}{\simeq} \frac{e^{\mp ip}}{\sqrt{2\pi}}(\mp ip)^{\pm(\delta+1)-1/2\pm ip}\, e^{\pm\varepsilon(\delta+1+ip)\alpha}. \quad (\text{П2.5})$$

Удобно также выписать асимптотики ядер в прямом и обратном интегральных представлениях, используемых в H-системе

$$\frac{\Gamma(-\sigma-l-1)\,\Gamma(-\sigma+l)}{\Gamma(-\sigma)}\,P_l^{\sigma+1}(\varepsilon\,\mathrm{th}\,\alpha)\underset{|p|\to\infty}{\sim}\frac{e^{\varepsilon(\delta+1+ip)\alpha}}{-ip};$$
$$\frac{\Gamma(\sigma-l+1)\,\Gamma(\sigma+l+2)}{\Gamma(\sigma+2)}\,P_l^{-\sigma-1}(\varepsilon\,\mathrm{th}\,\alpha)\underset{|p|\to\infty}{\sim}\frac{-e^{\varepsilon(\delta+1+ip)\alpha}}{ip}. \qquad (\text{П}2.6)$$

Мы могли бы выписать следующие члены асимптотических рядов, но они не требуются в рамках этой статьи.

Приложение 3

Вычисление интеграла

Вычислим интеграл

$$J=\int_0^\infty \sin\frac{\rho\beta}{2}\,P_{-1/2+iq}(\mathrm{ch}\,\beta)\,d\beta. \qquad (\text{П}3.1)$$

Удобно представить (П3.1) в виде комбинации двух членов

$$J=\frac{1}{2i}\,(I-I^*),$$

где

$$I=\int_0^\infty d\beta\, e^{i(\rho\beta)/2}P_{-1/2+iq}(\mathrm{ch}\,\beta), \qquad (\text{П}3.2)$$

и начать вычисление с этого интеграла [16].

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty dx\exp\left[\frac{x}{2}\left(-{}^1\!/\!_2-iq+{}^1\!/\!_2 i\rho\right)\right]F({}^1\!/\!_2+iq,{}^1\!/\!_2;1;1-e^{-x})=$$
$$=\frac{\Gamma(({}^1\!/\!_2+iq-{}^1\!/\!_2 i\rho)/2)\,\Gamma(({}^1\!/\!_2-iq-{}^1\!/\!_2 i\rho)/2)}{2\Gamma(({}^3\!/\!_2-iq-{}^1\!/\!_2 i\rho)/2)\,\Gamma(({}^3\!/\!_2+iq-{}^1\!/\!_2 i\rho)/2)}=\frac{1}{4\pi^2}\left(\mathrm{ch}\,\pi q+i\,\mathrm{sh}\frac{\pi\rho}{2}\right)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{({}^1\!/\!_2+iq-{}^1\!/\!_2 i\rho)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{({}^1\!/\!_2-iq-{}^1\!/\!_2 i\rho)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{({}^1\!/\!_2+iq+{}^1\!/\!_2 i\rho)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{({}^1\!/\!_2-iq+{}^1\!/\!_2 i\rho)}{2}\right). \qquad (\text{П}3.3)$$

Подставляя (П3.3) в (П3.2), получаем

$$\int_0^\infty \sin\frac{\rho\beta}{2}\,P_{-1/2+iq}(\mathrm{ch}\,\beta)\,d\beta=\frac{\mathrm{sh}\,{}^1\!/\!_2\pi\rho}{4\pi^2}\,\Gamma\left(\frac{({}^1\!/\!_2+iq-{}^1\!/\!_2 i\rho)}{2}\right)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{({}^1\!/\!_2-iq+{}^1\!/\!_2 i\rho)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{({}^1\!/\!_2+iq+{}^1\!/\!_2 i\rho)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{({}^1\!/\!_2-iq-{}^1\!/\!_2 i\rho)}{2}\right). \qquad (\text{П}3.4)$$

В целях полноты рассмотрим также интеграл

$$I' = \int_0^\infty d\beta\, e^{i\rho\beta/2} Q_{-1/2+iq}(\operatorname{ch}\beta) = \frac{\pi}{i}\int_0^\infty d\beta e^{\beta(-1/2+iq+1/2i\rho)} F(1/2 - iq,\ 1/2;\ 1;\ 1-e^{-2\beta}) =$$

$$= \frac{\pi}{2i}\frac{\Gamma((1/2 - iq - 1/2i\rho)/2)\,\Gamma((1/2 + iq - 1/2i\rho)/2)}{\Gamma((3/2 + iq - 1/2i\rho)/2)\,\Gamma((3/2 - iq - 1/2i\rho)/2)}. \qquad (\text{П}3.5)$$

Литература

1. *Виленкин Н.Я., Смородинский Я.А.* ЖЭТФ, **46**, 1793, 4964.
2. *Sheftel M., Smorodinsky J., Winternitz P.* Preprint E2–3553, Dubna, 1967 (там же см. ссылки на предыдущие работы).
3. *Toller M.* Preprints Th-770, Th-780, CERN, 1967; *Sciarrino A., Toller M.* Intern. Report 108, Institute di Fisica G. Marconi, Roma, 1966.
4. *Boyce J., Delbourgo R., Salam A., Strathdee J.* Preprint IC67/9, Trieste, 1967.
5. *Freedman D., Wang J.* Phys. Rev., **153**, 1596, 1967.
6. *Domokos G., Suranyi P.* Nucl. Phys., **54**, 529, 1964; *Domokos G.* Phys. Rev., **159**, 1387, 1967.
7. *Squires E.J.* Complex Angular Momentum and Particle Physics. Benjamin, New York, 1963.
8. *Тодоров И.Т.* Аналитические свойства диаграмм Фейнмана в квантовой теории поля. София: БАН, 1966.
9. *Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B.* Preprint IC/67/72, Trieste, 1967.
10. *Singh V.* Phys. Rev., **127**, 632, 1962.
11. *Fock V.A.* Zs. Phys., **98**, 145, 1935.
12. *Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу.* Препринт Р-2777, Дубна, 1966; *Ström S.* Ark. Fysik, **29**, 467, 1965.
13. *Jones H.F., Scadron M.* Nucl. Phys., **B4**, 267, 1968.
14. Высшие трансцендентные функции, **1**, Наука, 1966.
15. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции М.: ИИЛ, 1963.
16. *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Орбитирование и резонансные состояния

И. Лукач, Я. А. Смородинский

Введение

Известно, что в классической теории рассеяния в определенном классе сферически-симметричных потенциалов существует явление орбитирования (orbiting) [1–4] [1]. Сущность этого явления состоит в том, что рассеиваемая частица взаимодействует с рассеивающим центром таким образом, что, приблизившись к этому центру, совершает вокруг него некоторое число оборотов, после чего удаляется на бесконечность под некоторым наблюдаемым углом рассеяния. Таким образом, взаимодействующие частицы могут находиться длительное время во взаимодействии, что должно соответствовать некоторому резонансному состоянию с определенным временем жизни.

В общем случае орбитирование происходит тогда, когда эффективная потенциальная энергия

$$U_{эфф}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{1}$$

($U(r)$ — потенциал взаимодействия, M — момент падающей частицы, m — приведенная масса) имеет хотя бы один максимум (барьер) и энергия падающей частицы близка к величине этого барьера [3, 4].

Условие существования максимума эффективной потенциальной энергии в точке $r_б$ имеет вид

$$\left.\frac{dU_{эфф}}{dr}\right|_{r=r_б} = 0, \qquad \left.\frac{d^2U_{эфф}}{dr^2}\right|_{r=r_б} < 0. \tag{2}$$

Если условия (2) выполнены, то эффективную потенциальную энергию вблизи точки $r_б$, в которой имеется максимум $E_б$, можно разложить в ряд по степеням $r - r_б$, сохраняя при этом члены второго порядка малости, т. е. положить

$$U_{эфф}(r) = E_б\left[1 - \frac{(r-r_б)^2}{\rho^2}\right], \qquad \frac{1}{\rho^2} = -\frac{1}{2E_б}\left.\frac{d^2U_{эфф}}{dr^2}\right|_{r=r_б} \tag{3}$$

и провести исследование явлений при энергиях, близких к величине барьера $E_б$ с приближением (3) для $U_{эфф}(r)$.

Убедимся сначала, что в классическом рассмотрении частица с энергией $E \sim E_б$ вращается вокруг рассеивающего центра. По известной формуле классической механики для полного полярного угла θ_0

$$\theta_0 = 2\int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{M/r^2}{\sqrt{2m[E - U_{эфф}(r)]}}\,dr$$

---

[1] Наиболее подробное исследование проведено Яковлевым [3] и Файнгольцом [4].

находим, используя приближение (3),

$$\theta_0 = \frac{M_\rho[3 + \operatorname{sign}(E - E_б)]}{2r_б^2\sqrt{2mE_б}} \frac{E_б}{|E - E_б|} + \text{const}. \tag{4}$$

Из (4) видно, что при $E \to E_б$ величина $\theta_0 \to \infty$ и частица «садится на барьер», где вращается практически бесконечно долго с угловой скоростью

$$\omega = \frac{M}{mr_б^2}.$$

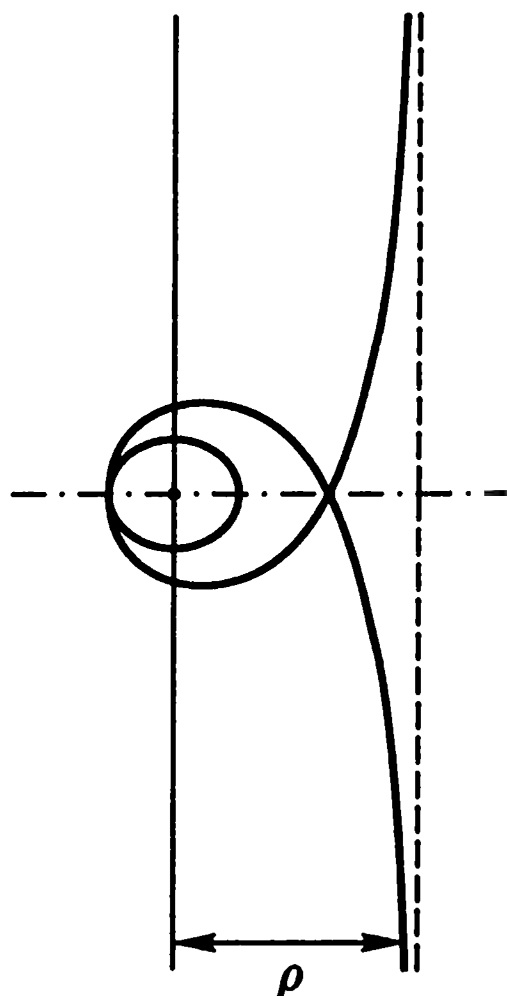


Рис. 1. Классическая траектория рассеянной частицы в потенциале α/r^2, совершившая вокруг рассеивающего центра два оборота и рассеявшаяся под нулевым углом рассеяния

Для иллюстрации на рис. 1 показан вид траектории частицы, совершившей вокруг центра два оборота и рассеявшейся под нулевым углом рассеяния.

Орбитирование дает вклад в классическое дифференциальное сечение рассеяния, где появляется сумма по виткам, так как на один и тот же наблюдаемый угол рассеяния рассеиваются частицы, совершившие разное количество витков вокруг рассеивающего центра в зависимости от их момента.

В многочисленных монографиях по рассеянию об орбитировании упоминается очень редко и совсем не ставится вопрос о квантовомеханическом рассмотрении явления орбитирования. В настоящей работе рассматривается поведение квантовомеханических характеристик процесса рассеяния при энергиях порядка величины эффективного потенциального барьера $E_б$ и выясняется, что в случае достаточно высокого и широкого барьера при энергиях падающих частиц $E = E_б$ имеется резонанс, соответствующий квазистационарному состоянию. Учитывая, что

$$E_б = U(r_б) + \frac{M^2}{2mr_б^2}, \tag{5}$$

где $r_б$ является функцией момента M и параметров потенциала, мы, таким образом, имеем уравнение траектории резонансов, которое при физических значениях момента $M^2 = \hbar^2 L(L+1)$, $L = 0, 1, \ldots, L_{кр}$ определяет семейство резонансных энергий $E_б^{(L)}$.

Интересны также вопросы, связанные с излучением орбитирующих частиц [5].

Модельный расчет матрицы рассеяния

Найдем выражение для S-матрицы в случае, когда эффективная потенциальная энергия (1) имеет эффективный потенциальный барьер высоты $E_б$ в точке $r_б$, за которым образуется эффективная потенциальная яма глубины $E_я$ в точке r_1. Для того чтобы получить аналитические формулы, предположим, что эту эффективную

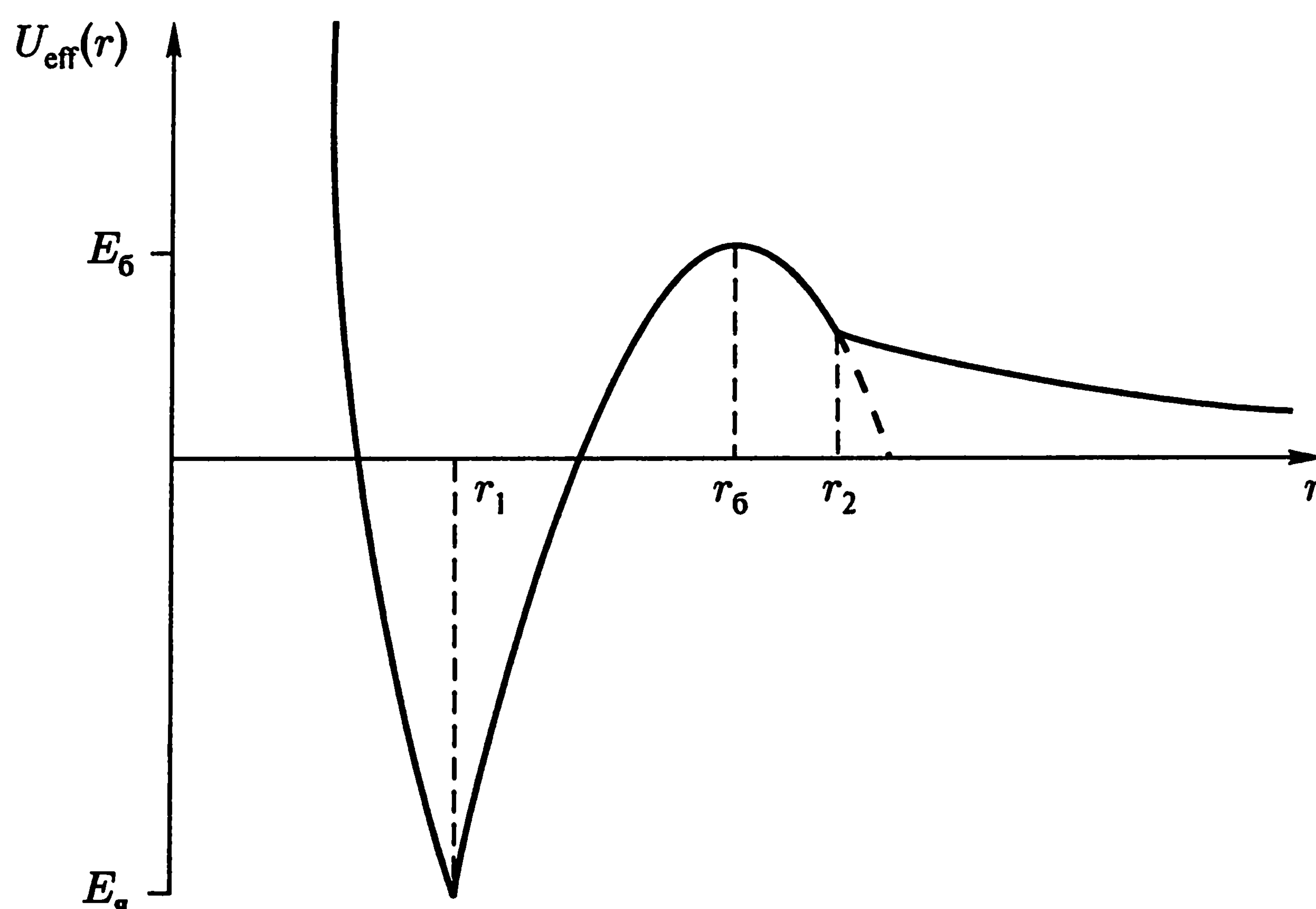


Рис. 2. Приближение для эффективной потенциальной энергии

потенциальную энергию можно аппроксимировать следующим образом:

$$U_{\text{эфф}}(r) = \begin{cases} \dfrac{\hbar^2 L(L+1)}{2mr^2}, & r > r_2; \\ E_б\left[1 - \dfrac{(r-r_б)^2}{\rho^2}\right], & r_1 < r < r_2; \\ E_я + \dfrac{\hbar^2 L(L+1)}{2m}\left[\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r_1^2}\right], & 0 < r < r_1, \end{cases} \tag{6}$$

как это показано на рис. 2[2)].

Решением уравнения Шредингера для радиальной волновой функции (умноженной на r), имеющим на бесконечности вид $\exp\left[i(kr - {}^1\!/_2\pi L)\right]$, является решение

$$R^+_{kL}(r) = \begin{cases} f(r), & r > r_2; \\ \gamma g(z) + \delta h(z), & r_1 < r < r_2; \\ \alpha k(r) + \beta l(r), & 0 < r < r_1, \end{cases} \tag{7}$$

где α, β, γ, δ — постоянные, которые определяются из условий «сшивания» волновых функций в точках r_1 и r_2,

$$f(r) = i\left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{1/2} H^{(1)}_{\lambda}(kr),$$

$$g(z) = h^*(z) = \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i\varepsilon k_б\rho\right)\Psi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\varepsilon k_б\rho,\ \frac{1}{2};\ iz\right), \tag{8}$$

$$k(r) = l^*(r) = i\left(\frac{\pi k_1 r}{2}\right)^{1/2} H^{(1)}_{\lambda}(k_1 r),$$

[2)] Такое приближение для $U_{\text{эфф}}(r)$ требует, чтобы потенциал взаимодействия $U(r)$ имел конечный радиус действия и его особенность в нуле была меньше, чем r^{-2}.

$H_\lambda^{(1)}(x)$ — функция Гангеля, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, $\Psi(\alpha,\gamma;x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция и введены обозначения

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m},\quad E_б=\frac{\hbar^2k_б^2}{2m},\quad E-E_я+\frac{\hbar^2L(L+1)}{2mr_1^2}=\frac{\hbar^2k_1^2}{2m},$$
$$\lambda=L+\frac{1}{2},\quad \varepsilon=1-\frac{E}{E_б},\quad z=\frac{k_б}{\rho}(r-r_б)^2. \tag{9}$$

Общее решение $R_{kL}(r)$, имеющее на бесконечности вид

$$R_{kL}(r)\big|_{r\to\infty}\sim\sin\left(kr-\frac{1}{2}\pi L+\delta_L(k)\right),$$

записывается как

$$R_{kL}(r)=\left[R_{kL}^{(-)}(r)-S_L(k)R_{kL}^{(+)}(r)\right], \tag{10}$$

где $R_{kL}^{(-)}(r)=\left[R_{kL}^{(+)}(r)\right]^*$. Из условия регулярности волновой функции $R_{kL}(r)$ в нуле находим, что

$$S_L(k)=\exp\left[2i\delta_L(k)\right]=\frac{\alpha^*+\beta^*}{\alpha+\beta}.$$

Используя явные выражения для коэффициентов α и β:

$$\alpha=\frac{W(f_2,h_2)W(j_1,g_1)}{W(g_2,h_2)W(k_1,l_1)}\quad \beta=\frac{W(g_2,f_2)W(j_1,h_1)}{W(g_2,h_2)W(k_1,l_1)},$$

где через $W(\xi,\eta)=\xi\partial\eta/\partial r-\eta\partial\xi/\partial r$ обозначены вронскианы соответствующих функций в соответствующих точках и

$$j(r)\equiv k(r)-l(r)=2i\left(\frac{\pi k_1r}{2}\right)^{1/2}J_\lambda(k_1r),$$

получаем[3] для S-матрицы выражение

$$S_L(k)=\frac{W^*(f_2,h_2)W^*(j_1,g_1)-W^*(f_2,g_2)W^*(j_1,h_1)}{W(f_2,h_2)W(j_1,g_1)-W(f_2,g_2)W(j_1,h_1)}. \tag{12}$$

Резонансные состояния

Полюсы S-матрицы определяются нулями выражения

$$F=W(f_2,h_2)W(j_1,g_1)-W(f_2,g_2)W(j_1,h_1)$$

или

$$F=f_2j_1k_б^2\left\{\left(\frac{\partial\ln f_2}{k_б\partial r_2}-\frac{\partial}{k_б\partial r_2}\right)\left(\frac{\partial\ln j_1}{k_б\partial r_1}-\frac{\partial}{k_б\partial r_1}\right)\right\}(g_1h_2-g_2h_1), \tag{13}$$

где частные производные по r_1, r_2 действуют на функции соответственно с индексами 1 и 2.

Для дальнейшего необходимо записать в явном виде функцию $g_1h_2-g_2h_1$. При этом необходимо учесть, что точка $z=0$ является точкой ветвления для

[3] Более подробно см. [6].

функций g, h, так что $g_1 \equiv g(z_1 e^{2\pi i}) = h_1^*$, где уже $\arg z_1 = 0$. Из теории вырожденной гипергеометрической функции следует [7], что

$$\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Psi(\alpha,\gamma;ize^{2\pi i}) = \left[1+e^{-2\pi i\gamma} - e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}\right]\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Psi(\alpha,\gamma;iz) + \\ + e^{-2\pi i\gamma}\left[e^{2\pi i\alpha}-1\right]\Gamma(1-\alpha)e^{iz}\Psi(\gamma-\alpha,\gamma;-iz). \quad (14)$$

Используя (14), получаем

$$g_1h_2-g_2h_1 = h(z_1)h(z_2)-g(z_1)g(z_2)-i\exp\left({}^{1\!}/{}_{2}\pi k_6\rho\varepsilon\right)[g(z_1)-h(z_1)][g(z_2)-h(z_2)]. \quad (15)$$

Нас интересует значение выражения (15) при энергиях E порядка E_6, т. е. при малых ε, и поэтому можем разложить его в ряд по степеням ε, сохраняя при этом члены первого порядка малости. Так как мы не можем написать явное выражение для производной вырожденной гипергеометрической функции по параметру, то мы используем для функций их асимптотические выражения при больших значениях величины $k_6\rho$, так как

$$z_1 = \frac{k_6}{\rho}(r_6-r_1)^2 \sim k_6\rho, \quad z_2 = \frac{k_6}{\rho}(r_6-r_2)^2 \sim k_6\rho.$$

Таким образом, мы фактически разлагаем выражение (15) при условии

$$\varepsilon \ll \frac{1}{k_6}\rho \ll 1.$$

Записывая в явном виде функции g, h и их производные $\partial g/\partial\varepsilon$, $\partial h/\partial\varepsilon$ при больших z:

$$g|_{z\to\infty} = h^*|_{z\to\infty} = \Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\varepsilon k_6\rho\right)z^{-1/4}\exp\left[-i\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}\varepsilon k_6\rho\ln z\right)-\frac{1}{8}\pi\varepsilon k_6\rho\right],$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right|_{z\to\infty} = \left.\frac{\partial h^*}{\partial\varepsilon}\right|_{z\to\infty} = \frac{1}{4}(k_6\rho)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\varepsilon k_6\rho\right)z^{-1/4}.$$
$$\left[\frac{1}{2}\pi - i\left(\ln z - \psi\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\varepsilon k_6\rho\right)\right)\right]\exp\left[-i\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}\varepsilon k_6\rho\ln z\right)-\frac{1}{8}\pi\varepsilon k_6\rho\right], \quad (17)$$

находим, что

$$(g_1h_2-g_2h_1)\big|_{k_6\rho\to\infty;\ \varepsilon\to 0} = \frac{1}{2}i\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\left[G(z_1,z_2)-\varepsilon k_6\rho H(z_1,z_2)\right], \quad (18)$$

где $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции и через G, H обозначены следующие выражения:

$$G(z_1,z_2) = 4(z_1z_2)^{-1/4}\left[\cos\frac{z_1-z_2}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{z_1+z_2}{2}\right],$$
$$H(z_1,z_2) = (z_1z_2)^{-1/4}\left\{\ln z_1\left[\sqrt{2}\cos\frac{z_1+z_2}{2}-\sin\frac{z_1-z_2}{2}\right]+\right.$$
$$\left.+\ln z_2\left[\sqrt{2}\cos\frac{z_1+z_2}{2}+\sin\frac{z_1-z_2}{2}\right]-\pi\cos\frac{z_1-z_2}{2}-\left[\psi\left(\frac{1}{4}\right)+\psi\left(\frac{3}{4}\right)\right]\sqrt{2}\cos\frac{z_1+z_2}{2}\right\}. \quad (19)$$

Действие оператора из (13) на выражение (18) приводит к уравнению, определяющему ε, из которого находим, что матрица рассеяния имеет полюс при энергии

$$E = E_б - E_\varepsilon - \frac{1}{2} i E_\gamma, \tag{20}$$

где

$$E_\varepsilon = \frac{E_б G}{(k_б \rho) H} \left\{ \left[\left(A - \frac{\partial \ln H}{k_б \partial r_1} \right) \left(B - \frac{\partial \ln H}{k_б \partial r_2} \right) \right]^2 + C^2 \left(A - \frac{\partial \ln H}{k_б \partial r_1} \right)^2 \right\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{ \left[\left(A - \frac{\partial \ln H}{k_б \partial r_1} \right) \left(B - \frac{\partial \ln H}{k_б \partial r_2} \right) + \frac{\partial^2 \ln H}{k_б^2 \partial r_1 \partial r_2} \right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[\left(A - \frac{\partial \ln G}{k_б \partial r_1} \right) \left(B - \frac{\partial \ln G}{k_б \partial r_2} \right) + \frac{\partial^2 \ln G}{k_б^2 \partial r_1 \partial r_2} \right] + C^2 \left(A - \frac{\partial \ln H}{k_б \partial r_1} \right) \left(A - \frac{\partial \ln G}{k_б \partial r_1} \right) \right\}, \tag{21а}$$

$$E_\gamma = -\frac{2 C E_б}{k_б \rho} \left[\frac{\partial (H/G)}{k_б \partial r_2} \right]^{-1} \left\{ \left[\left(A - \frac{\partial \ln H}{k_б \partial r_1} \right) \left(B - \frac{\partial \ln H}{k_б \partial r_2} \right) + C^2 \left(A - \frac{\partial \ln H}{k_б \partial r_1} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{ \left[A \frac{\partial \ln (H/G)}{k_б \partial r_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ln (H \cdot G)}{k_б \partial r_1} \frac{\partial \ln (H/G)}{k_б \partial r_2} + \frac{\partial^2 \ln (H/G)}{k_б^2 \partial r_1 \partial r_2} \right) \right]^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} \left(\frac{G}{H} \right)^2 \left[4 \frac{\partial^2 \ln G}{k_б^2 \partial r_1 \partial r_2} \frac{\partial (H/G)}{k_б \partial r_1} \frac{\partial (H/G)}{k_б \partial r_2} + \left(\frac{\partial^2 (H/G)}{k_б^2 \partial r_1 \partial r_2} \right)^2 \right] \right\} > 0, \tag{21б}$$

$$A(r_1) \equiv \left. \frac{\partial \ln j_1}{k \partial r_1} \right|_{k=k_б} = -\frac{\lambda - 1/2}{k_б r_1} + \frac{\bar{k}_1}{k_б} \frac{J_{\lambda-1}(\bar{k}_1 r_1)}{J_\lambda(\bar{k}_1 r_1)},$$
$$\bar{k}_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E_б - E_я) + \frac{L(L+1)}{r_1^2},$$
$$B(r_2) \equiv \mathrm{Re} \left. \frac{\partial \ln f_2}{k \partial r_2} \right|_{k=k_б} = -\frac{\lambda - 1/2}{k_б r_2} + \frac{J_\lambda(k_б r_2) J_{\lambda-1}(k_б r_2) - J_{-\lambda}(k_б r_2) J_{-\lambda+1}(k_б r_2)}{J_\lambda^2(k_б r_2) + J_{-\lambda}^2(k_б r_2)}, \tag{22}$$
$$C(r_2) \equiv \mathrm{Im} \left. \frac{\partial \ln f_2}{k \partial r_2} \right|_{k=k_б} = \frac{2}{\pi k_б r_2} \left[J_\lambda^2(k_б r_2) + J_{-\lambda}^2(k_б r_2) \right]^{-1} > 0.$$

В том, что величина $E_\gamma > 0$, можно убедиться непосредственным вычислением производных по r_1 и r_2 от функций G и H.

Таким образом, можно заключить, что при энергиях падающих частиц, примерно равных величине эффективного потенциального барьера, возникает квазистационарное состояние ($E_\gamma > 0$). При достаточно больших $k_б \rho$, т. е. в случае достаточно высокого и широкого барьера, $E_\varepsilon \ll E_б$ и величина E_γ достаточно мала, так что получаем резонанс при энергии $E = E_б$. Так как высота эффективного потенциального барьера является функцией момента M падающей частицы, то при заданном потенциале взаимодействия $U(r)$ уравнение (5) определяет при физических значениях момента $M^2 = \hbar^2 L(L+1)$, $L = 0, 1, \ldots; L_{кр}$ семейство резонансных энергий $E_б^{(L)}$.

Похожий результат получается и тогда, когда в области $r_1 < r < r_2$ взят прямоугольный барьер высотой $E_б$. В этом случае в области $r_1 < r < r_2$ имеем решения

$$g = \exp\left(r k_б \sqrt{\varepsilon}\right), \quad h = \exp\left(-r k_б \sqrt{\varepsilon}\right) \tag{23}$$

и для функций G и H получаем простые выражения

$$G = a, \quad H = -\frac{1}{6}a^3, \quad a = r_2 - r_1$$

и соответственно для E_γ получается

$$E_\gamma = \frac{12CE_6}{(k_6a)^3}\left[\left(A + \frac{3}{k_6a}\right)^2 + \frac{3}{4(k_6a)^2}\right] \times$$
$$\times \left\{\left[B\left(A + \frac{3}{k_6a}\right) - \frac{3}{k_6a}\left(A + \frac{2}{k_6a}\right)\right]^2 + C\left(A + \frac{3}{k_6a}\right)^2\right\}^{-1},$$

где через A, B, C обозначены по-прежнему выражения (22).

Сечение рассеяния

Сечение упругого рассеяния дается формулой

$$\sigma(E) = \frac{\pi\hbar^2}{2mE}\sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)\left|1 - S_L(E)\right|^2. \qquad (24)$$

Слагаемые в выражении (24) с моментами $0 \leqslant L \leqslant L_{кр}$ имеют резонансный характер (резонанс при $L = 0$ имеется тогда, когда потенциальная энергия взаимодействия имеет барьер). Поэтому формула (24) принимает вид

$$\sigma(E) = \frac{\pi\hbar^2}{2mE}\sum_{L=0}^{L_{кр}}(2L+1)\frac{\left(E_\gamma^{(L)}\right)^2}{\left(E - E_6^{(L)}\right)^2 + \left(E_\gamma^{(L)}\right)^2}, \qquad (25)$$

где $E_6^{(L)}$ определяется уравнением (5) и $E_\gamma^{(L)}$ выражением (21б), причем отброшены члены с $L > L_{кр}$, которые в данном случае не имеют резонансного характера. Формула (25) отличается от обычной резонансной формулы тем, что все резонансные энергии $E_6^{(L)}$ лежат на одной резонансной траектории, определенной уравнением (5). Такая резонансная траектория полностью определена параметрами потенциала взаимодействия и является аналогом траектории Редже, однако эти два понятия не совсем совпадают. Редже рассматривал комплексные моменты как функцию от комплексных энергий, наши же резонансные траектории отысканы как полюса S-матрицы для комплексных энергий при действительных моментах.

Пример

Для иллюстрации полученных результатов вычислим резонансную траекторию для потенциала

$$U(r) = V_0\left[\left(\frac{a}{r}\right)^6 - \left(\frac{b}{r}\right)^4\right], \qquad (26)$$

частным случаем которого при $a = 0$ является известный поляризационный потенциал. Эффективная потенциальная энергия для потенциала (26) имеет максимум в точке

$$r_6 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{a^3}{b^2}}\left(\frac{2}{1-\xi}\right)^{1/2},$$

величиной

$$E_б(M^2) = \frac{1}{27} V_0 \left(\frac{b}{a}\right)^{12} (1-\xi)^2(1+2\xi), \tag{27}$$

где

$$0 \leqslant \xi = \left(1 - \frac{M^2}{M_{кр}^2}\right)^{1/2} \leqslant 1, \quad M_{кр}^2 = \frac{2}{3} m V_0 \frac{b^8}{a^6}.$$

При моментах $M > M_{кр}$ эффективного потенциального барьера не существует. Резонансные энергии $E_б^{(L)}$ получаются при значениях момента $M^2 = \hbar^2 L(L+1)$ $L = 1, 2, \ldots, L_{кр}$, где

$$L_{кр} = \left[\sqrt{\frac{M_{кр}^2}{\hbar^2} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right] \tag{28}$$

($[x]$ — целая часть x). Вид кривой $E_б = E_б(M^2)$ для потенциала (26) показан на рис. 3.

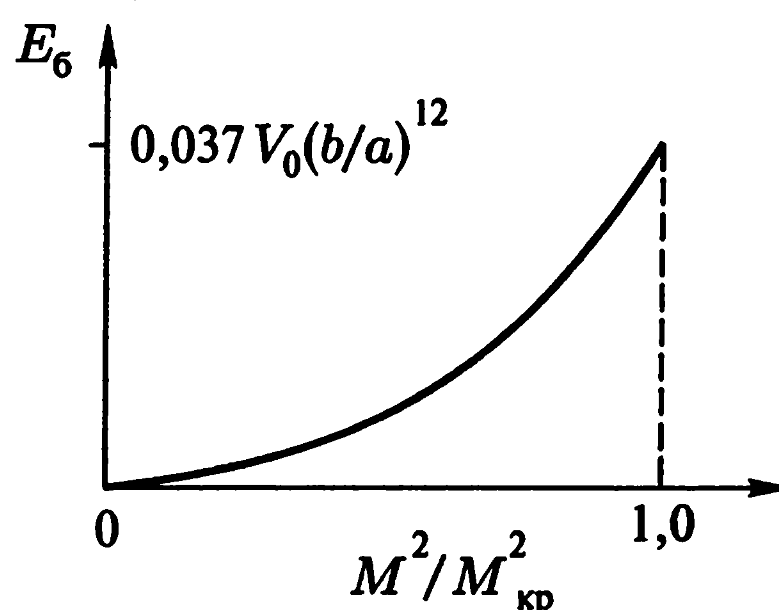


Рис. 3. Траектория резонансных энергий для потенциала (26)

В заключение авторы выражают благодарность Л. Г. Яковлеву и М. И. Файнгольду за сообщение ими полученных и неопубликованных результатов, а также О. Б. Фирсову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Ford K. W., Wheeler J. A.* Ann. Phys., **7**, 259, 1959.
2. *Ford K. W., Hill D. L., Wakano M., Wheeler J. A.* Ann. Phys., **7**, 239, 1959.
3. *Баширов М. Э., Файнгольд М. И., Яковлев Л. Г.* Особенности классического рассеяния в поле — α/r^k. Уч. Записки Ульяновского университета, **18**, 5, 1964.
4. *Файнгольд М. И.* Некоторые особенности спирального рассеяния. Диссертация АН УзССР, Институт ядерной физики. Ташкент, 1966.
5. *Лукач И.* Препринт ОИЯИ Р2-3848, Дубна, 1968.
6. *Лукач И., Смородинский Я. А.* Орбитирование и резонансные состояния. Препринт ОИЯИ Р2-3692, Дубна, 1968.
7. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. **1**. Изд-во Наука, 1965.

Спиральность и унитарные представления группы Лоренца

Г. И. Кузнецов, М. А. Либерман, А. А. Макаров, Я. А. Смородинский

1. Введение

Представления группы Лоренца могут быть, как известно, реализованы на специальных функциях, заданных на однородном пространстве — верхнем поле гиперболоида $u^2 = 1$ (u — 4-скорость).

Базисными функциями на гиперболоиде служат решения «угловой» части оператора Деламбера, которые в зависимости от выбранной системы координат оказываются разными типами гипергеометрических функций (см. работу [1]).

Таким образом, однако, можно реализовать не все представления группы Лоренца, а только «максимально» вырожденные, т. е. только те, у которых второе квантовое число (собственное значение второго оператора Казимира) равно нулю.

Это ограничение возникает из-за того, что группа движений гиперболоида описывается тремя параметрами, а группа Лоренца шестью. Поэтому реализация всех представлений группы Лоренца заставляет рассматривать не движение точки, а движение 3-репера на поверхности гиперболоида (в касательной гиперплоскости). В то же время из-за кривизны поверхности нельзя «синхронизировать» реперы во всех точках гиперболоида, так как при его параллельном переносе он будет поворачиваться и при обходе по замкнутому контуру не вернется в исходное положение. Аналогичное явление встречается при реализации представлений группы трехмерных вращений (трехпараметрической), которые можно провести только задавая репер в каждой точке сферы (двумерный, в касательной плоскости). Чтобы описать группу трехмерных вращений как группу движения точки, нам надо перейти на четырехмерную сферу. Таким образом, для того чтобы построить все представления группы Лоренца, надо найти другое, более удобное для этой цели пространство. Заметим, что построенные в работе [2] функции со спином реализуют представления на пространстве, являющемся прямым произведением $(2s + 1)$-мерного спинового пространства и пространства гиперболоида.

Наиболее простой способ построить все неприводимые представления (основной серии) группы Лоренца состоит в выборе в качестве однородного пространства поверхности верхней полы 4-конуса. Так как кривизна конуса равна нулю, то на конусе реперы могут быть однозначно ориентированы и в результате трех координат конуса оказывается достаточно для построения представлений.

Другим отражением свойства конуса служит существование у частиц с массой нуль (концы волновых векторов которых лежат на конусе) новой сохраняющейся и лоренц-инвариантной величины — спиральности. Именно спиральность, оказывается, можно отождествить с собственным значением второго оператора Казимира. Таким образом, реализация представления группы Лоренца на конусе тесно связана с формулами спиральных разложений [3] и из них могут быть получены разные типы мультипольных разложений. Базисные функции на конусе были получены в работе Вердиева [4].

Если построены функции на конусе, то переход на гиперболоид делается уже стандартными методами интегральной геометрии [5, 6]. При переходе на гиперболоид квантовое число ν теряет свой простой физический смысл: оно уже не равно спиральности частицы (которая, в свою очередь, величина не лоренц-инвариантная), а выступает как число, определяющее максимальное значение спиральности $\lambda \leqslant \nu$. Полученные функции на гиперболоиде не имеют определенного спина (спин не есть квантовое число в представлениях группы Лоренца). Функции с заданным спином являются собственными функциями не группы Лоренца, а группы Пуанкаре и строятся как суперпозиции полученных функций. Вид суперпозиции определяется видом волнового уравнения, которое и определяет коэффициенты разложения функций со спином по функциям, реализующим неприводимое представление группы Лоренца. Мы, однако, в этой работе не будем входить в подробности таких разложений.

2. Спиральность и реализация представлений группы Лоренца на конусе

Представления группы Пуанкаре характеризуются двумя операторами Казимира [7, 8]

$$C_1 = p_\mu p^\mu = m^2 \quad \text{и} \quad C_2 = W_\mu W^\mu = m^2 s(s+1),$$

где

$$W_\mu = \frac{1}{2i}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} M_{\nu\sigma} p_\lambda$$

— оператор Паули—Любанского, а m и s — соответственно масса и спин частицы. Для случая частиц с нулевой массой существуют два типа представлений группы Пуанкаре: представления с непрерывным спином ($C_2 \neq 0$) и представления с дискретным спином [7, 8], отвечающие $C_2 = 0$. В этом случае вводится и другой инвариант — спиральность $\lambda = \mathbf{kM}/k_0$, где $k = (k_0, \mathbf{k})$ — 4-импульс, а $\mathbf{M}$ — момент частицы ($k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0$).

Рассмотрим редукцию представлений группы Пуанкаре на группу Лоренца для случая нулевой массы и дискретного спина. Выберем представление генераторов группы Лоренца в виде [8]:

$$\begin{aligned}
M_1 &= -i[\mathbf{k}\nabla]_1 + \lambda\frac{k_1}{k_0+k_3}, & N_1 &= -ik_0\frac{\partial}{\partial k_1} - \lambda\frac{k_2}{k_0+k_3},\\
M_2 &= -i[\mathbf{k}\nabla]_2 + \lambda\frac{k_2}{k_0+k_3}, & N_2 &= -ik_0\frac{\partial}{\partial k_2} + \lambda\frac{k_1}{k_0+k_3},\\
M_3 &= -i[\mathbf{k}\nabla]_3 + \lambda, & N_3 &= -ik_0\frac{\partial}{\partial k_3}.
\end{aligned} \tag{1}$$

При этом $k_0 = +\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2\right)^{1/2}$, а из явного вида генераторов непосредственно следует, что

$$\lambda = \frac{\mathbf{kM}}{k_0}.$$

Генераторы M_i и N_i удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям группы Лоренца

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k, \quad [M_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk}N_k, \quad [N_i, N_j] = -i\varepsilon_{ijk}M_k. \tag{2}$$

Спиральность для частиц с нулевой массой покоя является инвариантом относительно преобразований Лоренца. Указанный выбор генераторов, как будет

показано ниже, позволяет отождествить спиральность с одним из инвариантов группы Лоренца, причем представления группы Лоренца реализуются на пространстве квадратично интегрируемых функций.

Базисные функции неприводимых представлений группы Лоренца — собственные функции двух операторов Казимира группы Лоренца

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3}(M_i^2 - N_i^2) \quad \text{и} \quad \Delta' = \sum_{i=1}^{3} M_i - N_i$$

и двух других операторов, отвечающих сужению группы Лоренца на различные подгруппы. Для унитарных, неприводимых представлений группы Лоренца собственные значения Δ и Δ' — соответственно $(-1-\rho^2+\nu^2)$ и $-\nu\rho$, где ρ — действительное, а ν — целое или полуцелое число[1].

Для получения явного вида базисных функций неприводимых представлений введем на конусе $k^2 = 0$ сферическую систему координат, отвечающую редукции $O(3,1) \supset O(3) \supset O(2)$. (В Приложении приведены полные наборы и базисные функции представлений $O(3,1)$ на конусе при редукции на компактные подгруппы.) В сферической системе координат (S-система) компоненты 4-вектора $k = (k_0, \mathbf{k})$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} k_0 &= e^a, & k_2 &= e^a \sin\theta \sin\varphi, \\ k_1 &= e^a \sin\theta\cos\varphi, & k_3 &= e^a\cos\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$-\infty < a < \infty, \quad 0 \leqslant \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

На конусе, в отличие от гиперболоида, из операторов Казимира выделяется часть, не содержащая угловых переменных. Вычисление Δ и Δ' приводит к следующим выражениям:

$$\Delta = \frac{d^2}{da^2} + 2\frac{d}{da} + \lambda^2, \quad \Delta' = i\lambda\left(1 + \frac{d}{da}\right). \tag{4}$$

Непосредственно из вида уравнений на собственные значения операторов Δ и Δ'

$$\Delta f(a) = \left(-1-\rho^2+\nu^2\right)f(a), \quad \Delta' f(a) = -\nu\rho f(a) \tag{5}$$

следует, что для унитарных представлений $\lambda = \nu$ и $f(a)$ — однородные функции e^a со степенью однородности

$$(-1+i\rho), \quad \text{т.е.} \quad f(a) = \exp(-1+i\rho)a.$$

Это значит, что разложение на конусе включает в себя просто разложение Фурье вдоль образующей[2].

В сферической системе координат в полный набор коммутирующих операторов входят также оператор квадрата полного момента J^2 и проекция полного момента на третью ось $J_3 = M_3$ с собственными значениями соответственно $J(J+1)$ и M:

$$\begin{aligned} J^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{2\lambda}{1+\cos\theta}\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \lambda\right), \\ J_3 = M_3 &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \lambda. \end{aligned} \tag{6}$$

---

[1] Представления (ν, ρ) и $(-\nu, -\rho)$ унитарно эквивалентны.

[2] Единица в экспоненте связана с мерой на конусе $k_0^{-1}d^3k = k_0^2 d\Omega$ и сокращается при составлении интеграла от квадрата функции (в формуле Планшереля).

Отсюда следует, что угловая зависимость базисных функций определяется D-функцией Вигнера[3] $D^J_{M\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi)$. Напомним, что M есть проекция J на неподвижную ось, а λ — проекция на подвижную ось (на скорость или волновой вектор).

Таким образом, полные нормированные базисные функции на конусе имеют вид

$$\Psi^{(\nu,\rho)}_{JM\lambda}(a, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}\, e^{(-1+i\rho)a} D^J_{M\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi), \tag{7}$$

причем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2a} da \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, \Psi^{*(\nu,\rho')}_{J'M'\lambda}(a, \theta, \varphi)\, \Psi^{(\nu,\rho)}_{JM\lambda}(a, \theta, \varphi) = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\delta(\rho - \rho'). \tag{8}$$

Итак, нами построены волновые функции частиц с нулевой массой покоя, обладающие заданной спиральностью $\lambda = \nu$, моментом J и его проекцией на неподвижную ось M:

$$\Psi^{(\nu,\rho)}_{JM\lambda}(k) = \left(\frac{k_0}{\omega}\right)^{-1+i\rho} D^J_{M\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi). \tag{9}$$

Заметим, что мы выбрали третий угол Эйлера равным $-\varphi$, а не нулю, как это часто делается, для того чтобы не возникло недоразумений при дифференцировании, т. е. при действии генераторов. В формуле (9) мы ввели некоторую постоянную частоту ω, чтобы иметь безразмерную величину. Если вернуться к экспоненциальной форме и положить $\ln\omega = b$, то множитель перед D-функцией примет вид $\exp(-1 + i\rho)(-b)$, т. е. Фурье-разложения поля с частотой b.

Функции (9) по определению преобразуются при любых преобразованиях Лоренца друг через друга, так что остаются неизменными лишь ρ и λ. Последнее обстоятельство следует особо подчеркнуть. При преобразованиях Лоренца (а тем более при вращениях) спиральность частицы остается неизменной. Если мы преобразуем, например, потенциал электромагнитного поля обычными формулами преобразования Лоренца для вектора, то для возвращения к спиральным или просто поперечным амплитудам надо дополнить это преобразование еще и градиентным преобразованием[4]. Функции (9) преобразуются так, что автоматически включают в себя это градиентное преобразование.

Чтобы записать обычное разложение электромагнитного поля по спиральным амплитудам (ср., например, [11]), надо построить из функции (9) вектор. Опуская на время множитель перед D-функцией, зададим орты D-функцией $D^1_{\mu\lambda}$. В этих функциях λ есть проекция орта на волновой вектор, а μ — проекция на неподвижные оси.

Используя эти орты, получаем так называемые шаровые векторы

$$(Y_{JM})_\mu = \sum_\lambda D^1_{\mu\lambda} D^J_{M\lambda}. \tag{10}$$

Если теперь еще разложить произведения двух D-функций по D-функциям, то получим разложение «шаровых» векторов, полученное Берестецким [12]. Например,

[3] Мы используем функции Вигнера в виде, приведенном в книге [9]:

$$D^J_{M\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi) = e^{iM\varphi} P^J_{M\lambda}(\theta) e^{-i\lambda\varphi}.$$

[4] Комбинация градиентного преобразования с лоренцевым для фотона была рассмотрена в работе [10].

для «электрического» шарового вектора

$$(-1)^{J+M+\mu+1}(Y_{JM}^{(\text{э})})_\mu = -\sqrt{J}\begin{pmatrix} J+1 & 1 & J \\ M+\mu & -\mu & -M \end{pmatrix} Y_{J+1,M+\mu} + \\ + \sqrt{J+1}\begin{pmatrix} J-1 & 1 & J \\ M+\mu & -\mu & -M \end{pmatrix} Y_{J-1,M+\mu}. \quad (11)$$

Шаровая функция возникла из-за того, что один из индексов у D-функций в (10) повторяется. Разложение (11) можно описать как разложение компонент вектора по неприводимым представлениям со спиральностью, равной нулю.

Подчеркнем, что функции (10) и (11) при преобразовании Лоренца будут приобретать лишние компоненты, от которых нужно будет избавляться градиентным преобразованием. Только неприводимые амплитуды сами перестраиваются нужным образом.

3. Метод орисфер и интегральное преобразование с конуса на гиперболоид

В этом разделе построим релятивистские функции со спиральностью для ненулевой массы, которые одновременно являются базисными функциями неприводимого представления на гиперболоиде (при $\nu \neq 0$) группы Лоренца.

Для построения базисных функций, реализующих неприводимые представления группы $O(3,1)$ для ненулевой массы, в [2] был использован алгебраический метод.

В настоящей работе для получения спиральных функций на гиперболоиде мы используем предложенный И. С. Шапиро метод интегральных преобразований, позволяющий получить разложение функции, заданной на гиперболоиде, по функциям на конусе [13]. Такие разложения с использованием интегральной геометрии получили дальнейшее развитие в работах Гельфанда, Граева [5] и были использованы для вывода формул прямого и обратного разложения по вырожденным представлениям ($\nu = 0$) группы Лоренца в различных системах координат в работе [1]. Этот способ удобен тем, что построение неприводимых компонент базисных функций и разложение по ним проще производить на конусе, а разложения на неприводимые компоненты функций на гиперболоиде получаются интегральным преобразованием от соответствующих разложений на конусе. В случае $\nu = 0$ функции на гиперболоиде[5] задаются в виде следующего интегрального преобразования от функций на конусе [1]:

$$f_\rho(u) = \int\limits_\Gamma (uk)^{-1-i\rho}\varphi_\rho(k)\,d^2k. \quad (12)$$

Здесь $\varphi_\rho(k)$ — неприводимые базисные функции на конусе, $f_\rho(u)$ — функции на гиперболоиде, а Γ — контур сечения конуса различными плоскостями в зависимости от выбора подгруппы, а именно:

а) S-системе отвечает сечение конуса плоскостью $k_0 = 1$, т. е. сфера $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$,

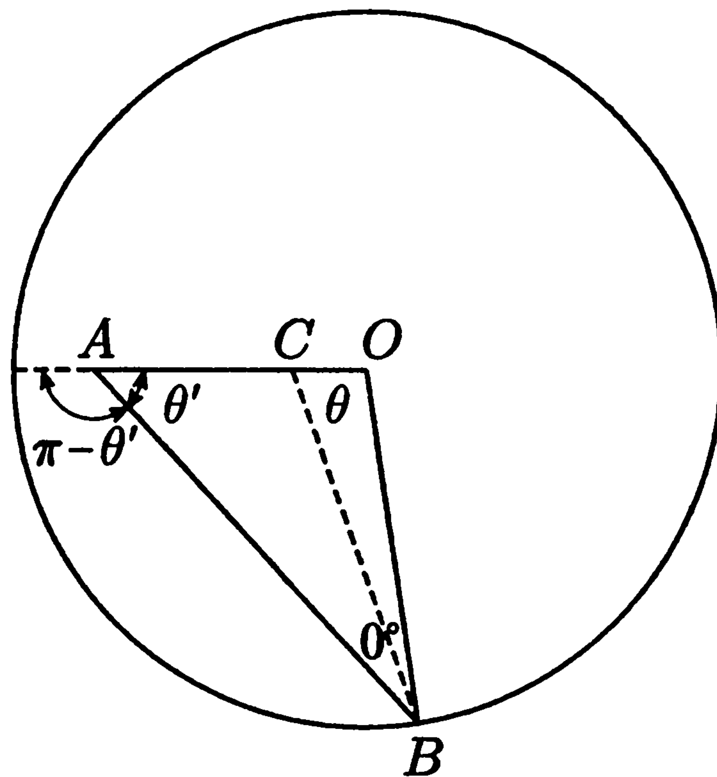
б) H-системе отвечает сечение конуса плоскостями $k_3 = 1$ и $k_3 = -1$,

в) O-системе отвечает сечение конуса плоскостью $k_0 - k_3 = 2$,

г) C-системе отвечает сечение конуса цилиндром $k_0^2 - k_1^2 = 1$.

[5] Для удобства мы рассматриваем пространство 4-скоростей.

Для невырожденных представлений группы Лоренца (для случая $\nu \neq 0$) мы хотим получить спиральные функции на гиперболоиде с помощью интегрального преобразования от спиральных функций на конусе. Так как для спиральных функций на гиперболоиде спин квантован по фиксированному направлению $\mathbf{u}$, а для безмассовых частиц, т. е. частиц, описываемых функциями на конусе, спин направлен всегда по $\mathbf{k}$ (по $\mathbf{k}$ ведется интегрирование), то ядро интегрального преобразования должно учитывать переквантование спина.



Другими словами, ядро искомого интегрального преобразования должно содержать по сравнению с ядром в формуле (12) еще D-функцию — матричный элемент поворота R от направления, задаваемого вектором $\mathbf{k}$, на направление $\mathbf{u}$. Поворот R может быть представлен как произведение двух вращений: одно — R_θ, поворачивающее спин от направления $\mathbf{k}$ на направление оси z системы координат $(1, 0, 0, 0)$ (заметим, что в этой системе мы выбираем ось z параллельной оси z координатной системы конуса) и второе вращение — R_α, возникающее при переходе от координатной системы $(1, 0, 0, 0)$ к системе $(u_0, \mathbf{u})$.

Таким образом, ядро интегрального преобразования может быть записано как [5, 14]:

$$K_{\rho\nu\sigma}(u, k) = cK_{\rho00}(u, k)D^s_{\sigma\nu}(R) = cK_{\rho00}(u, k)\sum_{\sigma'} D^s_{\sigma\sigma'}(R_\theta)D^s_{\sigma'\nu}(R_\alpha), \qquad (13)$$

ν — спиральность на конусе, σ — проекция спина на гиперболоиде. Спин частицы задается на этом этапе выбором D-функции (верхний индекс!).

Для нахождения углов поворота $R = R_\theta R_\alpha$ можно вычислить углы поворота репера от $\mathbf{k}$ на $\mathbf{u}$, используя формулы преобразования Лоренца [15], однако проще вычислить сразу суммарный поворот; это можно сделать методом геометрии Лобачевского на модели Бельтрами.

Действительно, рассмотрим треугольник ABO (см. рисунок). Точка O (центр окружности единичного радиуса) соответствует системе покоя частицы $u = (1, 0, 0, 0)$, точка A — системе координат, в которой частица имеет скорость $u = (u_0, \mathbf{u})$, точка B — точка абсолюта, описывает частицу с массой нуль, причем

$$\operatorname{th} OA = \frac{|\mathbf{u}|}{u_0}, \quad \operatorname{th} OB = |\mathbf{n}| = \frac{|\mathbf{k}|}{k_0}.$$

Опустим перпендикуляр из B на AO. Так как B — бесконечно удаленная точка, то прямые BA, BC и BO параллельны и $\angle ABO = 0$, а $\angle OAB = \theta'$ и $\angle ABO = \theta$ — углы параллельности Лобачевского. Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \operatorname{th} OC, \\ \cos\theta' &= \operatorname{th} AC. \end{aligned} \qquad (14)$$

Угол α, обусловленный прецессией спина при переносе его по контуру ABO, равен площади треугольника ABO [16]

$$\alpha = \pi - \theta - \theta'. \qquad (15)$$

21 Зак. 198

Этот же результат можно получить еще короче, если рассмотреть поворот спина с точки зрения наблюдателя в A. Он считает, что надо переквантовать спин от направления на B (направление квантования спина на абсолюте одинаково для всех наблюдателей) на направление от начала координат (т. е. на направление скорости частиц). Из чертежа видно, что угол поворота осей равен $\pi - \theta'$.

Из формул (14), (15) и найдем угол поворота R:

$$\cos(\alpha + \theta) = -\cos\theta' = \operatorname{th}(AO - OC) = \frac{u_0\cos\theta - |\mathbf{u}|}{u_0 - (\mathbf{un})}. \qquad (16)$$

Разложение функции $\Psi_{s\sigma}(p)$ с заданным спином на гиперболоиде по функциям $\varphi_{\rho\nu}(k)$, преобразующимся по неприводимым относительно собственной группы Лоренца представлениям ρ, ν, определяется теперь следующим выражением:

$$\Psi_{s\sigma}(u) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\sum_{\nu=-s-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{\infty} d\rho\,[\rho^2+\nu^2]\int_{\Gamma}(uk)^{-1-i\rho}D^{s}_{\sigma\nu}(R)\varphi_{\nu\sigma}(k)\,d^2k, \qquad (17)$$

где Γ — контур интегрирования (сфера, при сечении конуса $k^2 = 0$ плоскостью $k_0 = 1$), $d^2k = d\Omega$, R — поворот в плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{u})$ на угол $\alpha + \theta = \pi - \theta'$.

Пусть функция $\varphi_{\nu\rho}(k)$ представлена в виде ряда

$$\varphi_{\nu\rho}(k) = \sum a_{JM}(\rho)(2J+1)D^{J}_{M\nu}\left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right). \qquad (18)$$

Тогда для получения базисных функций в S-системе требуется вычислить интеграл

$$I^{s\sigma}_{\rho\nu JM}(M) = \int_{\Gamma}(uk)^{-1-i\rho}D^{s}_{\sigma\nu}(R)D^{J}_{M\nu}\left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right)d\Omega. \qquad (19)$$

Верхние индексы задают квантовые числа (спин и проекция), появившиеся на гиперболоиде.

Для вычисления интеграла (19) зададим $u = (u_0, \mathbf{u})$ в виде $u_0 = \operatorname{ch} a$, $\mathbf{u} = (0, 0, \operatorname{sh} a)$ (мы направили полярную ось в направлении $\mathbf{u}$). Согласно (3)

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta),$$

где θ, φ — азимутальные углы Эйлера так же, как и в разделе 2.

В результате интегрирования по φ получаем

$$I^{s\sigma}_{\rho\nu J}(u_0u_z) = 2\pi\int_{0}^{\pi} d\cos\theta(\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a\cos\theta)^{-1-i\rho}P^{s}_{\sigma\nu}(\alpha+\theta)P^{z}_{\sigma\nu}(\theta), \qquad (20)$$

где $P^{b}_{mn}(z)$ — матричные элементы группы вращений, выражаемые по известным формулам через полиномы Якоби [8]. Они нормированы следующим образом:

$$\int_{-1}^{+1} dz P^{l}_{mn}(z)P^{l'}_{mn}(z) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \qquad (21)$$

и имеют вид

$$P^l_{mn}(z) = i^{m-n}\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{(m-n)/2}\times$$
$$\times\left(\frac{1+z}{2}\right)^l\sum_{j=p}^{q}\frac{(-1)^j}{j!(l-m-j)!(l+n-j)!(m-n+j)!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^j, \qquad (21а)$$

где $p=\max(0,n-m)$, $q=\min(l+n,l-m)$.

Пользуясь формулой (16) для угла поворота $\pi-\theta'$, получаем

$$P^s_{\sigma\nu}\left[\cos(\alpha+\theta)\right] = i^{\sigma-\nu}\sqrt{(s-\sigma)!(s+\sigma)!(s-\nu)!(s+\nu)!}e^{(\sigma-\nu-s)a}(\operatorname{ch}a-\operatorname{sh}az)^{-s}\times$$
$$\times\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{(\sigma-\nu)/2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^s\sum_{r=M}^{N}\frac{(-1)^r e^{2ar}}{r!(s-\sigma-r)!(s+\nu-r)!(\sigma-\nu+r)!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^r, \qquad (21б)$$

где $z=\cos\theta$.

Подставим (21а) и (21б) в формулу (20) и выполним интегрирование. В результате получим

$$I^{s\sigma}_{\rho\nu J}(u_0,u_z) = 2\pi\sum_{r,j}G_{J\sigma\nu j}G_{s\sigma\nu r}(-1)^{r+j}\exp\left(\sigma-\nu-1-i\rho+2r-2s\right)a\times$$
$$\times\frac{\Gamma(J+s+1-\mu)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(J+s+2)}\,{}_2F_1\left(1+i\rho+s,J+s-\mu+1,J+s+2;\ 1-e^{-2a}\right), \qquad (22)$$

где

$$G_{J\sigma\nu j} = i^{\sigma-\nu}\frac{\left[(J-\sigma)!(J+\sigma)!(J-\nu)!(J+\nu)!\right]^{1/2}}{j!(J-\sigma-j)!(J+\sigma-j)!(\sigma-\nu+j)!}, \qquad \mu=\sigma-\nu+r+j.$$

Функция (22) совпадает с матрицей конечного гиперболического поворота группы Лоренца, вычисленной другими методами в работах [17, 18]. Эта функция описывает состояние с «главными квантовыми числами» — собственными значениями операторов Казимира ρ, ν, полным моментом J и проекцией его на полярную ось (которая есть одновременно и направление скорости) $M=\sigma$. Состояние имеет спин s; соответствующие трансформационные свойства были обеспечены выбором веса D-функции. Проекция спина на скорость (спиральность) также равна σ.

Чтобы перейти от точки $(u_0,0,0,u_z)$ к произвольному направлению (произвольной оси квантования), надо умножить (22) на соответствующую D-функцию. Так как по определению (22) имеет только одну компоненту с $M=\sigma$, то по нижнему индексу D-функции суммирование производить не надо и мы получаем

$$I^{s\sigma}_{\rho\nu JM}(u_0,\mathbf{u}) = I^{s\sigma}_{\rho\nu J}(a)D^J_{M\sigma}(\varphi,\theta,-\varphi), \qquad (23)$$

где

$$\mathbf{u} = (\operatorname{sh}a\sin\theta\cos\varphi,\ \operatorname{sh}a\sin\theta\sin\varphi,\ \operatorname{sh}a\cos\theta).$$

Здесь σ — проекция спина (или, что то же, полного углового момента) на скорость частицы, а M — проекция углового момента на полярную ось. По сути дела эти функции являются обобщением функций Берестецкого для частиц с массой и произвольным спином.

Для построения спинорных функций мы должны образовать линейную комбинацию из $2s+1$ функций (23), причем при переходе в произвольную координатную

систему необходимо определить пунктирные и непунктирные индексы. При этом представление может стать, вообще говоря, приводимым. Функции (23) при s, $\nu = 0$ переходят в функции, полученные в работе [1].

Отметим, что в системе покоя, т. е. при $a = 0$, как легко видно из (20),

$$I^{s\sigma}_{\rho\nu J}(1,0) = (-1)^{\sigma-\nu}\frac{4\pi}{2s+1}\,\delta_{Js}. \tag{24}$$

Спин s, входящий в функции (22)–(24), играет роль $\nu_{\max}$. Итак, разложение одночастичного спирального состояния $\Psi_{s\sigma}(u) = |u, \sigma(s)\rangle$ по неприводимым унитарным представлениям группы Лоренца в S-системе дается формулой

$$|u,\sigma(s)\rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3}\sum_{\nu=-s}^{s}\int_{-\infty}^{\infty} d\rho\,[\rho^2+\nu^2]\sum_{J,M} a^{\nu}_{JM}(\rho)I^{s\sigma}_{\rho\nu JM}(u). \tag{25}$$

Формула обратного преобразования получается с помощью оператора, сопряженного к оператору (13).

Выражение для базисных функций (20) также можно представить в другом виде, а именно через ряд по функциям Лежандра

$$P^{-1/2-l}_{-1/2-s-i\rho}(\operatorname{ch} a).$$

Для получения представления базисных функций в виде ряда по функциям Лежандра заметим, что из (20) при $s = \nu = 0$ следует:

$$\int_{-1}^{+1} dz\,(uk)^{\beta}P_l(z) = (-1)^l\sqrt{2\pi}\,\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-l+1)}\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} a}}\,P^{-1/2-l}_{\beta+1/2}(\operatorname{ch} a). \tag{26}$$

Если теперь разложить в формуле (20) произведение функций Якоби, стоящее под знаком интеграла, в ряд по полиномам Лежандра и воспользоваться (26), то вместо (22) получим

$$I^{s\sigma}_{\rho\nu J} = \sum_l a_l(a,J,s,\sigma,\nu)\frac{\Gamma(-i\rho-s)}{\Gamma(-i\rho-s-l)}\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} a}}\,P^{-1/2-l}_{-1/2-s-i\rho}(\operatorname{ch} a), \tag{27}$$

где коэффициенты a_l имеют вид

$$a_l = \sum_{r,j} G_{J\sigma\nu j}G_{s\sigma\nu r}(-1)^{\mu}!\mu(J+s-\mu)!\times$$

$$\times\frac{2l+1}{\sqrt{(J+s+l)!(J+s+l+1)!}}\,e^{-(s+\nu-\sigma-2r)a}\begin{pmatrix} \frac{J+s}{2} & \frac{J+s}{2} & l \\ -\frac{J+s}{2}-\mu & \frac{J+s}{2}+\mu & 0\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J \\ m_1 & m_2 & -m\end{pmatrix} \text{ — } 3j\text{-символ Вингера,}\quad \mu = \sigma-\nu+r+j.$$

Из формул (27) и (28) мы видим, что в отличие от функций работы [2], функции (27) содержат экспоненциальный весовой множитель, который и обеспечивает квадратичную интегрируемость полученных функций. При алгебраическом (не интегральном) методе построения такой множитель нужно было вводить искусственно для определения скалярного произведения.

4. Базисные функции $O(3, 1)$ в других системах координат

Для получения базисных функций в других системах координат на гиперболоиде, т. е. при редукции группы Лоренца на некомпактные подгруппы, достаточно знать коэффициенты перехода между базисными векторами в S-системе и в остальных координатных системах, а также выражение координат новой системы через координаты S-системы. Тогда неприводимые компоненты вектора состояний, например, в H-системе можно получить как

$$|H\rangle = |S\rangle\langle S\,|\,H\rangle.$$

Коэффициенты перехода между различными базисными векторами можно вычислить тем же методом, который был использован в работе [19], т. е. как коэффициенты перехода для неприводимых представлений, реализованных на функциях на конусе. Мы приведем здесь окончательное выражение для некоторых из них. Коэффициенты перехода из S-системы в C-систему имеют вид (при заданных ρ и ν)

$$\langle\tau M\,|\,JM\rangle = 2^{i\rho-3}i^{M-\nu}\Gamma\left(\frac{M-\nu+1+i\tau+i\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{M+\nu+1-i\tau+i\rho}{2}\right)\times$$
$$\times\left[\Gamma(M-\nu+1)\,\Gamma(M+i\rho+1)\right]^{-1}\times\sqrt{\frac{(2J+1)(J-\nu)!(J+M)!}{2(J+\nu)!(J-M)!}}\times$$
$$\times{}_3F_2\left(J+M+1,\ M-J,\ \frac{M-\nu+1+i\tau+i\rho}{2};\ M-\nu+1,\ M-i\rho+1;\ 1\right).\qquad(29)$$

Коэффициенты перехода из S-системы в O-систему можно записать в виде ряда по G-функциям Мейера

$$\langle\varkappa M\,|\,JM\rangle = \frac{i^{M-\nu}}{\Gamma(J+M+1)\,\Gamma(M-J)}\left(\frac{2}{\varkappa}\right)^{M+\nu}\sqrt{\frac{(2J+1)(J-\nu)!(J+M)!}{2(J+\nu)!(J-M)!}}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{J-M}\frac{\Gamma(J+M+n+1)\,\Gamma(M-J+n)}{\Gamma(M-\nu+n+1)\,\Gamma(M+n-i\rho+1)n!}G_{13}^{21}\left(\frac{\varkappa^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}0\\ M+n+i\rho,M+n,0\end{matrix}\right)\qquad(30\text{а})$$

или, как указал Виленкин, их можно выразить через ряд по функциям

$$\langle\varkappa M\,|\,JM\rangle = \frac{i^{M-\nu}}{\pi^2}\left(\varkappa\frac{(2J+1)(J-M)!(J-\nu)!}{2(J+M)!(J+\nu)!}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{J-M}\frac{(-1)^n(J+M+n)!}{(M-\nu+n)!\,\Gamma(M+n+i\rho+1)(J-M-n)!n!}\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{M+n+i\rho}K_{\nu-i\rho-n}.\qquad(30\text{б})$$

Эти коэффициенты при $\nu=0$ с точностью до фазовых множителей совпадают с соответствующими выражениями, полученными в работе [19].

Приложение

Рассмотрим системы координат, полные наборы коммутирующих операторов и соответствующие базисные функции, отвечающие редукции группы $O(3, 1)$ на некомпактные подгруппы.

1. Гиперболическая система H: $O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(2)$

$$k_0 = e^a \operatorname{ch}\beta, \qquad k_2 = e^a \operatorname{sh}\beta \sin\varphi,$$
$$k_1 = e^a \operatorname{sh}\rho \cos\varphi, \qquad k_3 = \varepsilon e^a,$$
$$-\infty < a < \infty, \quad 0 \leqslant \beta < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

$\varepsilon = \pm 1$ (плюс соответствует правой, минус левой половине конуса).

Инварианты подгрупп:

$$H^2 = M_3^2 - N_1^2 - N_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \operatorname{cth}\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{2\varepsilon\lambda}{\varepsilon + \operatorname{ch}\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \lambda\right),$$
$$M_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \lambda.$$

Их собственные значения равны соответственно $(1/4 + q^2)$ и M. Собственными функциями H^2 и M_3 будут матричные элементы унитарных неприводимых представлений группы $O(2,1)$

$$T^q_{M\lambda}(\varphi, \beta, -\varphi) = e^{iM\varphi} d^{q(\varepsilon)}_{M\lambda}(\operatorname{ch}\beta) e^{-i\lambda\varphi}.$$

Здесь $d^{q(\varepsilon)}_{M\lambda}(\operatorname{ch}\beta)$ выражаются через функции Якоби [6] $\mathfrak{B}^q_{M\lambda}(\operatorname{ch}\beta)$, причем

$$d^{q(\varepsilon=+1)}_{M\lambda}(\operatorname{ch}\beta) = \mathfrak{B}_{M\lambda}(\operatorname{ch}\beta) \qquad \text{при} \quad \varepsilon = +1, \quad \text{т. е.} \quad k_3 > 0,$$
$$d^{q(\varepsilon=-1)}_{M\lambda}(\operatorname{ch}\beta) = \mathfrak{B}_{M-\lambda}(\operatorname{ch}\beta) \qquad \text{при} \quad \varepsilon = -1, \quad \text{т. е.} \quad k_3 < 0.$$

2. Орисферическая система: $O(3,1) \supset E_2 \supset O(2)$

$$k_0 = e^a \frac{1 + r^2}{2}, \qquad k_2 = e^a r \sin\varphi,$$
$$k_1 = e^a r \cos\varphi, \qquad k_3 = e^a \frac{-1 + r^2}{2},$$
$$-\infty < a < \infty, \quad 0 \leqslant r < \infty, \quad o \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Инвариантами в этом случае являются:

$$O^2 = (N_1 + M_2)^2 + (N_2 - M_1)^2 = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{4\lambda}{r^2}\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \lambda\right),$$
$$M_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \lambda$$

с собственными значениями соответственно $\varkappa^2$ и M. Собственные функции O^2 и M_3 имеют вид

$$I^{\varkappa}_{M\lambda}(\varphi, r, -\varphi) = e^{iM\varphi} J_{M+\lambda}(\varkappa r) e^{-i\lambda\varphi},$$

где $J_{M+\lambda}(\varkappa r)$ — функции Бесселя.

3. Цилиндрическая система C: $O(3,1) \supset O(2) \otimes O(1,1)$

$$k_0 = e^a \operatorname{ch}\beta, \qquad k_2 = e^a \sin\varphi,$$
$$k_1 = e^a \cos\varphi, \qquad k_3 = e^a \operatorname{sh}\beta.$$
$$-\infty < a < \infty, \quad -\infty < \beta < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

В этом случае инвариантами подгрупп будут M_3 и N_3 с собственными значениями соответственно M и τ. Собственные функции

$$e^{iM\varphi}\, e^{-i\tau\beta}\, e^{-i\lambda\varphi}.$$

Операторы Казимира Δ и Δ' группы $O(3,1)$ во всех системах координат на конусе имеют тот же вид, что и в сферической системе. Таким образом, базисные функции группы $O(3,1)$ во всех системах координат на конусе являются произведением $\exp(-1+i\rho)a$ на базисные функции соответствующих подгрупп.

Литература

1. *Виленкин Н.Я., Смородинский Я.А.* ЖЭТФ, **46**, 1798, 1963.
2. *Либерман М.А., Смородинский Я.А., Шефтель М.Б.* ЯФ, **7**, 202, 1968.
3. *Jacob M., Wick G.C.* Ann. of Phys., **7**, 404, 1959.
4. *Вердиев И.А.* ЯФ, **9**, 1310, 1969.
5. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1962.
6. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. Наука, 1965.
7. *Широков Ю.М.* ЖЭТФ, **33**, 86. 1196, 1208, 1957.
8. *Lomont J.S.. Moses M.E.* J. Math. Phys., **3**, 405, 1963.
9. *Edmonds A.R.* Angular momentum in quantum Mechanics. Prinston, 1957.
10. *Любошиц В.Л., Смородиниский Я.А.* ЖЭТФ, **42**, 846, 1962.
11. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Релятивистская квантовая теория. Наука, 1968.
12. *Ахиезер Л.Ц., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. Физматгиз, 1959.
13. *Шапиро И.С.* Диссертация МГУ, 1955; ДАН СССР, **106**, 647, 1956.
14. *Попов В.С.* ЖЭТФ, **37**, 116, 1959.
15. *Чжоу-Гуан Чжао, Заставенко Л.Б.* ЖЭТФ, **35**, 1417, 1958.
16. *Смородинский Я.А.* Атомная энергия, **14**, 110, 1963.
17. *Нгуен Ван Хьеу, Дао Вонг-Дык.* ДАН СССР, **137**, 1281, 1967.
18. *Вердиев И.А.* ЖЭТФ, **55**, 1173, 1968.
19. *Либерман М.А., Макаров А.А.* ЯФ, **9**, 1314, 1969.

Волновые функции асимметричного волчка

И. Лукач, Я. А. Смородинский

Квантовомеханическая проблема волчков

Как известно, классическая проблема свободного вращения твердого тела имеет два интеграла движения, представляющие собой законы сохранения момента импульса и энергии [1, 2]:

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2, \quad \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2\mathscr{E}, \tag{1}$$

где M_1, M_2, M_3 — компоненты вектора момента импульса $\mathbf{M}$, $\mathscr{E}$ — вращательная энергия, $I_1 \leqslant I_2 \leqslant I_3$ — главные моменты инерции тела. Твердое тело называют асимметричным волчком, если $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, симметричным волчком, если $I_1 = I_2 \neq I_3$ (или $I_1 \neq I_2 = I_3$), и шаровым волчком, если $I_1 = I_2 = I_3$.

При квантовомеханическом рассмотрении вращения твердого тела в уравнениях (1) классические составляющие момента импульса обычно заменяют соответствующими квантовомеханическими операторами. При этом система уравнений (1) переходит в операторную систему уравнений

$$\frac{M^2}{\hbar^2} = \widehat{L}_1^2 + \widehat{L}_2^2 + \widehat{L}_3^2, \quad \frac{2\mathscr{E}}{\hbar^2} = a\widehat{L}_1^2 + b\widehat{L}_2^2 + c\widehat{L}_3^2, \tag{2}$$

где $a = 1/I_1$, $b = 1/I_2$, $c = 1/I_3$, $a \geqslant b \geqslant c$ и $\widehat{L}_1^2$, $\widehat{L}_2^2$, $\widehat{L}_3^2$ — составляющие оператора момента количества движения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\widehat{L}_i, \widehat{L}_k] = -ie_{ikl}L_l. \tag{3}$$

Таким образом, квантовомеханическое решение проблемы вращения свободного волчка сводится к отысканию собственных функций и собственных значений системы операторных уравнений (2). Интегралы движения не зависят от выбора системы отсчета, и для вычисления их значений можно использовать подвижную систему координат, жестко связанную с вращающимся телом. Оси координат этой системы направим вдоль главных осей инерции.

В случае шарового волчка обе квадратичные формы совпадают, и задача имеет по отношению к неподвижной системе координат симметрию трехмерных вращений — группу $O(3)$. Для симметричного волчка сохраняются две разные формы. Волновые функции в неподвижной системе координат в этом случае выражаются через D — функции Вигнера, являющиеся функциями углов Эйлера. Эти функции, как известно, образуют базис группы $O(4)$. Асимметричный волчок, казалось бы, также должен иметь решение в замкнутой форме, так как симметричному волчку соответствует вырожденная квадратичная форма. Мы покажем, что это действительно имеет место в подвижной системе координат [1]. Формально решение этой задачи

[1] Волновые функции асимметричного волчка в неподвижной системе координат могут быть получены унитарным преобразованием. Здесь мы останавливаться на этом не будем. Можно только отметить, что существует красивая связь между такими функциями и волновыми функциями задачи трех тел (нежесткий волчок), рассмотренной в работе [3].

связано с тем, что переменные в операторе Лапласа на сфере разделяются не только в полярной системе координат, но и в эллиптической. Поэтому на сфере существует два полных набора наблюдаемых: один отвечает интегралам симметричного волчка, другой — интегралам волчка асимметричного.

В двумерном пространстве постоянной положительной кривизны (на сфере $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$) существуют две системы координат, допускающие разделение переменных: полярная и эллиптическая [4]. Можно показать [5], что, наряду с оператором Лапласа

$$\widehat{L}=\widehat{L}_1^2+\widehat{L}_2^2+\widehat{L}_3^2=-\Delta, \tag{4}$$

в полярной системе координат

$$\xi=\sin\theta\cos\varphi,\qquad \eta=\sin\theta\sin\varphi,\qquad \zeta=\cos\theta \tag{5}$$

диагонален оператор

$$\widehat{L}_S=\widehat{L}_3^2, \tag{6}$$

а в эллиптической системе координат[2)]

$$\xi^2=\frac{(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{(a-b)(a-c)},\quad \eta^2=\frac{(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{(b-a)(b-c)},\quad \zeta^2=\frac{(c-\rho_1)(c-\rho_2)}{(c-a)(c-b)}, \tag{7}$$
$$(a>\rho_1>b>\rho_2>c)$$

дагонален оператор

$$\widehat{L}_E=a\widehat{L}_1^2+b\widehat{L}_2^2+c\widehat{L}_3^2. \tag{8}$$

Очевидно, что системы операторов (4), (6) и (4), (8) представляют собой системы операторов квантовомеханической задачи соответственно для симметричного и асимметричного волчков в подвижной системе координат. Для отыскания собственных функций и собственных значений систем операторов (4), (6) и (4), (8) необходимо выразить операторы $\widehat{L}_i$ через инфинитезимальные дифференциальные операторы в соответствующих системах координат. Прежде всего из общих теоретико-групповых соображений следует, что собственные значения оператора (4) равны $l(l+1)$, где l — целое или полуцелое положительное число.

В полярной системе координат для операторов $\widehat{L}$ и $\widehat{L}_S$ получаем явные выражения [6, 7]:

$$\begin{gathered}\widehat{L}=-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]=l(l+1),\\ \widehat{L}_S=-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}=m^2,\quad m=-l,-l+1,\dots,l-1,l.\end{gathered} \tag{9}$$

Собственными функциями этой системы операторов являются линейные комбинации хорошо известных сферических функций $Y_{lm}(\theta,\varphi)$:

$$Y_{lm}^{(+)}=\frac{1}{\sqrt{2}}[Y_{lm}+Y_{lm}^*],\quad Y_{lm}^{(-)}=\frac{1}{i\sqrt{2}}[Y_{lm}-Y_{lm}^*],\quad Y_{l0}^{(+)}=Y_{l0};$$
$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\,P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}. \tag{10}$$

[2)] Ортогональными линиями полярной системы координат на сфере является семейство концентрических окружностей ($\theta=\mathrm{const}$) и пучок прямых ($\varphi=\mathrm{const}$), проходящих через полюс сферы. Для эллиптической системы координат на сфере ортогональными линиями ($\rho_i=\mathrm{const}$, $i=1,2$) являются два семейства софокусных эллипсов и выпуклых гипербол.

20 Зак. 198

Сферические функции, выраженные через присоединенные полиномы Лежандра, пригодны только для целочисленных значений l и m. Чтобы получить выражения для сферических функций, пригодные как для случая целочисленных, так и для случая полуцелых значений l и m, преобразуем уравнение Лежандра, которому удовлетворяют присоединенные полиномы Лежандра, в гипергеометрическое уравнение, к которому, в свою очередь, применим квадратичное преобразование вида [8]

$$ {}_2F_1\left(a,\ b;\ \frac{a+b+1}{2};\ z\right) = {}_2F_1\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2};\ \frac{a+b+1}{2};\ 4z(1-z)\right). \tag{11} $$

В результате получаем

$$ \begin{aligned} P_l^{|m|}(\cos\theta) &\approx \sin^{|m|}\theta\, {}_2F_1\left(-l+|m|,\ l+|m|+1;\ 1+|m|;\ \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \\ &= \sin^{|m|}\theta\, {}_2F_1\left(-\frac{l-|m|}{2},\ \frac{l+|m|+1}{2};\ 1+|m|;\ \sin^2\theta\right) = \\ &= \cos\theta\sin^{|m|}\theta\, {}_2F_1\left(-\frac{l-|m|-1}{2};\ \frac{l+|m|}{2}+1;\ 1+|m|;\ \sin^2\theta\right). \end{aligned} \tag{12} $$

Гипергеометрические функции в (12) можно выразить через полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\theta)$:

$$ 2^n n! P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]. \tag{13} $$

Таким образом, получаем для нормированных сферических функций следующие выражения, пригодные как для целочисленных, так и для полуцелых значений l и m:

$(l-|m|)$ — четное число, тогда

$$ \begin{aligned} Y_{lm}(\theta,\varphi) = \Bigg[\frac{2l+1}{4\pi}\Gamma\left(\frac{l-|m|}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l+|m|+1}{2}\right)\times \\ \times\Gamma^{-1}\left(\frac{l+|m|}{2}+1\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{l-|m|+1}{2}\right)\Bigg]^{1/2} \sin^{|m|}\theta P^{(|m|,-1/2)}_{(l-|m|)/2}(\cos 2\theta)e^{im\varphi}; \end{aligned} \tag{14} $$

$(l-|m|)$ — нечетное число, тогда

$$ \begin{aligned} Y_{lm}(\theta,\varphi) = \Bigg[\frac{2l+1}{4\pi}\Gamma\left(\frac{l+|m|}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l-|m|+1}{2}\right)\times \\ \times\Gamma^{-1}\left(\frac{l-|m|}{2}+1\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{l+|m|+1}{2}\right)\Bigg]^{1/2} \cos\theta\sin^{|m|}\theta P^{(|m|,-1/2)}_{(l-|m|)/2}(\cos 2\theta)e^{im\varphi}. \end{aligned} \tag{15} $$

Построим явные выражения для операторов L_i в эллиптической системе координат:

$$ \begin{aligned} \widehat{L}_1 &= \frac{2i}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{(\rho_1-b)(\rho_1-c)(\rho_2-b)(\rho_2-c)}{(a-b)(c-a)}\right]^{1/2}\left[(\rho_1-a)\frac{\partial}{\partial\rho_1}-(\rho_2-a)\frac{\partial}{\partial\rho_2}\right], \\ \widehat{L}_2 &= \frac{2i}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{(\rho_1-c)(\rho_1-a)(\rho_2-c)(\rho_2-a)}{(b-c)(a-b)}\right]^{1/2}\left[(\rho_1-b)\frac{\partial}{\partial\rho_1}-(\rho_2-b)\frac{\partial}{\partial\rho_2}\right], \\ \widehat{L}_3 &= \frac{2i}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{(\rho_1-a)(\rho_1-b)(\rho_2-a)(\rho_2-b)}{(c-a)(b-c)}\right]^{1/2}\left[(\rho_1-c)\frac{\partial}{\partial\rho_1}-(\rho_2-c)\frac{\partial}{\partial\rho_2}\right]. \end{aligned} \tag{16} $$

Отсюда найдем, что операторы $\widehat{L}$ и $\widehat{L}_E$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\widehat{L} &= -\frac{4}{\rho_1-\rho_2}\left[\sqrt{-P(\rho_1)}\,\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\sqrt{-P(\rho_1)}\,\frac{\partial}{\partial\rho_1}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\sqrt{P(\rho_2)}\,\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\sqrt{P(\rho_2)}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\right)\right]=l(l+1),\\
\widehat{L}_E &= -\frac{4}{\rho_1-\rho_2}\left[\rho_2\sqrt{-P(\rho_1)}\,\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\sqrt{-P(\rho_1)}\,\frac{\partial}{\partial\rho_1}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\rho_1\sqrt{P(\rho_2)}\,\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\sqrt{P(\rho_2)}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\right)\right]=\varepsilon,
\end{aligned} \tag{17}$$

где через $P(\rho)$ обозначен полином $P(\rho)=(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)$.

Решение системы уравнений (сферо-конические волновые функции)

Обозначим $(2l+1)$ собственных волновых функций системы операторных уравнений (17), соответствующих $2l+1$ разным собственным значениям $\varepsilon_l^{(s)}$ ($s=1,2,\ldots,2l+1$, $\varepsilon_l^{(1)}<\varepsilon_l^{(2)}<\ldots<\varepsilon_l^{(2l+1)}$) через $E_l^{(s)}(\rho_1,\rho_2)$. Будем их называть волновыми функциями асимметричного волчка (они называются также сферо-коническими функциями).

Если положить $E(\rho_1,\rho_2)=\Lambda_1(\rho_1)\Lambda_2(\rho_2)$, то из (17) находим, что каждая из функций $\Lambda_1(\rho_1)$ и $\Lambda_2(\rho_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[4\sqrt{P(\rho)}\,\frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{P(\rho)}\frac{d}{d\rho}\right)-l(l+1)\rho+\varepsilon\right]\Lambda(\rho)=0. \tag{18}$$

Уравнение (18) представляет собой дифференциальное уравнение Ламе в алгебраической форме [8, 9]. Из теории дифференциального уравнения Ламе следует, что для целочисленных значений l его решением является $2l+1$ линейно независимых и взаимно ортогональных функций, соответствующих $2l+1$ разным собственным значениям $\varepsilon_l^{(s)}$, так называемых многочленов Ламе[3]. Решения уравнения (18) представляются в виде степенных рядов

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{\infty}A_r(\rho-b)^{l/2-r}, &&\sqrt{\rho-a}\sum_{r=0}^{\infty}B_r(\rho-b)^{l/2-1/2-r},\\
&\sqrt{\rho-c}\sum_{r=0}^{\infty}C_r(\rho-b)^{l/2-1/2-r}, &&\sqrt{(\rho-a)(\rho-c)}\sum_{r=0}^{\infty}D_r(\rho-b)^{l/2-1-r}.
\end{aligned} \tag{19}$$

[3] Решение уравнения Ламе существует также в случае полуцелых значений l. В этом случае уравнение Ламе преобразуется в уравнение Гойна [8, 9]. Собственные значения оказываются двукратно вырождены согласно теореме Крамерса, так как оператор энергии асимметричного волчка эквивалентен оператору квадрупольного взаимодействия.

Подставляя ряды (19) в уравнение (18), получаем для коэффициентов A_r, B_r, C_r, D_r следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
2r(2l+1-2r)A_r &= \left[\varepsilon - bl(l+1)+(2b-a-c)(l+2-2r)^2\right]A_{r-1} - \\
&\quad -(a-b)(b-c)(l+4-2r)(l+3-2r)A_{r-2}, \\
2r(2l+1-2r)B_r &= \left[\varepsilon - bl(l+1)+(b-c)(2l+3-4r)+(2b-a-c)(l+1-2r)^2\right]B_{r-1} - \\
&\quad -(a-b)(b-c)(l+2-2r)(l+3-2r)B_{r-2}, \\
2r(2l+1-2r)C_r &= \left[\varepsilon - bl(l+1)-(a-b)(2l+3-4r)+(2b-a-c)(l+1-2r)^2\right]C_{r-1} - \\
&\quad -(a-b)(b-c)(l+2-2r)(l+3-2r)C_{r-2}, \\
2r(2l+1-2r)D_r &= \left[\varepsilon - bl(l+1)+(2b-a-c)(l+1-2r)^2\right]D_{r-1} - \\
&\quad -(a-b)(b-c)(l+2-2r)(l+3-2r)D_{r-2}.
\end{aligned} \tag{20}$$

В формулах (20) $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$, если $n < 0$. Собственные значения $\varepsilon_l^{(s)}$ получаются из условий конечности рядов (20). В случае четных l, полагая

$$A_{l/2+1} = B_{l/2} = C_{l/2} = D_{l/2} = 0, \tag{21}$$

получаем для ε одно уравнение степени $l/2+1$ и три уравнения степени $l/2$, решением которых является $2l+1$ разных собственных значений $\varepsilon_l^{(s)}$. Аналогично, в случае нечетных l, полагая

$$A_{l/2+1/2} = B_{l/2+1/2} = B_{l/2+1/2} = D_{l/2-1/2} = 0, \tag{22}$$

получаем для ε три уравнения степени $l/2+1/2$ и одно уравнение степени $l/2$, решением которых является также $2l+1$ разных собственных значений $\varepsilon_l^{(s)}$. Коэффициенты A_0, B_0, C_0, D_0 определяются из условия нормировки сферо-конических волновых функций

$$\frac{1}{4}\int_b^a\int_c^b \left[E_l^{(s)}(\rho_1,\rho_2)\right]^2 \frac{(\rho_1-\rho_2)\,d\rho_1\,d\rho_2}{\sqrt{-P(\rho_1)}\sqrt{P(\rho_2)}} = 1. \tag{23}$$

Оператор энергии асимметричного волчка (8) вместе с коммутационными соотношениями (3) инвариантен по отношению к одновременному изменению знаков любых двух из операторов $\widehat{L}_1$, $\widehat{L}_2$, $\widehat{L}_3$, что формально совпадает с симметрией точечной группы D_2. Согласно этому волновые функции асимметричного волчка распадаются на четыре класса, преобразующиеся по неприводимым представлениям A, B_1, B_2, B_3 этой группы [6]. В связи с этим следует отметить следующие соотношения для собственных значений $\varepsilon_l^{(s)}$, которые нетрудно получить из формул (20). Для четных l

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in A}\varepsilon_l^{(s)} &= \frac{1}{6}l(l+1)(l+2)(a+b+c), \\
\sum_{s\in B_1,B_2,B_3}\varepsilon_l^{(s)} &= \frac{1}{2}l^2(l+1)(a+b+c)
\end{aligned} \tag{24}$$

и для нечетных l

$$\sum_{s\in A}\varepsilon_l^{(s)} = \frac{1}{6}l(l^2-1)(a+b+c),$$
$$\sum_{s\in B_1,B_2,B_3}\varepsilon_l^{(s)} = \frac{1}{2}l(l+1)^2(a+b+c). \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует также общее соотношение

$$\sum_{s=1}^{2l+1}\varepsilon_l^{(s)} = \frac{1}{3}l(l+1)(l+2)(a+b+c). \tag{26}$$

Нетрудно получить собственные значения и сферо-конические волновые функции для низших значений квантового числа l. При $l=0$ имеем $\varepsilon_0^{(1)}=0$ и одну сферо-коническую функцию $E_0^{(1)}(\rho_1,\rho_2)=(4\pi)^{-1/2}$, относящуюся к представлению A группы D_2. Для $l=1$ имеем

$$\varepsilon_1^{(1)}=b+c,\quad \varepsilon_1^{(2)}=a+c,\quad \varepsilon_1^{(3)}=a+b \tag{27}$$

и сферо-конические волновые функции

$$E_1^{(1)}(\rho_1,\rho_2)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\xi,\ E_1^{(2)}(\rho_1,\rho_2)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\eta,\ E_1^{(3)}(\rho_1,\rho_2)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\zeta, \tag{28}$$

которые относятся соответственно к представлениям B_3, B_2, B_1 (ξ,η,ζ — определены формулами (7)). В случае $l=2$ имеем два собственных значения

$$\varepsilon_2^{(1)}=2(a+b+c)-2\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)},$$
$$\varepsilon_2^{(5)}=2(a+b+c)+2\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)}, \tag{29}$$

которым соответствуют сферо-конические волновые функции $E_2^{(1)}(\rho_1,\rho_2)$, $E_2^{(5)}(\rho_1,\rho_2)$, относящиеся к представлению A. Нормированная сферо-коническая волновая функция $E_2^{(1)}(\rho_1,\rho_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned}E_2^{(1)}(\rho_1,\rho_2)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}&\left[3\rho_1-(a+b+c)-\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)}\right]\times\\ &\times\left[3\rho^2-(a+b+c)-\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)}\right]\times\\ &\times\Big\{2[(a-c)^2-(a-b)(b-c)]^2-(2b-a-c)\times\\ &\times\left[2(a-c)^2+(a-b)(b-c)\right]\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)}\Big\}^{-1/2}.\end{aligned} \tag{30}$$

Функция $E_2^{(5)}(\rho_1,\rho_2)$ отличается от $E_2^{(1)}(\rho_1,\rho_2)$ только знаком у радикала $\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)}$. Собственным значениям

$$\varepsilon_2^{(2)}=a+b+4c,\quad \varepsilon_2^{(3)}=a+4b+c,\quad \varepsilon_2^{(4)}=4a+b+c \tag{31}$$

соответствуют волновые функции

$$E_2^{(2)}(\rho_1,\rho_2)=\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\xi\eta,\quad E_2^{(3)}(\rho_1,\rho_2)=\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\eta\zeta,\quad E_2^{(4)}(\rho_1,\rho_2)=\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\zeta\xi, \tag{32}$$

относящиеся к представлениям B_1, B_3, B_2.

Литература

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. Наука, 1965.
2. *Уиттекер Е.* Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937.
3. *Нири Ю., Смородинский Я. А.* ЯФ, **9**, 882, 1969.
4. *Олевский М. Н.* Матем. сб., **27**, 379, 1950.
5. *Винтерниц П. Лукач И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **7**, 192, 1968.
6. *Давыдов А. С.* Квантовая механика. Физматгиз, 1963.
7. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро Я. З.* Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. **1–3**. Наука, 1965–67.
9. *Уиттекер Е., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. **2**. Физматгиз, 1963.

Деревья и задача многих тел

Я. А. Смородинский

1. Введение

То, о чем будет речь, не связано прямо с физикой нелинейных систем. Речь будет идти о сферических системах координат в многомерных пространствах. Но так как решение любой задачи начинается с выбора систем координат, то содержание статьи может пригодиться в самих разных областях. Если в квантовомеханической задаче речь идет о многих частицах или возбуждениях и если при взаимодействии закон сохранения углового момента играет свою роль, то в такой задаче мы встретимся и со сложением квантованных угловых моментов и с вычислением матричных элементов. В классической задаче приходится вычислять разные корреляционные функции — здесь опять нужны разные системы координат. Система параллелей и меридианов на многомерной сфере может быть проведена многими способами, но все такие системы не обладают симметрией, которая обычно есть у систем из многих частиц (в простейшем случае тождественных). Задача о симметризации различных величин как квантовых, так и классических приводит к преобразованиям между разными схемами сложения моментов и между разными системами координат. Такие соображения позволяют считать исследование разных систем координат делом вполне практическим.

Уже на задаче трех тел, в которой используется пятимерная сфера [1)], обнаружились красивые свойства многомерных сферических гармоник или, как их называют, гиперсферических функций. Как во всякой многомерной задаче, основная трудность изучения свойств таких функций состояла в громоздких алгебраических выкладках, которые не позволили выписывать явно различные выражения, если число измерений сколько-нибудь велико. Надо было построить новый формальный аппарат, в рамках которого можно было сформулировать простое правило для выписывания громоздких выражений и действий с ними. Оказалось, что для этой цели полезно использовать теорию графов в ее простейшем варианте — теории деревьев. Оказалось, что любой системе координат можно сопоставить граф-дерево, которое характеризует многие свойства этой системы: геометрия многомерной системы вполне определяется топологией дерева. Такая техника была описана в работе Виленкина, Кузнецова и Смородинского [1] в 1962 году, с тех пор техника еще упростилась. Работа [1] была дополнена работой Кильдюшова [2], в которой были вычислены коэффициенты преобразования между разными системами координат (формулы этой работы также сильно упрощаются). После этого работу можно было бы считать законченной, если бы вид коэффициентов преобразования не обнаружил неожиданную связь с коэффициентами теории угловых моментов. Оказалось, что T-коэффициенты, как они были названы в [2], представляют собой аналитическое продолжение так называемых коэффициентов Рака ($6j$ коэффициентов). Коэффициенты Рака, как известно, совершают преобразование между разными схемами сложения трех моментов, от схемы

[1)] Размерность сферы в пространстве импульсов в задаче N тел $3N-4$ при постоянной энергии системы.

$(j_1+j_2)+j_3$ к схеме $j_1+(j_2+j_3)$. Поскольку алгебра моментов не ассоциативна, эти две схемы разные. Складываемые моменты подчиняются правилу треугольника, т. е. из трех моментов $j_1+j_2=j_3$ можно построить треугольник $|j_1-j_2|<j_3<j_1+j_2$ [2]. Условия треугольника определяют область существования коэффициентов Рака. T-коэффициенты можно выразить теми же формулами, что и коэффициенты Рака, только для значений аргументов, не удовлетворяющих правилу треугольника. Кроме того, значения аргументов (целые и полуцелые в теории угловых моментов) могут быть целыми, полуцелыми и четвертьцелыми — обстоятельство, групповой смысл которого не вполне ясен (ср. [3]). Формально оказалось, что оба типа коэффициентов суть значения обобщенной гипергеометрической функции при аргументе единица: ${}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2,\beta_3;1)$. При этом должно быть выполнено условие $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1+\beta_1+\beta_2+\beta_3$. Коэффициенты преобразования для «деревьев» оказалось возможным представить как произведение или сумму произведений коэффициентов Рака, совсем так, как $3nj$ коэффициенты в теории угловых моментов строятся из $6j$ коэффициентов. Так возникает изоморфизм двух теорий, проявляющийся в том, что одни и те же граф-дерево или систему деревьев — «сеть» можно «перевести» на два разных языка — сложение угловых моментов и системы координат на многомерной сфере. Параллелизм получающихся формул указывает на глубокую связь двух задач, связь, смысл которой не вполне ясен.

Здесь мы дадим краткое изложение метода деревьев в обоих его вариантах. Так как в теории угловых моментов метод деревьев не приводит к новым формулам, то мы начнем с его координатного варианта.

2. «Дерево» координат

Мы начинаем с уравнения $N-1$-мерной сферы, на которой мы должны построить ортогональную систему координат:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1. \tag{2.1}$$

Смысл координат может быть разный: импульсы, тогда (2.1) — поверхность постоянной энергии или координаты в методе K-гармоник и т. п.

На двумерной сфере существуют две сферические системы

$$x_3=\cos\theta,\quad x_2=\sin\theta\cos\Phi,\quad x_1=\sin\theta\sin\Phi; \tag{2.2}$$

$$x_3=\cos\theta\cos\Phi,\quad x_2=\cos\theta\sin\Phi,\quad x_1=\sin\theta, \tag{2.3}$$

мы их изобразим деревьями (рис. 1). На трехмерной сфере существуют 5 систем координат [3]

$$\begin{aligned} &x_4=\cos\psi, && x_2=\sin\psi\sin\theta\cos\Phi,\\ &x_3=\sin\psi\cos\theta, && x_1=\sin\psi\sin\theta\sin\Phi; \end{aligned} \tag{2.4}$$

---

[2] Это правило удобнее записывать в форме условия на площадь треугольника

$$p(p-j_1)(p-j_2)(p-j_3)>0,$$

где

$$2p=j_1+j_2+j_3.$$

[3] Ко всем формулам надо еще добавить системы, получающиеся заменой $\Phi\to\pi-\Phi$ (поворот в узле Φ на π).

$$x_4 = \cos\psi, \qquad x_2 = \sin\psi\cos\theta\sin\Phi,$$
$$x_3 = \sin\psi\cos\theta\cos\Phi, \qquad x_1 = \sin\psi\sin\theta; \tag{2.5}$$

$$x_4 = \cos\psi\cos\theta, \qquad x_2 = \cos\psi\sin\theta\sin\Phi,$$
$$x_3 = \cos\psi\sin\theta\cos\Phi, \qquad x_1 = \sin\psi; \tag{2.6}$$

$$x_4 = \cos\psi\cos\theta\cos\Phi, \qquad x_2 = \cos\psi\sin\theta,$$
$$x_3 = \cos\psi\cos\theta\sin\Phi, \qquad x_1 = \sin\psi; \tag{2.7}$$

$$x_4 = \cos\psi\cos\Phi_1, \qquad x_2 = \sin\psi\cos\Phi_2,$$
$$x_3 = \cos\psi\sin\Phi_1, \qquad x_1 = \sin\psi\sin\Phi_2. \tag{2.8}$$

Эти координатные системы мы изобразим деревьями (рис. 2). Общие правила построения координатной системы по дереву формулируются так.

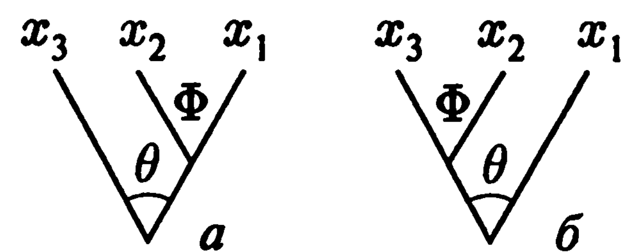


Рис. 1

Дерево имеет N концов-веток, равное числу измерений. Каждой координате-ветке отвечает определенный путь от корня дерева. Этот путь состоит из отрезков веток (или пропагаторов). Число веток, составляющих путь, определяет число множителей в выражении для координаты. Ветка соединяет два узла-развилки. Каждому узлу (развилке) сопоставлен угол. Координата выражается так: следуя от корня дерева и ветки, мы, проходя через очередной узел с углом θ, выписываем множитель $\cos\theta$, если следующая ветка пойдет налево, или $\sin\theta$, если она пойдет направо. Сопоставив формулы (2.2), (2.3) и (2.8) с деревьями на рис. 2, легко понять и запомнить это правило.

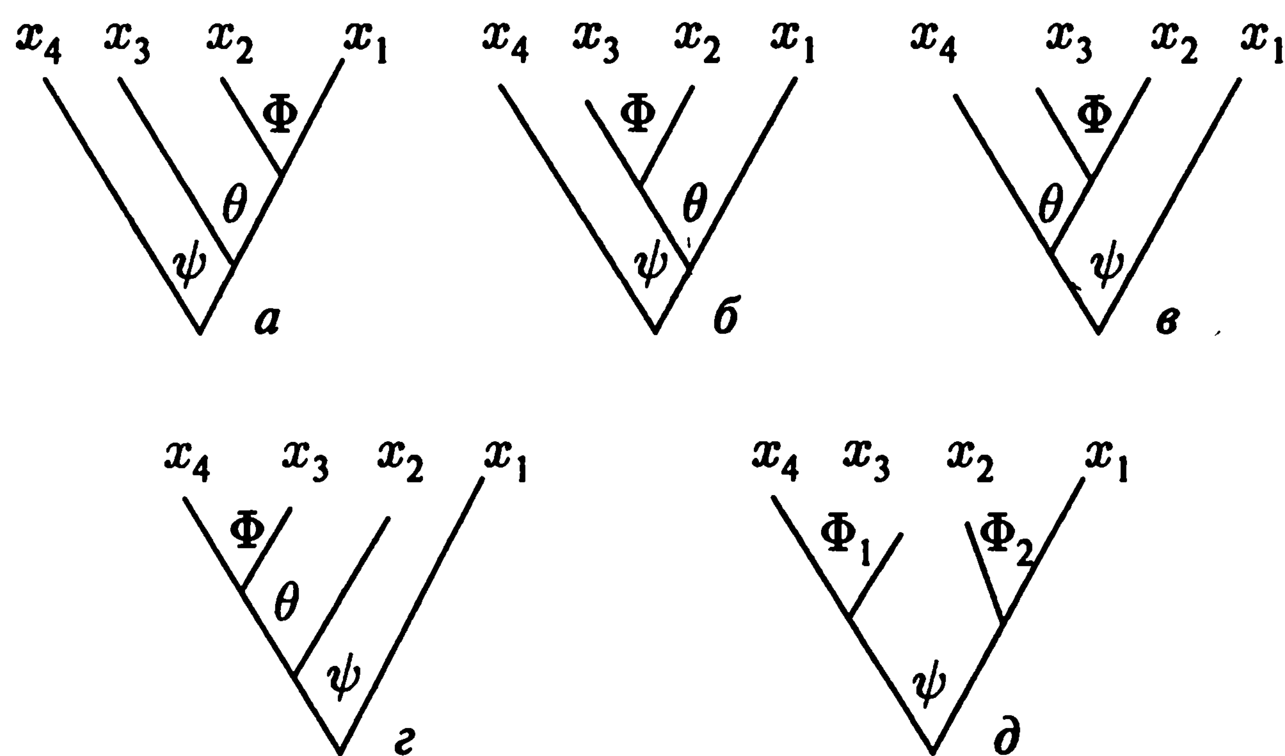


Рис. 2

Теперь легко видеть, что можно строить разные системы координат, выбирая разные деревья — разную систему путей между корнем и ветками дерева.

Среди деревьев можно определить классы. Класс — это множество деревьев, получаемых друг из друга с помощью вращений в узлах (представив себе, что узлы — это шарниры). Преобразования между деревьями одного класса имеют особенно простой вид. Можно сосчитать число разных деревьев, число их классов при заданном N.

Без вывода укажем, что если фиксировать порядок координат, то число деревьев равно

$$\nu(N) = \frac{[2(N-1)]!}{(N-1)!N!}.$$

Если допустить еще и перестановку координат (что нужно при симметризациях), то

$$\nu(N) = \frac{[2(N-1)]!}{(N-1)!}.$$

Основная идея метода сводится к тому, что все нужные нам выражения факторизуются — составляются из произведения (кроме лапласиана) множителей, составленных для каждого узла отдельно.

3. Коэффициенты Ляме

Квадрат элемента длины в ортогональной системе координат выражается формулой

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h_i^2\, d\theta_i^2, \tag{3.1}$$

где θ_i — углы при узлах, число узлов равно $N-1$, h_i называются коэффициентами Ляме.

Каждый из коэффициентов Ляме определяется произведением

$$h_i = \prod_j h_{ij}. \tag{3.2}$$

Значок j пробегает все узлы (включая корень и исключая узел i), которые надо пройти, чтобы дойти до ветки (координаты i). Пропагатор h_{ij} определяется так:

$$h_{ij} = \begin{matrix}\cos\theta_j\\ \sin\theta_j\end{matrix}, \tag{3.3}$$

в зависимости от того, в какую сторону продолжается путь от узла j: влево (косинус) или вправо (синус). Эту инструкцию просто понять, проследив за тем, как построены выражения для двух- и трехмерных сфер:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2; \tag{3.4}$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi d\theta^2 + \sin^2\psi \sin^2\theta d\Phi^2; \tag{3.5}$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi d\theta^2 + \sin^2\psi \cos^2\theta d\Phi^2; \tag{3.6}$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \cos^2\psi d\theta^2 + \cos^2\psi \sin^2\theta d\Phi^2; \tag{3.7}$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \cos^2\psi d\theta^2 + \cos^2\psi \cos^2\theta d\Phi^2; \tag{3.8}$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \cos^2\psi d\Phi_1^2 + \sin^2\psi d\Phi_2^2. \tag{3.9}$$

Как мы видим, в каждое слагаемое входит дифференциал угла от вершины и все предшествующие пропагаторы.

4. Оператор Лапласа

Зная коэффициент Ляме, построим оператор Лапласа на сфере

$$\Delta = \Big(\prod_i h_i\Big)^{-1} \sum \frac{\partial}{\partial\theta_j} \frac{1}{h_j} \prod_{s\neq j} h_s \frac{\partial}{\partial\theta_j}. \tag{4.1}$$

Запишем его опять для 2 и 3-мерных сфер:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2};\tag{4.2}$$

$$\frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\sin^2\psi\frac{\partial}{\partial\psi}+\frac{1}{\sin^2\psi}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2}\right);\tag{4.3}$$

$$\frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\cos^2\psi\frac{\partial}{\partial\psi}+\frac{1}{\cos^2\psi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2}\right);\tag{4.4}$$

$$\frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\cos^2\psi\frac{\partial}{\partial\psi}+\frac{1}{\cos^2\psi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2}\right);\tag{4.5}$$

$$\frac{1}{\cos\psi\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\cos\psi\sin\psi\frac{\partial}{\partial\psi}+\frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\partial^2}{\partial\Phi_1^2}+\frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2}{\partial\Phi_2^2}.\tag{4.6}$$

Если мы обозначим через l и r число узлов, лежащих слева и справа от рассматриваемого узла, то оператор Лапласа записывается так:

$$\Delta=\frac{1}{\cos^l\theta\sin^r\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos^l\theta\sin^r\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}\Delta^l+\frac{1}{\sin^2\theta}\Delta^r,\tag{4.7}$$

где операторы Δ^l и Δ^r строятся так же, как и оператор Δ; только построение начинается со следующей левой или правой вершины.

Сумму $l+r$ мы обозначим через s,

$$l+r=s.\tag{4.8}$$

Нетрудно видеть, что

$$s_j=N_j-2,\tag{4.9}$$

где N_j — размерность пространства, включающего все узлы, начиная с j и выше. Собственное значение оператора Лапласа на $N-1$-мерной сфере равно

$$\begin{aligned}\sigma(\sigma+N-2)&=\sigma(\sigma+s),\\ \Delta f_\sigma&=-\sigma(\sigma+s)f_\sigma,\end{aligned}\tag{4.10}$$

где σ — целое число.

5. Собственная функция

При построении оператора Лапласа мы сопоставили каждому узлу три числа: l — число левых последующих узлов, r — число правых последующих узлов ($s=l+r$), и постоянную σ (константу разделения[4]). Для дальнейшего оказывается достаточным использовать вместо трех чисел одно (индекс узла j_θ), определяемое так.

$$2j_\theta+1=\sigma_\theta+\frac{s_\theta}{2}.\tag{5.1}$$

Собственную функцию оператора Лапласа надо нормировать на $N-1$ мерной сфере. Оказывается, однако, удобнее нормировать вклад от каждого узла (входящий множителем в полную собственную функцию) на трехмерной сфере, интегрируя норму функции по θ с весом $\mu(\theta)=\sin 2\theta$.

[4] Факторизация, очевидно, есть следствие разделения переменных.

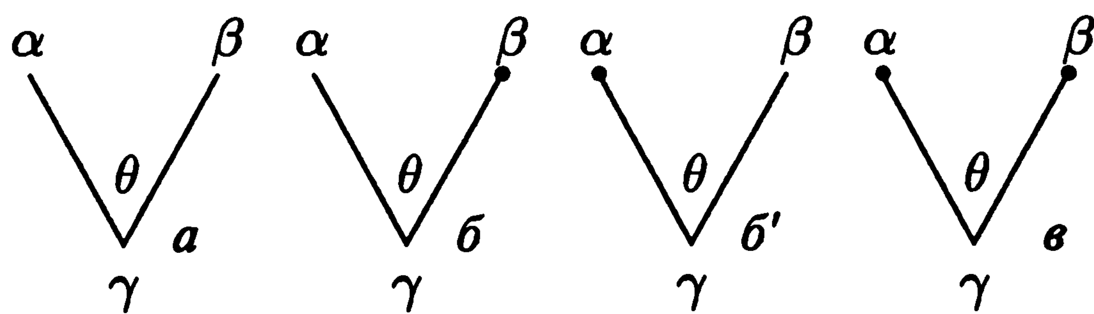


Рис. 3

Полная собственная функция представляется как произведение множителей, каждый из которых зависит от одного угла и трех индексов, самого узла и двух вышележащих слева и справа.

Нетрудно понять, что узлы могут быть четырех разных сортов (рис. 3). Кружочком отмечены последующие узлы, отсутствие кружочка означает, что мы имеем дело с веткой — координатным концом дерева.

При работе с деревьями надо быть аккуратным в выборе границ изменения переменных. Эти границы выбираются так, чтобы сфера покрывалась координатной сеткой один раз. За этим проще всего проследить по аргументу полинома Якоби (см. ниже), который всегда должен изменяться на интервале (0, 1). Отсюда получаем следующие пределы:

$$0 \leqslant \varphi_{\text{а}} \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi_{\text{б}} \leqslant \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_{\text{б}'} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi_{\text{в}} \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{5.2}$$

Наиболее общий тип узла — это узел типа б. Он дает вклад в собственную функцию (α, β, γ — номера трех узлов (см рис. 3)):

$$f(\theta) = \left(N_\gamma^{\alpha,\beta}\right)^{-1/2} \sin^{2j_\beta+1}\theta \cos^{2j_\alpha+1}\theta \, P_{j_\gamma-j_\alpha-j_\beta-1}^{(2j_\beta+1,2j_\alpha+1)}(\cos 2\theta). \tag{5.3}$$

Нормировочная постоянная определяется известной формулой нормировки полиномов Якоби:

$$\left(N_\gamma^{\alpha,\beta}\right)^{-1} = \frac{(j_\gamma - j_\alpha - j_\beta - 1)!(j_\gamma + 1)}{(j_\gamma + j_\alpha - j_\beta)!(j_\gamma - j_\alpha + j_\beta)!}. \tag{5.4}$$

В начальной стадии работы с деревьями казалось, что узлы а, б, б′ должны быть рассмотрены отдельно. Так и было сделано в работах [1, 2]. Однако небольшое обобщение позволяет избежать этого. Рассмотрим простейший узел (а). От него возникает множитель $(2\pi)^{-1/2} \exp im\varphi$, или если ограничиться вещественными функциями, то $\cos m\varphi$ (замену $\cos m\varphi \to \exp im\varphi$ всегда можно иметь в виду).

Если обратить внимание на полиномы Чебышева и их связь с полиномами Эрмита, то мы обнаружим формулу

$$T_{n/2}(\cos\theta) = \cos\frac{n}{2}\theta = \frac{m!\Gamma(3/2 - m)}{\Gamma(3/2)} P_{n/2}^{(-1/2-1/2)}(\cos\theta), \tag{5.5}$$

т. е. нужный нам косинус возникает, если мы формально положим верхние индексы у полинома Якоби равными $-1/2$, или, что то же самое, будем рассматривать координатную вершину как узел с $2j+1 = -1/2$, т. е. $j = -3/4$. Все, что надо при этом помнить, это то, что $\exp im\Phi$ и $\cos m\Phi$ по-разному нормированы: при экспоненте надо писать множитель $(2\pi)^{-1/2}$, а при косинусе — $\pi^{-1/2}$ (учитывая, что угол изменяется теперь в пределе от 0 до 2π). Заметим еще, что в функции (5.3) появятся отрицательные дробные степени у тригонометрических функций; эти множители будут использованы для сокращения веса при интегрировании.

Не приводя подробностей, укажем лишь, что анализ формул для двух оставшихся случаев (б) и (б′) показал, что и здесь остается справедливой формула (5.3), если свободному концу приписывать j, равное $-3/4$[5].

[5] Считая формально, что за координатным концом есть −1 узел.

Смысл такой операции не вполне ясен. Можно только отметить, что для 3-мерной сферы в системе координат (2.5) полином Якоби сводится к D-функции Вигнера. Для этого случая $s = 2$ (см. рис. 2) и $2j + 1 = \sigma + 1$, т. е. $j = \sigma/2$, что правильно определяет индекс функции Вигнера (см. подробнее [1]). Это оправдывает выбор обозначений.

Отметим еще одну формулу. Собственное значение лапласиана можно переписать так[6]:

$$\sigma(\sigma + s_\sigma) = (2j_\sigma + 1)^2 - \frac{s_\sigma^2}{4}.$$

6. Пересадка

Теперь мы можем перейти к основной задаче — показать, как преобразуются функции (5.2), заданные разными деревьями. Подробно вычисление таких коэффициентов было сделано в [2]. Решение задачи состояло в том, чтобы найти элементарные операции, на которые можно разбить (факторизовать) коэффициент преобразования. Таких операций оказалось две. Одна из них — поворот (рис. 4), который приводит к появлению фазового множителя. Этот фазовый множитель легко вычисляется, так как он происходит от замены $\theta \to \pi/2 - \theta$ в полиномах Якоби. Кроме того, происходит замена $\cos\theta \rightleftarrows \sin\theta$ в множителях перед полиномами. На этом мы здесь останавливаться не будем.

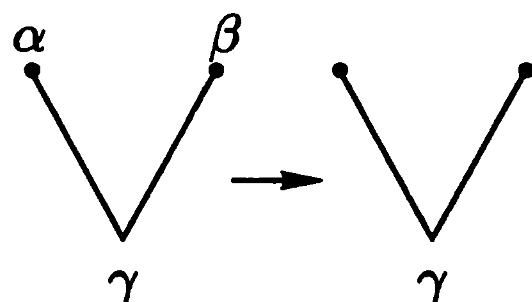


Рис. 4

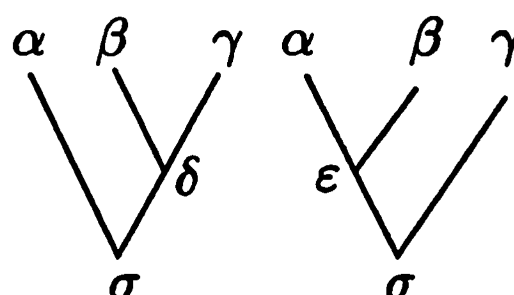


Рис. 5

Другая операция — пересадка, она и составляет существенный элемент преобразований. Пересадка (рис. 5) затрагивает узел и три ближайших к нему узла (два последующих и какой-то еще один за ними). Операция пересадки состоит в переносе одного последующего узла. Из рисунка видно, что операция пересадки захватывает 6 узлов, они обозначены через α, β, γ, ε, δ, σ. Коэффициент преобразования определяется формулой

$$|\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon\,\sigma\rangle = \left\| \begin{matrix} \alpha\,\beta\,\varepsilon \\ \gamma\,\sigma\,\delta \end{matrix} \right\| |\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\sigma\rangle. \tag{6.1}$$

Для узлов общего вида, т. е. для узлов, которые не соседствуют со свободными, координатными концами, коэффициент преобразования оказался связанным с коэффициентом Рака [4]. Вычисления показали, что

$$\left\| \begin{matrix} \alpha\,\beta\,\varepsilon \\ \gamma\,\sigma\,\delta \end{matrix} \right\| = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j}\left[(2j_\varepsilon + 1)(2j_\delta + 1)\right]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} j_\alpha\, j_\beta\, j_\varepsilon \\ j_\gamma\, j_\sigma\, j_\delta \end{matrix} \right\}. \tag{6.2}$$

Существенную роль в выводе играла симметрия формул теории угловых моментов относительно подстановки $j \to -j - 1$[7]. Это счастливое обстоятельство

[6] Замена $\sigma \to -\sigma - s$, $j \to -j - 1$ оставляет соотношение неизменным.

[7] Если мы в нижнем индексе полинома Якоби произведем такую подстановку, то $j_\gamma - j_\alpha - j_\beta - 1 \to j_\alpha + j_\beta - j_\gamma$. Новые моменты будут удовлетворять правилу треугольника. При замене $j \to -j - 1$

позволяет использовать хорошо развитый аппарат теории угловых моментов и применить его к преобразованиям координат.

Любое преобразование теперь сводится к вычислению произведений или сумм произведений коэффициентов Рака, т. е к вычислению $3nj$ коэффициентов.

При этом действует правило Бидерхарна: если при пересадках не происходит существенной перестановки координат, то преобразование осуществляется простым преобразованием коэффициентов Рака. Если пересадка содержит существенную перестановку, то появляются суммы произведений, т. е. $3nj$ коэффициенты более высокого порядка: $9j$, $12j$, $15j$ символы и т. д.

7. Угловые моменты

Деревья можно прочитать и другим образом. Сопоставим каждому узлу момент j. Тогда дерево (рис. 1) можно расшифровать как сложение трех моментов. Разные деревья того же порядка отвечают разным способам суммирования. Элементарному дереву — вилке с тремя узлами — можно сопоставить коэффициент Клебша—Гордана (ККГ) или коэффициент Вигнера:

$$\begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2j_3+1}} (-1)^{m_3-j_1-j_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 m_3 \rangle. \tag{7.1}$$

Изображение ККГ в виде вилки позволяет развить технику суммирования, аналогичную известной технике Левинсона (см. [5, 6]). Надо ввести для этого перевернутые деревья («корнем вверх») и описывать суммирование по квантовому числу m как объединение концов с одинаковым номером.

Преобразование между деревьями есть коэффициент Рака:

$$\langle j_1 j_2 j_{12} j_3 j | j_1 j_2 j_3 j_{23} j \rangle = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j} \left[(2j_{12}+1)^{1/2} (2j_{23}+1)^{1/2} \right] \begin{Bmatrix} j_1 j_2 j_{12} \\ j_3 j j_{23} \end{Bmatrix}. \tag{7.2}$$

Из графа видно, что в преобразовании участвуют 6 моментов. Если всего складывается n моментов, то число узлов в дереве (внутренних) равно $n-2$ (доказывается по индукции). Полное число разных углов в двух деревьях, между которыми происходит перестройка, равно $2(n-2)+(n+1) = 3(n-1)$. Отсюда возникает $6j$, $9j$, $12j$ и т. д. При классификации пересадки надо выделить те, которые сохраняют порядок складываемых моментов или различаются несущественной перестановкой (т. е. перестановкой, которая сводится к поворотам ветвей) [8]. Такие пересадки описываются произведением коэффициентов Рака (теорема Биденхарна, см. разд. 9). Если в пересадке участвует одна существенная транспозиция, то появляется новый старший коэффициент. Для 4 моментов $9j$ при двух существенных перестановках, 5 моментах $12j$ коэффициент и т. д. Таким образом, можно произвести полную классификацию всех $3nj$ коэффициентов и соответственно всех преобразований координат.

8. Открытые развилки

При расчетах преобразований координат коэффициенты Рака упрощаются, если в элементарном узле (развилке) один или два конца свободные.

σ переходит в $-\sigma-2$, а из сохранения $j(j+1)$ вытекает, что при этом сохраняется $\sigma(\sigma+s)$, т. е. это преобразование сохраняет собственное значение лапласиана, что проливает некоторый свет на смысл j.

[8] Их 2^{n-1} для каждого дерева.

Подробно эти случаи разобраны в [2]. Назовем узел с двумя открытыми концами — открытой развилкой. Как обычно, открытому концу сопоставляется момент $-3/4$. Если открытая развилка присутствует в обоих деревьях, между которыми происходит пересадка, то коэффициент Рака сводится к D-функции Вигнера с аргументом $\cos\theta = 1$.

Если открытая вилка присутствует только у одного из двух деревьев, то коэффициент превращается в КГГ; операция оказывается идентичной построению представления $O(4)$ как произведения $O(3) \times O(3)$.

Эти упрощения очень существенны. Так, например, при симметризации волновой функции 3 частиц приходится иметь дело с $15j$ коэффициентом ($3 \cdot 3 - 3 = 6$, $3(6-1) = 15$). Однако так как все 6 концов дерева свободные, то в коэффициент преобразования не входят коэффициенты выше $6j$. Эта задача приводит к вычислению обобщенных коэффициентов Талми—Мошинского [7]. Применение к ней метода деревьев будет опубликовано отдельно.

Результаты такого рода указывают на связь полученных коэффициентов с D-функциями на многомерных сферах, отвечающих повороту на $\pi/2$. Возникает подозрение, что поворотам на произвольный угол также отвечают значения обобщенных коэффициентов — коэффициентов Фурье от гипергеометрических функций при аргументе, отличном от единицы. Эта связь заслуживает дальнейшего изучения.

9. Теорема Биденхарна

Всевозможные деревья заданной размерности можно соединить линиями. Образуется сеть, похожая на схему задачи Эйлера о мостах. Рассмотрим деревья четвертого порядка. Их сеть при непереставленных концах образует замкнутое кольцо с пятью сторонами (рис. 6). Расшифровывая ее, мы можем записать, что произведение 5 коэффициентов Рака (просуммированное до внутренним моментам с учетом дополнительных множителей (6.2)) равно 1. Более эффективное равенство получится, если мы запишем условие, что от одного дерева к другому (через одно) можно прийти двумя путями — один путь содержит два звена без суммирования[9], второй — два звена с одним суммированием. Отсюда следует, что сумма произведений трех коэффициентов Рака сводится к простому произведению двух коэффициентов. Это и есть теорема Биденхарна, обеспечивающая отсутствие суммирования в преобразованиях без существенных перестановок.

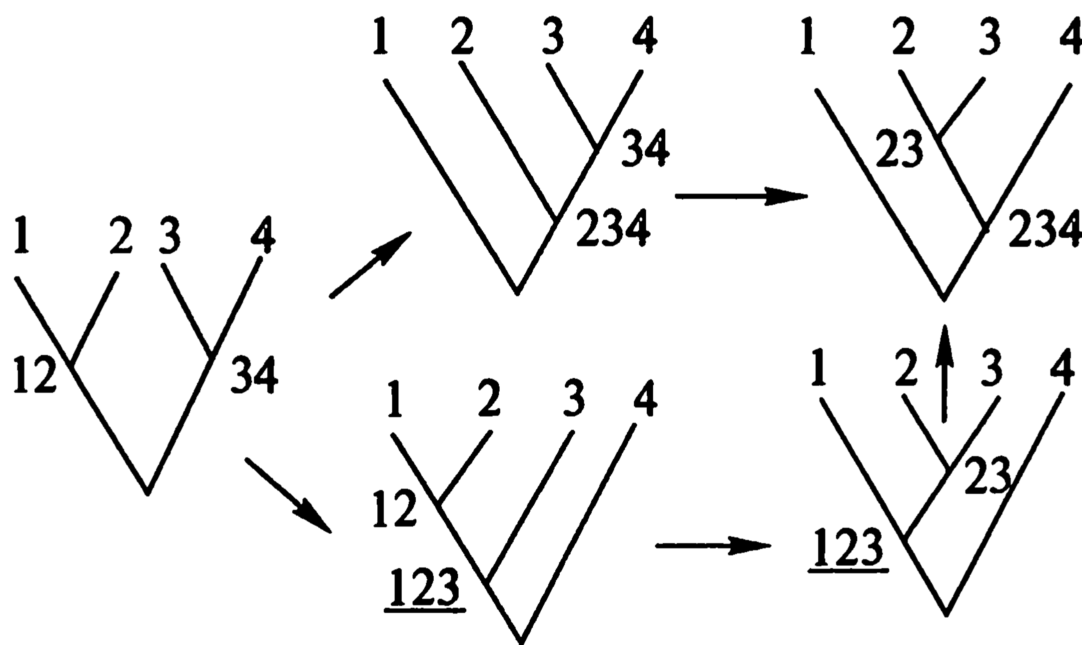


Рис. 6

Так как (это доказывается) в сетях — таких преобразованиях — не встречается ячеек с числом сторон больше 5, а четырехугольные ячейки не дают новых соотношений, то теорема Биденхарна исчерпывает все возможные преобразования без существенных перестановок. Мы оставляем без внимания другие задачи по теории угловых моментов и теории координат и их симметрий. Мы также не упоминаем

---

[9] Суммирование происходит по узлам, отсутствующим в начальном и конечном деревьях. Такие узлы подчеркнуты на рисунке.

естественно возникающих приложений к теории спецфункций. Задача доклада — обратить внимание на необыкновенную простоту метода деревьев и побудить физиков посмотреть на другие возможные приложения метода. Тот факт, что одно и то же дерево может иметь по крайней мере двойную расшифровку, указывает на возможную применимость метода деревьев к тем задачам, в которых решение выражается через обобщенные гипергеометрические функции.

Метод деревьев создавался в сотрудничестве с Н. Я. Виленкиным, Г. И. Кузнецовым, Е. Л. Сурковым, Ю. А. Даниловым, М. С. Кильдюшовым, В. С. Эфросом, Ю. А. Смирновым. Всем им приятно выразить мою признательность.

Литература

1. *Виленкин Н. Я., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **2**, 906, 1965.
2. *Кильдюшов М. С.* ЯФ, **15**, 197, 1972.
3. *Смирнов Ю. Ф.* ЯФ, **20**, 540, 1975.
4. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Письма в ЖЭТФ, **22**, 378, 1975.
5. *Юцис А. П., Левинсон И. Б., Ванагас В. В.* Математический аппарат теории момента количества движения. Вильнюс: Наука, 1960.
6. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
7. *Смородинский Я. А., Эфрос В. С.* ЯФ, **17**, 210, 1973.

Эффект Ааронова—Бома на тороидальном соленоиде

В. Л. Любошиц, Я. А. Смородинский

1. Введение

Ааронов и Бом обратили внимание на то, что магнитное поле влияет на интерференцию когерентных пучков заряженных частиц, распространяющихся вне области локализации поля [1]. Они рассмотрели также рассеяние зарядов на бесконечно длинном соленоиде и показали, что рассеяние обусловлено изменением фазы волновой функции в области, в которой нет магнитного поля, но вектор-потенциал отличен от нуля; при этом полное сечение рассеяния оказывается бесконечным. В дальнейшем появилось большое количество работ, посвященных интерпретации данного эффекта и обсуждению локальности в квантовой механике (см., например, [2–5] [1])).

Анализ, содержащийся в цитированных работах, имеет определенный методический недостаток, связанный с бесконечностью соленоида. Такая идеализация при рассмотрении принципиальных вопросов не вполне корректна, хотя в данном случае она и не приводит к ошибке.

В связи с этим представляет интерес переход от бесконечного соленоида к конечному, свернутому в тор. В этом случае магнитное поле строго равно нулю во всем пространстве вне соленоида. Как мы увидим ниже, в этом случае также может быть указан интерференционный эксперимент, аналогичный эксперименту Бома—Ааронова. Задача о рассеянии заряженных частиц на тороидальном соленоиде имеет простое решение; сечение рассеяния оказывается, естественно, конечным и описывается дифракционными формулами. Следует отметить, что если заряженные частицы не попадают внутрь соленоида, рассеяние определяется величиной потока магнитного поля и не зависит от распределения поля по объему соленоида. Хотя нет ничего удивительного в том, что в волновой картине электроны «чувствуют» топологическую структуру пространства (кольцо, «вырезанное» магнитным полем), эффект достаточно интересен тем, что не имеет классического аналога.

2. Интерференционный эксперимент

Рассмотрим модификацию интерференционного эксперимента Бома—Ааронова с двумя когерентными пучками заряженных частиц. Вместо того чтобы использовать бесконечно длинный соленоид (см. [1]), представим себе, что один из пучков проходит через «дыру» тороидального соленоида, а другой направим вне этой дыры. Как известно, квазиклассическая волновая функция заряженной частицы, движущейся по траектории L в области, в которой вектор-потенциал отличен от нуля, приобретает дополнительный фазовый множитель

$$\exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\int_L \mathbf{A}\,d\mathbf{l}\right), \qquad (1)$$

---

[1]) Решение задачи рассеяния на малые углы см. [6].

где e — заряд частицы. Следовательно, при пропускании тока через замкнутый соленоид между двумя интерферирующими пучками возникает дополнительная разность фаз

$$\alpha = \frac{e\Phi}{\hbar c} \tag{2}$$

и интерференционная картина смещается, несмотря на то, что оба пучка распространяются в области пространства, в которой магнитное поле равно нулю (эффект Бома—Ааронова!). Заметим, что, если внутри соленоида магнитное поле велико и флуктуации магнитного потока $\Delta\Phi \gg \hbar c/e$, эффект Бома—Ааронова проявляется в том, что при пропускании тока через соленоид интерференционная картина полностью разрушается, а при выключении тока снова восстанавливается.

Как известно, магнитный поток, проходящий через сверхпроводящее кольцо, может принимать значения $\Phi = \pi\hbar cm/e_0$, где e_0 — заряд электрона, m — целые числа. В соответствии с этим для сверхпроводящего соленоида формула (1) дает разность фаз

$$\alpha = \pi Zm, \quad Z = \frac{e}{e_0}.$$

Таким образом, по отношению к пучку электронов (протонов) сверхпроводящий соленоид при нечетном числе квантов магнитного потока играет роль пластинки в $\lambda/2$.

3. Фраунгоферовская дифракция

Найдем амплитуду рассеяния заряженной частицы на тороидальном соленоиде, магнитное поле внутри которого перпендикулярно импульсу частицы ($\hbar\mathbf{k}\|\mathbf{n}$). Будем считать, что дебройлевская длина волны гораздо меньше размера соленоида, т. е. $\lambda = 1/k \ll a$; при этом поперечные размеры волнового пакета $R \gg a$. Ясно, что в этих условиях при любом соотношении между длиной волны λ и радиусом витков b основную роль играет рассеяние на малые углы. Поэтому для решения интересующей нас задачи можно применить эйкональный метод, который используется в теории дифракции Фраунгофера (см., например, [6, 7]).

Предположим, что ось z направлена вдоль импульса частицы, а центр симметрии тора совпадает с началом координат. Как известно, для вычисления амплитуды рассеяния в эйкональном приближении достаточно знать волновую функцию в пространственной области, в которой уже отсутствует взаимодействие, но еще не сказываются дифракционные эффекты. Соответствующее выражение, справедливое на расстояниях $z \ll ka^2$, имеет вид

$$\psi(z, \boldsymbol{\rho}) = e^{ikz} \exp\left[i\alpha(\boldsymbol{\rho})\right]. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}$ — двумерный вектор в плоскости (xy), $\hbar\alpha(\boldsymbol{\rho})$ — изменение функции действия при движении частицы по прямолинейной траектории, параллельной оси z.

Амплитуда рассеяния на малые углы θ определяется через функцию $\alpha(\boldsymbol{\rho})$ по известной формуле [6]

$$f(q) = \frac{k}{2\pi i} \iint \left[\exp\{i\alpha(\boldsymbol{\rho})\} - 1\right] \exp\{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}\}\, d^2\rho, \tag{4}$$

где $\hbar\mathbf{q}$ — изменение импульса частицы (при $\theta \ll 1$ вектор $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}$, и $|\mathbf{q}| \approx k\theta$).

В интересующем нас случае

$$\alpha(\rho) = \frac{e}{\hbar c}\int_{-\infty}^{\infty} A_z(\rho, z)\, dz. \tag{5}$$

Мы будем рассматривать тонкий соленоид. Если $b \ll a$, можно пренебречь вкладом области $a - b < |\rho| < a + b$ и тогда с учетом формулы (15) из [6] имеем

$$\alpha(\rho) = \begin{cases} 0, & |\rho| > a; \\ \dfrac{e\Phi}{\hbar c}, & |\rho| < a. \end{cases} \tag{6}$$

Подставляя эти значения в (13), находим

$$f(\mathbf{q}) = \frac{k}{2\pi i}\left(\exp\left\{i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right\} - 1\right)\iint_{\Sigma} \exp\{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}\}\, d^2\rho,$$

или

$$f(\theta) = -ik\left(\int_b^a J_0(k\theta\rho)\rho\, d\rho\right)\left[\exp\left\{i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right\} - 1\right] = \frac{2a}{\theta} J_1(ka\theta)\sin\frac{e\Phi}{2\hbar c}\exp\left(i\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right) \tag{7}$$

(J_0 и J_1 — функции Бесселя). Согласно оптической теореме, полное сечение дифракции

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(0) = 4\pi a^2 \sin^2\frac{e\Phi}{2\hbar c}. \tag{8}$$

Заметим, что выражение

$$f_{\text{диф}} = \frac{ik}{2\pi}\iint_{\Sigma} \exp\{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}\}\, d^2\rho \tag{9}$$

совпадает с амплитудой дифракции на черном экране. Следовательно,

$$f(\mathbf{q}) = \left(1 - \exp\left\{i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right\}\right) f_{\text{диф}}(\mathbf{q}). \tag{10}$$

Полное сечение дифракции равно

$$\sigma = 4S\sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right), \tag{11}$$

где S — площадь «дыры» соленоида Σ.

Если волновой вектор $\mathbf{k}$ составляет некоторый угол β с нормалью $\mathbf{n}$ к плоскости соленоида, то полное сечение рассеяния

$$\sigma = 4S\sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right)\cos\beta. \tag{12}$$

Мы видим, что характер дифракционной картины (положение максимумов и минимумов) зависит только от формы и ориентации соленоида, в то время как вероятность отклонения частицы от первоначального направления движения описывается множителем $\sin^2(e\Phi/2\hbar c)$. Легко видеть, что эффект остается и при сильных флуктуациях магнитного потока; в этом случае

$$\left\langle \sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}.$$

При рассеянии частиц с зарядом, равным заряду электрона, на сверхпроводящем соленоиде, магнитный поток которого содержит нечетное число квантов, эффективное сечение принимает максимальное из возможных значений ($\sin^2(e\Phi/2\hbar c) = 1$); если магнитный поток соленоида содержит четное число квантов, дифракция отсутствует.

4. Рассеяние на экранированном соленоиде

Следует подчеркнуть, что рассмотренное нами рассеяние заряженных частиц на замкнутом тонком соленоиде фактически не зависит от поведения волновой функции в узкой пространственной области, в которой сосредоточено магнитное поле. Вклад этой области имеет порядок величины $b/a \ll 1$, и при расчетах мы его не учитывали. В частности, если перед соленоидом поставить тонкое поглощающее кольцо, не пропускающее заряженные частицы, то дифракция на такой системе будет по-прежнему описываться формулами предыдущего раздела.

В этом случае непосредственно внутри соленоида волновая функция близка к нулю, и тем не менее магнитное поле влияет на рассеяние, т. е. мы снова сталкиваемся с проявлением эффекта Бома—Ааронова.

Предположим теперь, что отверстие тора-соленоида затянуто «черным» экраном Σ_1, имеющим отверстие Σ_2. Если ширина волнового пакета существенно превышает размеры экрана, сечение рассеяния будет зависеть от магнитного потока внутри соленоида. В частности, если ширина пучка больше размеров отверстия, а длина волны λ гораздо меньше этих размеров, амплитуда рассеяния имеет вид

$$f(\mathbf{q}) = f_{\Sigma_1}(\mathbf{q}_1) - f_{\Sigma_2}(\mathbf{q}_2)\exp\left(i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right), \tag{13}$$

где величины

$$f_{\Sigma_1(\Sigma_2)}(q) = i\frac{k}{2\pi}\iint\limits_{\Sigma_1(\Sigma_2)} \exp(-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho})\, d^2\boldsymbol{\rho}$$

совпадают с амплитудами дифракции на сплошных полностью поглощающих экранах, имеющих соответственно форму Σ_1 и Σ_2. Полное сечение упругого рассеяния легко получить с помощью оптической теоремы, если учесть, что сечение поглощения на кольцеобразном «черном» экране равно его площади $(S_1 - S_2)$. В результате находим

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(0) - (S_1 - S_2) = S_1 + S_2 - 2S_2\cos\frac{e\Phi}{\hbar c}. \tag{14}$$

Очевидно,

$$S_1 - S_2 \leqslant \sigma \leqslant S_1 + 3S_2,$$

т. е., меняя магнитный поток в соленоиде, мы можем в широких пределах изменять вероятность дифракции. При больших флуктуациях магнитного потока $\sigma = S_1 + S_2$. В частности, если экран представляет собой круговое кольцо, внешний и внутренний радиусы которого равны соответственно R и r, формула (13) дает ($\theta \ll 1$)

$$f(\theta) = \frac{iR}{\theta} J_1(kR\theta) - \frac{ir}{\theta} J_1(kr\theta)\exp\left\{i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right\}. \tag{15}$$

Следует подчеркнуть, что, если волновой пакет распространяется целиком внутри «дыры» соленоида или вне этой «дыры», частица «не чувствует» магнитного поля и рассмотренные выше дифракционные эффекты отсутствуют. Точно также,

коль скоро оба когерентных пучка заряженных частиц проходят либо внутри, либо вне «дыры» соленоида, магнитное поле не влияет на интерференцию этих пучков.

Для того чтобы магнитное поле сказывалось на поведении частиц, находящихся в области, свободной от поля, необходимо, чтобы, во-первых, пространственная область локализации волновых пакетов была двусвязной, и, во-вторых, магнитный поток через любое сечение «трубки», разрезающей данную область, был отличен от нуля. Этот вывод согласуется с общим анализом, проведенным в работе [5].

Таким образом, эффект Бома—Ааронова является чисто квантовым и не имеет аналога в классической физике.

5. Рассеяние на замкнутом соленоиде в борновском приближении

В заключение рассмотрим рассеяние заряженных частиц на тонком замкнутом соленоиде произвольной формы в рамках теории возмущений. В приближении, линейном по заряду, амплитуда рассеяния описывается формулой Борна с взаимодействием

$$\widehat{U} = -\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\mathbf{v} + i\frac{e\hbar c}{2mc}\,\operatorname{div}\mathbf{A}, \tag{16}$$

где $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$ — начальная скорость частицы, m — ее масса. Условие применимости борновского приближения к рассматриваемой задаче имеет вид

$$\frac{e\Phi}{\hbar c} \ll 1. \tag{17}$$

Для амплитуды находим

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{e\Phi}{\hbar c}\left[(\mathbf{k}\mathbf{n}) + \mathbf{k}'\mathbf{n}\right]\iint\limits_{\Sigma} \exp\left(-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}\right)dS. \tag{18}$$

Здесь $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}' = \mathbf{k}+\mathbf{q}$ — волновые векторы частицы до и после рассеяния, $\mathbf{n}$ — нормаль к плоскости соленоида, Σ — участок этой плоскости, ограниченный магнитными силовыми линиями.

Согласно (18), амплитуда рассеяния на 180° строго равна нулю. Если $k \gg 1/l$, где l — длина соленоида, рассеяние происходит в основном на малые углы; при этом $\mathbf{k}' \approx \mathbf{k}$, и выражение (18) представляет собой предельный случай эйкональной формулы.

При $k \ll 1/l$

$$f = \frac{1}{4\pi}\,\frac{e\Phi}{\hbar c}\,[\mathbf{k}\mathbf{n} + \mathbf{k}'\mathbf{n}]S. \tag{19}$$

В частности, если $\mathbf{k}\|\mathbf{n}$, то

$$f(\theta) = \frac{1}{4\pi}\,kS\frac{e\Phi}{\hbar c}\,(1+\cos\theta), \tag{20}$$

а полное сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{1}{3\pi}\,k^2S^2\left(\frac{e\Phi}{\hbar c}\right)^2. \tag{21}$$

Если соленоид имеет форму тонкого тора с радиусом «дыры» a, борновская амплитуда принимает вид

$$f(\mathbf{q}) = a\frac{e\Phi}{\hbar c}\,J_1\left(a[\mathbf{q}^2 - (\mathbf{q}\mathbf{n})^2]^{1/2}\right)\frac{1}{[\mathbf{q}^2 - (\mathbf{q}\mathbf{n})^2]^{1/2}}\,\frac{\mathbf{k}\mathbf{n} + \mathbf{k}'\mathbf{n}}{2}. \tag{22}$$

В случае $\mathbf{k} \parallel \mathbf{n}$

$$f(\theta) = \frac{ka}{2}\,\frac{e\Phi}{\hbar c}\,J_1(k|\sin\theta|a)\,\frac{1}{ka|\sin\theta|}\,(1+\cos\theta). \qquad (23)$$

Авторы выражают благодарность Б. Н. Валуеву, В. И. Огиевецкому, М. И. Подгорецкому и М. И. Широкову за обсуждение и ценные замечания.

Литература

1. *Aharonov Y., Bohm D.* Phys. Rev, **115**, 485, 1959; **123**, 1511, 1961; **130**, 1525, 1963.
2. *Фейнберг Е. Л.* УФН, **78**, 53, 1962.
3. *Erlichson H.* Amer. J. Phys., **38**, 162, 1970.
4. *Peshkin M., Talmi I., Tassie J. L.* Ann. of Phys., **12**, 426, 1961.
5. *Вайнштейн А. И., Соколов В. В.* ЯФ, **22**, 618, 1975.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Наука, 1974. § 131. С. 617.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. § 61.

Коэффициенты Клебша—Гордана, d-функция $SU(2)$ и их симметрия

Я. А. Смородинский

1. Введение

Теории коэффициентов Клебша—Гордана (ККГ) и d-функции Вигнера посвящено много обзоров и таблиц [1]. Существуют, однако, вопросы, которые не нашли простого изложения. В этой работе будет рассмотрен один из таких вопросов — сходство между свойствами ККГ и d-функции. На эту связь впервые было указано в книге [3]. Она обсуждалась также в [4, 5].

В данной статье получено преобразование, связывающее d-функцию и ККГ. Ядро преобразования обладает симметрией Редже. Очень простой смысл преобразования: переход между неподвижной и подвижной системами координат и связь симметрии между этими системами и симметрией Редже, оправдывает публикацию этой работы.

2. Преобразование

Будем исходить из известной формулы для d-функций

$$d^{J_1}_{M_1M_1'}(\beta)\, d^{J_2}_{M_2M_2'}(\beta) = \sum_{J'} \langle J', M \,|\, J_1, M_1, J_2, M_2 \rangle d^{J'}_{MM'}(\beta) \langle J', M' \,|\, J_1, M_1', J_2, M_2' \rangle, \quad (2.1)$$

где суммирование распространяется на все значения J_1, возникающие при сложении векторов J_1 и J_2. Умножая правую и левую части на $\langle J, M \,|J_1, M_1, J_2, M_2\rangle$ и суммируя по M_1 и M_2 при $M_1 + M_2 = M$ (т. е. по $M_1 - M_2$), получаем

$$\sum_{M_1 - M_2} \langle J, M \,|\, J_1, M_1, J_2, M_2 \rangle d^{J_1}_{M_1M_1'}(\beta)\, d^{J_2}_{M_2M_2'}(\beta) = d^{J}_{MM'}(\beta) \langle J, M' \,|\, J_1, M_1', J_2, M_2' \rangle. \quad (2.2)$$

Отсюда следует весьма общая формула для d-функций:

$$d^{J}_{MM'}(\beta) = \sum_{M_1 - M_2} \frac{\langle J, M \,|\, J_1, M_1, J_2, M_2 \rangle}{\langle J, M' \,|\, J_1, M_1', J_2, M_2' \rangle}\, d^{J_1}_{M_1M_1'}(\beta)\, d^{J_2}_{M_2M_2'}(\beta). \quad (2.3)$$

Если придавать d-функциям в правой части различные значения, то получим всевозможные выражения для d-функции в левой части.

Положим

$$M_1' = J_1, \quad M_2' = -J_2. \quad (2.4)$$

Поскольку

$$d^{J}_{M,\pm J}(\beta) = \left(\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!}\right)^{1/2} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{J \pm M} \left(\pm\sin\frac{\beta}{2}\right)^{J \mp M} \quad (2.5)$$

---

[1] См. таблицы [1] и обзор [2], где дана библиография.

и

$$\langle J, J_1 - J_2 | J_1, J_1, J_2, -J_2 \rangle = \left[\frac{(2J+1)(2J_1)!(2J_2)!}{(J_1+J_2+J+1)!(J_1+J_2-J)!} \right]^{1/2}, \tag{2.6}$$

то из (2.3) получаем

$$d^J_{MM'}(\beta) = \left[\frac{(J_1+J_2+J+1)!(J_1+J_2-J)!}{2J+1} \right]^{1/2} \sum_{M_1-M_2} (-1)^{J_2+M_2} \langle J, M | J_1, M_1, J_2, M_2 \rangle \times$$
$$\times \frac{[\cos(\beta/2)]^{J_1+J_2+M_1-M_2} [\sin(\beta/2)]^{J_1+J_2-M_1+M_2}}{[(J_1+M_1)!(J_1-M_1)!(J_2+M_2)!(J_2-M_2)!]^{1/2}}. \tag{2.7}$$

Такая формула была приведена в [1], с. 68. Вывод ее, данный выше, кажется самым естественным.

Формулу (2.7) можно записать в виде преобразования от ККГ к d-функции:

$$d^J_{MM'}(\beta) = \frac{2}{2J+1} \sum_{M_1-M_2} \langle J, M | J_1, M_1, J_2, M_2 \rangle s_{M_1-M_2}(\beta), \tag{2.8}$$

$$s_{M_1-M_2}(\beta) = (-1)^{J_2+M_2} \left[\frac{1}{2}\left(J + \frac{1}{2}\right)(J_1+J_2+J+1)! \right]^{1/2} \times$$
$$\times \frac{[\cos(\beta/2)]^{J_1+J_2+M_1-M_2} [\sin(\beta/2)]^{J_1+J_2-M_1+M_2}}{[(J_1+M_1)!(J_1-M_1)!(J_2+M_2)!(J_2-M_2)!]^{1/2}}. \tag{2.9}$$

К формуле (2.8) можно написать ей обратную. Для этого используем теорему «о трех d-функицях»:

$$\int d^J_{-M-M'}(\beta)\, d^{J_1}_{M_1M'_1}(\beta)\, d^{J_2}_{M_2M'_2}(\beta)\, d\cos\beta =$$
$$= \frac{2}{2J+1} \langle J, M | J_1, M_1, J_2, M_2 \rangle \langle J, M' | J_1, M'_1, J_2, M'_2 \rangle \tag{2.10}$$

и подставим частные значения (2.4). В результате получим

$$\langle J, M | J_1 M_1 J_2 M_2 \rangle = \frac{2J+1}{2} \left[\frac{(J_1+J_2+J+1)!(J_1+J_2-J)!}{2J+1} \right]^{1/2} \times$$
$$\times \int d^J_{-M-M'}(\beta) \frac{[\cos(\beta/2)]^{J_1+J_2+M_1-M_2} [\sin(\beta/2)]^{J_1+J_2-M_1+M_2}}{[(J_1+M_1)!(J_1-M_1)!(J_2+M_2)!(J_2-M_2)!]^{1/2}} d\cos\beta. \tag{2.11}$$

В правую часть входит то же ядро (2.9).

Все операции выглядят крайне просто в символическом виде. Если обозначить ККГ через C, то теорему о «трех функциях» можно записать в виде

$$d \otimes d \otimes d = C \otimes C. \tag{2.12}$$

Тогда (2.8) символически записывается как

$$d = C \otimes C \otimes d^{-1} \otimes d^{-1}, \tag{2.13}$$

а (2.12) как

$$C = C^{-1} \otimes d \otimes d \otimes d. \tag{2.14}$$

«Правила умножения» легко устанавливаются.

Полученные формулы демонстрируют связь между d-функциями и ККГ; каждая из них является S-образом другой.

3. Симметрия Редже

Ядро $S(\beta)$ обладает симметрией, известной под именем симметрии Редже. Напомним, что симметрия ККГ проще всего формулируется в терминах таблицы:

$$\left\| \begin{matrix} -J+J_1+J_2 & J-J_1+J_2 & J+J_1-J_2 \\ J+M & J_1+M_1 & J_2+M_2 \\ J-M & J_1-M_1 & J_2-M_2 \end{matrix} \right\|. \tag{3.1}$$

ККГ инвариантны относительно замены эквивалентной перестановки двух строк, двух столбцов или транспонирования этой таблицы. Перестановки столбцов второй и третьей строки приводят к «тривиальным» симметриям, связанным с перестановками трех сторон треугольника, образованного векторами $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ и $\mathbf{J}_3$.

Нас интересует «нетривиальная» операция транспонирования — отражение в главной диагонали. Она не имеет простого геометрического аналога, и отвечающая ей симметрия доказывается с помощью специального выбора представления ККГ в виде суммы (как это сделано, например, в [5]).

Как было указано в [2], все свойства симметрии ККГ следуют из свойств функции Уиппла[2]. Однако простого доказательства в литературе, по-видимому, нет.

Заметим еще, что вторая «нетривиальная» симметрия, отвечающая перестановке первой и второй или третьей строк, сводится к транспонированию и перестановкам.

В нашем представлении симметрия Редже следует сразу из симметрии ядра $S(\beta)$ относительно транспонирования. Действительно транспонирование сводится к замене $M_1+M_2 \rightleftarrows J_1-J_2$, $J_1-M_1 \rightleftarrows J_2+M_2$, и сохранению J_1+J_2, M_1-M_2 и J. Отсюда сразу следует, что при транспонировании ядро S лишь умножается на

$$(-1)^{-J_2-M_2+J_1-M_1} = (-1)^{M'-M}. \tag{3.2}$$

Но это как раз множитель, появляющийся при перестановке индексов M и M' в левой части (2.8). Таким образом, «нетривиальная» симметрия ККГ отражает «тривиальную» симметрию d-функции относительно перестановки двух ее нижних индексов (перестановки двух осей квантования). Такая связь для формул в классическом пределе была указана в упоминавшейся работе Бинцера [4]. Таким образом, «нетривиальная» симметрия отражает действительно связь d-функций и ККГ.

Возникает вопрос: какая симметрия d-функции отвечает тривиальной симметрии ККГ, например симметрии относительно перестановки

$$(J_1, M_1) \rightleftarrows (J_2, M_2). \tag{3.3}$$

Простой взгляд на формулу (2.9) дает ответ. Эта симметрия сводится к симметрии

$$d^J_{MM'}(\pi-\beta) = (-1)^{J-M} d^J_{M\dot{M}'}(\beta). \tag{3.4}$$

Не столь просто обстоит дело с симметрией относительно перестановки

$$(J, M) \rightleftarrows (J_1, M_1). \tag{3.5}$$

Для этой операции нет никакого соотношения. Эта симметрия потеряна при специальном виде выбора d-функций в (2.3). Таким образом, у d-функции в отличие от ККГ «нетривиальной» симметрии нет.

---

[2] Использованию функций Уиппла в связи с ККГ посвящена недавняя работа Рейнала [9].

4. Формула конечных разностей

Формулы $\mathcal{S}$-преобразования позволяют в более явной форме продемонстрировать связь между представлением ККГ в терминах конечных разностей и выражением d-функции в форме производной.

Еще в книге [3] было указано на любопытную аналогию между ККГ и d-функцией. Воспользуемся выражением для ККГ, приведенным в книге [4], с. 195. Из этого выражения после простых преобразований получим

$$\left(\frac{J_1+J_2+J+1}{2J+1}\right)^{1/2}\langle J,M\,|\,J_1,M_1,J_2,M_2\rangle =$$

$$= (-1)^{J_1-J+M_2}\left[\frac{(J+M)!}{(J-M)!}\,\frac{1}{(J+M')!(J-M')!}\right]^{1/2}\left[\frac{1}{(J_1+J_2)^{(2J)}}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left[(J_1-M_1)^{(M'-M)}(J_1+M_1)^{-(M'+M)}\right]^{1/2}\Delta_{M'}^{J-M}\left[(J_1-M_1)^{(J+M')}(J_1-M_1)^{(J-M')}\right]. \quad (4.1)$$

Эту формулу надо сравнить с соответствующим выражением для d-функции из [1], с. 69[3]:

$$(-1)^{J-M'}d^J_{MM'}(\beta) = \frac{(J+M)!}{(J-M)!}\left[\frac{1}{(J+M')!(J-M')!}\right]^{1/2}\frac{1}{2^J}(1-\cos\beta)^{(M'-M)/2}\times$$

$$\times(1+\cos\beta)^{-(M'+M)/2}\frac{d^{J-M}}{d(\cos\beta)^{J-M}}\left[(1+\cos\beta)^{J+M'}(1-\cos\beta)^{J-M'}\right]. \quad (4.2)$$

В (4.1) входят квазистепени

$$z^{(n)} = \frac{z!}{(z-n)!} \quad (4.3)$$

и конечные разности

$$\Delta^J_M f(M) = \sum_{n=0}^{J}\frac{J!}{n!(J-n)!}\,f(M+n). \quad (4.4)$$

Аналогия между двумя формулами, (4.1) и (4.2), достигается при значении

$$\cos\beta = \frac{M_1}{J_1}.$$

Смысл этих формул становится более понятным, если мы их подставим в формулы преобразования (2.8). Мы увидим, что $\mathcal{S}$-преобразование превращает конечные разности в производные, что можно проверить прямыми, но громоздкими вычислениями. Мы не будем здесь заниматься этой стороной задачи более подробно.

5. Физический смысл преобразования

Аналогия между d-функцией и ККГ имеет простую интерпретацию.

В формуле (2.3) функции $d^{J_1}_{M_1J_1}(\beta)$, $d^{J_2}_{M_2-J_2}(\beta)$ надо рассматривать как два квантовых орта. Действительно, в квантовой системе (внутренним образом) направление в пространстве можно задать только с помощью собственного состояния векторов

[3] Формулы (4.1) и (4.2) переходят друг в друга при $J_1, J_2 \gg J$, сравни [4].

углового момента $\mathbf{J}_1$ или $\mathbf{J}_2$, отвечающего наибольшему возможному значению проекции на подвижную ось. (Это и означает, что вектор выбран за подвижную ось.) Во второй d-функции эту проекцию надо взять со знаком минус, так как $J_1 - J_2 < J$, а $J_1 + J_2 > J$, что недопустимо.

Таким образом, произведение двух d-функций определяет подвижную систему координат, максимально приближающуюся по физическому смыслу к такой системе в теории волчка.

Функция $d^J_{M\,J_1-J}(\beta)$, не зависящая от проекций M_1 и M_2, описывает состояния в неподвижной системе координат (проекция M). Если принять такую интерпретацию, то ККГ приобретает смысл амплитуды преобразования волновой функции между двумя системами координат: подвижной и неподвижной. Симметрия Редже отражает симметрию между этими двумя системами координат. Такая симметрия явно видна у d-функции и скрыта в ККГ. К этому можно добавить, что саму d-функцию можно рассматривать как амплитуду преобразования между двумя неподвижными системами координат. В классическом пределе, когда различие между квантовым вектором и классическим исчезает, исчезает и различие между d-функциями и ККГ (ср. [5]).

Возникает еще вопрос о том, что является амплитудой преобразования между двумя подвижными системами координат. Такой коэффициент не должен вовсе зависеть от проекций j. Это есть не что иное, как коэффициент Рака или $6J$-символ

$$\begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J & J_{23} \end{Bmatrix}.$$

$6j$-символ описывает переход от плоскости квантовых векторов $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_{12}$ к плоскости векторов $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$, $\mathbf{J}_{23}$ при заданном полном моменте J. В классическом пределе он обращается в $(24\pi V)^{-1}$, где V — объем тетраэдра, ребра которого суть векторы, входящие в $6j$-символ (или в нуль при $V < 0$, ср. [6], с. 423 и [1], с. 259). Можно еще показать, что из симметрии тетраэдра получаются все 72 симметрии Редже (включая нетривиальные).

Более высокие $3nj$-символы связаны с пространствами с большим числом измерений. Так, $9j$-символ есть ККГ группы $O(4)$ и ему можно дать физическую интерпретацию. Но это уже выходит за рамки нашей работы. Отметим только, что при рассмотрении группы $O(n)$ при $n > 3$ возникает такая же иерархия функций: d-функция, ККГ, $6j$-символ, как и в $SU(2)$, только при «нефизических» значениях моментов [8].

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Н. Москалеву, Я. Реваи и В. Д. Эфросу за очень полезные обсуждения.

Литература

1. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
2. *Смородинский Я. А., Шелепин Л. А.* УФН, **106**, 3, 1972.
3. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро Я. З.* Представления группы вращения и группы Лоренца. М., 1958.
4. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и представления групп. М.: Наука, 1965.
5. *Bincer A. M.* J. Math. Phys., **11**, 1835, 1970.
6. *Вигнер Е.* Теория групп. М., 1961.
7. *Кильдюшов Л. С.* ЯФ, **15**, 197, 1972.
8. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Письма в ЖЭТФ, **25**, 500, 1977.
9. *Raynal J.* J. Math. Phys., **19**, 467, 1978.

Коэффициенты Вейля в методе деревьев (задача n тел)

Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский

В недавней работе Вонг [1] обратил внимание на значение коэффициентов Вейля для вычисления матриц ортогональных групп. Цель этой заметки — указать на связь коэффициентов Вейля с коэффициентами преобразований координат в методе деревьев [2–4]. Формулы метода деревьев позволяют вычислить коэффициенты Вейля для группы $SO(n)$, связав их с $3nj$-коэффициентами теории угловых моментов (точнее, с аналитическим продолжением $3nj$-коэффициентов).

Поворот в n-мерном пространстве может быть определен заданием $n(n-1)/2$ однопараметрических подгрупп, каждая из которых задает ортогональное преобразование только двух координат x_i, x_k $(i, k = 1, \ldots, n)$. Это последнее преобразование, в свою очередь, может быть представлено как двумерное преобразование и коэффициентов Вейля. Матрица, отвечающая повороту в плоскости (ik), отличается от единичной матрицы заменой элементов (единиц) (ii) и (kk) на $\cos\theta$, элемента (ik) на $\sin\theta$ и элемента (ki) на $-\sin\theta$.

Эти четыре элемента описывают поворот в координатной плоскости, проходящей через две оси — x_i и x_k:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i \cos\theta + x_k \sin\theta, \\ x_k' &= -x_i \sin\theta + x_k \cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Преобразованием системы координат (перестановкой осей) можно сделать поворот (1) поворотом в плоскости «соседних» координат $(k-1, k)$, т. е. координат, отвечающих соседним строкам и столбцам матрицы преобразований. Более того, за эти соседние координаты могут быть выбраны крайние координаты $(n-1, n)$. Тогда задача редуцируется от группы $SO(n)$ к $SO(n-1)$. Такие преобразования были рассмотрены в работах авторов [2–4] методом деревьев. В этих работах было показано, что преобразование сводится к произведению элементарных преобразований — «пересадок», каждой из которых отвечает T-коэффициент. T-коэффициент оказывается равным $6j$- (или $3j$-) символу, вернее, их аналитическому продолжению в область нефизических значений моментов ($j_1 + j_2 < j$ и j кратно четвертьцелому числу).

Так как $6j$- и $3j$-символы определяются как гипергеометрические функции соответственно ${}_4F_3$ и ${}_3F_2$ от аргумента, равного единице, то их можно считать значениями функций от $\operatorname{tg}^2(\theta/2)$ при $\theta = \pi/2$ [1]. Полное преобразование, описываемое в общем случае суммой произведений $6j$- и $3j$-символов, или, что то же самое, каким-то $6j$-символом, и есть коэффициент Вейля, о котором шла речь в [1] [2].

---

[1] T-коэффициент, по существу, есть матричный элемент, отвечающий повороту (в n-мерном пространстве) на $\pi/2$.

[2] Связь с поворотами на $\pi/2$ делает понятным появление аргумента единица в гипергеометрических функциях, используемых в теории углового момента.

Итак, коэффициент Вейля W_{ik} определяется как

$$W_{ik} = T_{ik}\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad W_{ik}^{-1} = T_{ik}\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

В самом простом случае преобразование записывается так [1]:

$$T_{k-1,k}(\theta) = W_{k-2,k}^{-1} T_{k-2,k-1}(-\theta) W_{k-2,k} = W_{k-2,k-1}^{-1} W_{k-1,k}^{-1} T_{k-2,k-1}(\theta) W_{k-1,k} W_{k-2,k-1}. \tag{2}$$

Трехмерному пространству отвечает простейший T-коэффициент

$$\left\| \begin{matrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ j_{12} & j & j_{23} \end{matrix} \right\| = (-1)^{-(2j+1/2)} \exp\left[\frac{i\pi}{2}(2j_{12}+1)\right] d^{2j+1/2}_{2j_{23}+1,\,2j_{12}+1}\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{3}$$

По формуле (3) получаем известное выражение для функции Вингера $d^J_{m'm}(\theta)$ группы $SO(3)$

$$d^J_{m'm}(\theta) = \sum_{m''} (i)^{m'-m} d^J_{m''m}\left(\frac{\pi}{2}\right) d^J_{m''m'}\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-im''\theta}. \tag{4}$$

На языке деревьев это означает переход

3 2 1 $\qquad$ 3 2 1

$$= \sum_{21} T^{(32)1}_{3(21)}$$

(от вращения в плоскости 21 к вращению в плоскости 32). Для группы $SO(4)$ можно записать выражения для вейлевских коэффициентов в виде суммы произведений двух либо четырех коэффициентов Клебша—Гордана. Из работ [2, 3] видно, что подобная структура возникает и для коэффициентов Вейля группы $SO(n)$, которые записываются в виде суммы произведений (см. [2]) $3j$-символов. Принимая во внимание работу [4], можно провести частичное суммирование и записать коэффициент Вейля в виде суммы произведений $6j$- и $3j$-символов или через $3nj$-коэффициенты (их аналитическое продолжение в область теоретических значений моментов).

Литература

1. *Wong M. K. F.* J. Math. Phys., **19**, 703, 1078.
2. *Kuznetsov G. I.* Int. J. Theor. Phys., **16**, 345, 1977.
3. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Письма в ЖЭТФ, **22**, 378, 1975; Препринт ИАЭ-2659, 1976; ЯФ, **25**, 447, 1977.
4. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **21**, 1135, 1975.

Универсальная производящая функции для ККГ

Я. А. Смородинский

Построена простая экспоненциальная функция, которая разлагается в ряд, коэффициентами которого служат ККГ. Разложение обнаруживает в явной форме все симметрии ККГ. Коэффициенты Клебша—Гордона (ККГ) обычно рассматриваются как коэффициенты сложения в группе $O(3)$, в представлении заданными угловыми моментами J, J_1, J_2. На самом деле ККГ имеет симметрию более высокую, связанную с группой перестановок трех моментов или с группой $O(3)$ в трехмерном пространстве, координаты которого задают номера частиц. С этой группой связана нетривиальная симметрия КГГ, матричные элементы этой группы определяют рекурентные формулы для КГГ.

В рамках такой симметрии угловые моменты перестают быть заданными числами, и формулы обычной теории ККГ могут быть просуммированы по значениям моментов.

Хорошим примером такого рода может служить производящая формула для КГГ, в которой явно видны все симметрии этих коэффициентов.

Формула представляет собой разложение экспоненты по неприводимым представлениям группы симметрии, которую можно рассматривать как простейший аналог разложения плоской волны по шаровым функциям.

Коэффициенты Клебша—Гордона для всех моментов и их проекций определяются производящей функцией

$$\exp(uv + \overline{xy}) = \exp(1 + xy)(uv) =$$
$$= \sum (-1)^{J_1+J_2-J} \left[\frac{(J_1+J_2+J+1)!}{(2J+1)(J_1+J_2-J)!} \right]^{1/2} \langle JM | J_1M_1J_2M_2 \rangle U^{J_1}_{M_1} V^{J_2}_{M_2} X^J_M Y^{-J}_{J_1-J_2}. \qquad (1)$$

Сумма берется по всем J и M, совместимым с ККГ. В этой формуле x, y, u, v — двухкомпонентные спиноры со скалярным произведением

$$xy = x^1y^2 - x^2y^1 = x^1y_1 + x^2y_2. \qquad (2)$$

Прописными буквами обозначены мономы

$$A^J_M = \frac{(a_1)^{J-M}(a_2)^{J+M}}{[(J+M)!(J-M)!]^{1/2}} \qquad (3)$$

и аналогично для контравариантного монома.

Заметим, что

$$A^{JM} = (-1)^{J+M} A^J_{-M} \qquad (4)$$

и скалярное произведение двух мономов определяется формулами

$$X^J Y^J = \sum_M X^{JM} Y_{JM}. \qquad (5)$$

Компоненты спиноров с чертой суть спиноры

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= v_1 x^1 + v_2 x^2, \\ \bar{x}^2 &= u_1 x^1 + u_2 x^2, \end{aligned} \tag{6}$$

при этом

$$(\bar{x}\bar{y}) = (xy)(vu). \tag{7}$$

Вывод формулы (1) основан на известном разложении [1]

$$\frac{(u_1v_2 - u_2v_1)^{J_1+J_2-J}}{(J_1+J_2-J)!} \frac{(v_1x^1 + v_2x^2)^{J-\mu}(u_1x^1+u_2x^2)^{J+\mu}}{[(J-\mu)!(J+\mu)!]} =$$

$$= \left[\frac{(J+J_1+J_2+1)!}{(J+J_2-J)!(2J+1)}\right]^{1/2} \sum_{M_1M_2} \langle JM | J_1M_1J_2M_2\rangle U^{J_1}_{M_1} V^{J_2}_{M_2} \bar{X}^{JM} \tag{8}$$

$$(\mu = J_1 - J_2, \quad M_1 + M_2).$$

Для получения формулы (1) заметим, что второй множитель слева есть моном

$$\bar{X}^{J\mu} = \frac{(\bar{x}^1)^{J-\mu}(\bar{x}^2)^{J+\mu}}{[(J-\mu)!(J+\mu)!]^{1/2}}. \tag{9}$$

Умножая (8) справа на моном $\bar{Y}^J_\mu$ и суммируя по μ и $J_1 + J_2 - J$, придем к экспоненте [1)].

Из формулы (1) можно получить все свойства симметрии ККГ, так как $M_1 + M_2$ и $J_1 - J_2$ входят в эту формулу как индексы проекций двух моментов. Из этой же формулы получается простое соотношение для d-функции. Для того чтобы его получить, выберем следующие значения для компонент спиноров u, v:

$$u = \begin{pmatrix} \sin\dfrac{\beta}{2} \\ \cos\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\beta}{2} \\ -\sin\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \quad uv = -1.$$

Подставляя в (1) получим для правой части:

$$\sum (-1)^{J-J_1+M_2} \left[\frac{(J_1+J_2+J+1)!}{(J_1+J_2-J)!(2J+1)}\right]^{1/2} \langle JM | J_1M_1J_2M_2\rangle \times$$

$$\times \frac{(\cos(\beta/2))^{J_1+J_2+M_1-M_2}(\sin(\beta/2))^{J_1+J_2-M_1+M_2}}{[(J_1-M_1)!(J_1+M_1)!(J_2-M_2)!(J_2+M_2)!]^{1/2}}. \tag{11}$$

Сравнивая с формулой для d-функции [2, 3], получим вместо (11) выражение:

$$\sum \frac{(-1)^{J_1+J_2-J}}{(J_1+J_2-J)!} d^J_{M, J_1-J_2}(\beta)\, X^{JM}\, \bar{Y}^J_{J_1-J_2}. \tag{12}$$

По параметру $J_1 + J_2 - J$ можно просуммировать; в результате получим множитель $\exp(-1) = \exp(uv)$, который сократится с соответствующим множителем в правой части (1). Мы приходим к формуле:

$$\exp(xy) = \sum d^J_{M, J_1-J_2}(\beta)\, \bar{X}^{JM}\, \bar{Y}^J_{J_1-J_2} \tag{13}$$

---

1) Этот моном связан с представлением второй группы с квантовыми числами J и $J_1 - J_2$. Именно здесь разность угловых моментов появляется в роли проекции.

или

$$\exp(xy) = \sum (-1)^{J+M} d^J_{MM'}(\beta)\, X^J_{-M}\, \overline{Y}^J_M. \qquad (14)$$

Литература

1. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и представления групп. М.—Л., 1965. С. 147.
2. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Теория угловых моментов. Л., 1973.
3. *Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **75**, 797, 1978.

Oscillator Wigner functions

G. S. Pogosyan*, Ya. A. Smorodinsky, V. M. Ter-Antonyan*

1. Introduction

By oscillator Wigner functions (OWF) we will understand the matrix elements of the operator of finite rotations over Cartesian wavefunctions of the isotropic oscillator.

Such objects are interesting in that they determine the transformation law of the Cartesian wavefunctions of the isotropoic oscillator in a rotating coordinate system. Further, we shall deal just with this aspect of OWF, although they may turn out to be useful in particular problems. Thus, in studying the vibrational transitions in multiatomic molecules, in some cases the OWF coincide with the overlap integrals defining the intensity of vibrational bands (Doktorov et al 1976).

The paper is organised as follows. First the two-dimensional OWF are introduced. Then, OWF of arbitrary dimensionality are constructed in this basis and a diagrammatic technique is developed, which allows us to define the explicit dependence of these functions on Euler angles.

2. Two Dimensions

For the transition from one coordinate system $S(x,y)$ to another $S(x',y')$ rotated by an angle α, the Cartesian wavefunctions of a circular oscillator are transformed by the orthogonal matrix [1)]

$$|j+m',j-m';\, x',y'\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \langle j+m,j-m;\, x,y\,|\,j+m',j-m';\, x',y'\rangle |j+m,j-m;\, x,y\rangle. \tag{1}$$

Let us expand coefficients of this transformation over the polar wavefunctions with the same energy. Since $E^{\mathrm{Car}} = 2j+1$, $E^{\mathrm{pol}} = 2p+|M|+1$, where p is a non-negative integer, and M the azimuthal quantum number, then $p = j - |M|/2$ at equal energies, so that $-2j \leqslant M \leqslant 2j$ and hence

$$\langle j+m,j-m;\, x,y\,|\,j+m',j-m';\, x',y'\rangle =$$
$$= \sum_{k=-j}^{j} \langle j+m,j-m;\, x,y\,|\,j-|k|,2k;\, r,\varphi\rangle e^{2ik\alpha} \langle j-|k|,2k;\, r,\varphi'\,|\,j+m',j-m';\, x',y'\rangle.$$

In this formula the coefficients of transition from Cartesian to polar wavefunctions have been calculated by Pogosyan and Ter-Antonyan (1979) and are as follows:

$$\langle j+m,j-m;\, x,y\,|\,j-|k|,2k;\, r,\varphi\rangle = (-i)^{j-m}(-1)^{j-|k|} d^{j}_{k,m}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

* Permanent address: Yerevan State University, Yerevan, USSR.

1) We choose the system of units: $\hbar = m = \omega = 1$; angles φ and φ' in systems S and S' are related by $\varphi' = \varphi + \alpha$.

the Wigner d-functions with their phases being defined according to Edmonds (1957). Using this result and the addition theorem for d-functions, we obtain the transformation law

$$|j+m', j-m';\ x', y'\rangle = \sum_{m=-j}^{j} d^j_{m',m}(2\alpha)|j+m, j-m;\ x, y\rangle. \tag{2}$$

It is easy to verify that at $m' = -j$ and $\alpha = -\pi/4$ we arrive at the known addition theorem for Hermite polynomials. For $\alpha = \pi/4$ formula (2) has been derived by Pogosyan and Ter-Antonyan (1979). Note also that formula (2) results in the integral representation of d-functions via the normalised Hermite function

$$d^j_{m,'m}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \overline{H}_{j+m}(x)\, \overline{H}_{j-m}(y)\, \overline{H}_{j+m'} \times \\ \times \left(x\cos\frac{\varphi}{2} - y\sin\frac{\varphi}{2}\right) \overline{H}_{j-m}\left(-x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

The explicit form of transformation (2) can be established without passing to the polar wavefunctions, but by considering relation (1) at large x and y and substituting the Hermite polynomials by the corresponding highest powers of arguments.

3. Three and Four Dimensions

The Wigner oscillator functions for $n \geqslant 3$ can be calculated, as above, passing first to the spherical basis and then making a two-dimensional rotation. However, even at $n = 3$ the transition coefficients are rather cumbersome (Pogosyan and Ter-Antonyan 1978) and can no longer be summed by the known addition theorems for d-functions and Clebsch—Gordon coefficients. Therefore, we perform here all calculations directly in terms of Cartesian wavefunctions.

The form of an n-dimensional finite-rotation operator is naturally defined by the number of angles used for transition from one point on the sphere to another. In the Cartesian basis the most simple rotations are in separate coordinate planes, as each of such rotations transforms a pair of one-dimensional oscillator functions by the law (2).

An arbitrary n-dimensional rotation is known to be equivalent to a sequence of such 'elementary' rotations at $n(n-1)/2$ Euler angles, chosen in a definite manner.

In the three-dimensional case the finite rotation operator is expressed in terms of the Euler angles θ_1^2, θ_2^2, θ_1^2:

$$\widehat{G}(3) = \widehat{G}_{21}(\theta_1^2)\, \widehat{G}_{32}(\theta_2^2)\, \widehat{G}_{21}(\theta_1^1). \tag{3}$$

Indices of the operators $\widehat{G}_{j+1,i}$ label the coordinate plane in which a rotation occurs, and the rotation is taken to be positive from the $(j+1)$ axis to the j axis. Since the wavefunctions in the systems $S(x, y, z)$ and $S'(x', y', z')$ are related to the same energy, the non-zero matrix elements are $\langle j+m, j-m, n-2j|\widehat{G}(3)|j+m', j'-m', n-2j'\rangle$. Expressing by (3) the operator $\widehat{G}(3)$ in terms of operators $\widehat{G}_{j+1,j}$ and separating the rotation in the plane (x, y) by the angle θ_1^1, we obtain

$$\langle j+m, j-m, n-2j|\widehat{G}(3)|j'+m', j'-m', n-2j'\rangle = \\ = \sum_{j''=0}^{n/2} \sum_{m''=-j''}^{j''} \langle j+m, j-m, n-2j|\widehat{G}_{21}(\theta_1^2)\, \widehat{G}_{32}(\theta_2^2)\,|j''+m'', j''-m'', n-2j''\rangle \times \\ \times \langle j''+m'', j''-m'', n-2j''|\widehat{G}_{21}(\theta_1^1)\,|j'+m', j'-m', n-2j'\rangle.$$

The rotation $\widehat{G}_{21}(\theta_1^1)$ does not affect the coordinate z; therefore the latter matrix element differs from zero only at $j''=j'$ and thus there is no longer summation over j''. The coefficient containing the product of two rotation operators is simplified to a linear combination of products of matrix elements of the operators $\widehat{G}_{21}(\theta_1^2)$ and $\widehat{G}_{32}(\theta_2^2)$, and with analogous selection rules we have

$$\langle j+m,j-m,n-2j|\widehat{G}(3)|j'+m',j'-m',n-2j'\rangle=$$
$$=\sum_{m''=-j'}^{j'}\sum_{\widetilde{m}=-j}^{j}\langle j+m,j-m|\widehat{G}_{21}(\theta_1^2)|j+\widetilde{m},j-\widetilde{m}\rangle\langle j-\widetilde{m},n-2j|\widehat{G}_{32}(\theta_2^2)|j'-m'',n-2j'\rangle\times$$
$$\times\langle j'+m'',j'-m''|\widehat{G}_{21}(\theta_1^1)|j'+m',j'-m'\rangle\delta_{j+\widetilde{m},j'+m''}.$$

Then, changing summation over m'' and $\widetilde{m}$ to summation over $t=j'+m''$ and $k=j+\widetilde{m}$ and using the relation (resulting from (2))

$$\langle j+m,j-m;\ x_k,x_{k+1}|j'+m',j'-m';\ x_k',x_{k+1}'\rangle=$$
$$=\langle j+m,j-m|\widehat{G}_{k+1,k}(\alpha)|j+m',j-m'\rangle=d^j_{m',m}(2\alpha),\qquad(4)$$

we arrive at the explicit expression for the three-dimensional oscillator Wigner function

$$\langle j+m,j-m,n-2j|\widehat{G}(3)|j'+m',j'-m',n-2j'\rangle=$$
$$=\sum_{t=0}^{2\min(j,j')}d^j_{t-j,m}(2\theta_1^2)\,d^{(n-t)/2}_{2j'-(n+t)/2,2j-(n+t)/2}(2\theta_1^2)\,d^{j'}_{m',t-j'}(2\theta_1^1).\qquad(5)$$

The limits of summation over t may be not written explicitly if t is assumed to run only over those values at which the absolute value of lower t-independent indices of d-functions does not exceed that of upper indices.

As is clear from (3), at $\theta_2^2=0$ there is a pure rotation in the plane (x,y) by an angle $\theta_1^1+\theta_1^2$, and at $\theta_1^1=\theta_1^2=0$ the same rotation in the plane (z,y) by an angle θ_2^2, so in these cases expression (4) should turn into the d-function with arguments $2(\theta_1^1+\theta_1^2)$ and $2\theta_1^2$, respectively. The validity of this transition is easily verified with the use of $d^j_{m,m'}(0)=\delta_{mm'}$ and the addition theorem.

The four-dimensional rotation is given by six Euler angles and the operator $\widehat{G}(4)$ is expressed through the operators of rotation in coordinate planes by the formula (Vilenkin 1968)

$$\widehat{G}(4)=\widehat{G}_{21}(\theta_1^3)\,\widehat{G}_{32}(\theta_2^3)\,\widehat{G}_{43}(\theta_3^3)\,\widehat{G}_{21}(\theta_1^2)\,\widehat{G}_{32}(\theta_2^2)\,\widehat{G}_{21}(\theta_1^1).\qquad(6)$$

The Wigner oscillator function is calculated analogously:

$$\langle j+m,j-m,k-2j,n-k|\widehat{G}(4)|j'+m',j'-m',k'-2j',n-k'\rangle=$$
$$=\sum_{\mu,\sigma,\lambda}d^{j'}_{m',\sigma-j'}(2\theta_1^1)\,d^{\mu}_{\sigma-\mu,\lambda-\mu}(2\theta_1^2)\,d^{(k'-\sigma)/2}_{2j'-(k'+\sigma)/2,2j-(k'+\sigma)/2}(2\theta_2^2)\times$$
$$\times d^j_{\lambda-j,m}(2\theta_1^3)\,d^{(k-\lambda)/2}_{2\mu-(k+\lambda)/2,2j-(k+\lambda)/2}(2\theta_2^3)\,d^{n/2-\mu}_{k'-\mu-n/2,k-\mu-n/2}(2\theta_1^3).\qquad(7)$$

As for the limits of t-summation, see the comment after formula (5). At $\theta_1^3=\theta_2^3=\theta_3^3=0$ the rotation (6) becomes three-dimensional and formula (7) reduces to (5).

4. n Dimensions

Consider now the n-dimensional case. The operator of finite n-dimensional rotations $\widehat{G}(n)$ can be represented by the following product of rotation operators in the coordinate planes (Vilenkin 1968):

$$\widehat{G}(n) = \widehat{G}^{(n-1)}(\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}) \dots \widehat{G}^{(1)}(\theta_1^1), \tag{8}$$

$$\widehat{G}^{(k)}(\theta_1^k, \dots, \theta_k^k) = \widehat{G}_{21}(\theta_1^k) \dots \widehat{G}_{k+1}, k(\theta_k^k). \tag{9}$$

From formula (8) it follows that the n-dimensional oscillator Wigner function can be expressed in terms of the matrix elements of operators (9) as follows:

$$\langle N_1, \dots, N_n | \widehat{G}(n) | N_1', \dots, N_1', \dots, N_n' \rangle =$$

$$= \sum_{p_1^{(n-1)} \dots p_{(n-1)}^{(n-1)}} \dots \sum_{p_1^{(2)} p_2^{(2)}} \langle N_1, \dots, N_n | \widehat{G}^{(n-1)} | p_1^{(n-1)} \dots p_{n-1}^{(n-1)}, N_n' \rangle \times$$

$$\times \langle p_1^{(n-1)}, \dots, p_{n-1}^{(n-1)} | \widehat{G}^{(n-2)} | p_1^{(n-2)}, \dots, p_{n-2}^{(n-2)}, N_{n-1}' \rangle \times \dots \times \langle p_1^{(2)}, p_2^{(2)} | \widehat{G}^{(1)} | N_1', N_2' \rangle \tag{10}$$

with $p_1^{(i)} + p_i^{(i)} = N_1' + \dots N_i'$.

In the notation

$$p_1^{(1)} = N_1'; \quad p_i^{(n)} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

expression (10) can be rewritten in a more compact form:

$$\langle N_1, \dots, N_n | \widehat{G}(n) | N_1', \dots, N_n' \rangle =$$

$$= \sum_{p_1^{(i)}, \dots, p_i^{(i)}} \prod_{j=1}^{n-1} \langle p_1^{(j+1)}, \dots, p_{j+1}^{(j+1)} | \widehat{G}^{(j)}(\theta_1^j, \dots, \theta_j^j) | p_1^{(j)}, \dots, p_j^{(j)}, N_{j+1}' \rangle. \tag{11}$$

With the help of (9), we single out the rightmost factor of the product of the operators of rotation in coordinate planes and make use of the expression (resulting from (2))

$$\widehat{G}_{j+1,j}(\theta_j^j) | p_j^{(j)}, N_{j+1}' \rangle \sum_m \left\langle \frac{p_j^{(j)} + N_{j+1}'}{2} + m, \frac{p_j^{(j)} + N_{j+1}'}{2} - m | \widehat{G}_{j+1,j}(\theta_j^j) | p_j^{(j)}, N_{j+1}' \right\rangle \times$$

$$\times \left| \frac{p_j^{(j)} + N_{j+1}'}{2} - m, \frac{p_j^{(j)} + N_{j+1}'}{2} + m \right\rangle$$

where summation over m is in the limits $2|m| \leqslant p_j^{(j)} + N_{j+1}'$. Carrying the state vector $\langle p_{j+1}^{(j+1)}|$ out of the product of the first $(j-1)$ operators of rotation in the coordinate planes, and using the condition of orthonormalisation of one-dimensional oscillator wavefunctions, we arrive at the relation

$$\langle p_1^{(j+1)}, \dots, p_{j+1}^{(j+1)} | \prod_{l=1}^{j} \widehat{G}_{l+1,l}(\theta_l^j) | p_1^{(j)}, \dots, p_j^{(j)}, N_{j+1}' \rangle =$$

$$= \langle p_j^{(j)} + N_{j+1}' - p_{j+1}^{(j+1)}, p_{j+1}^{(j+1)} | \widehat{G}_{j+1,j}(\theta_j^j) | p_j^{(j)}, N_{j+1}' \rangle \times$$

$$\times \left\langle p_1^{(j+1)}, \dots, p_j^{(j+1)} \left| \prod_{l=1}^{j-1} \widehat{G}_{l+1,l}(\theta_l^j) \right| p_1^{(j)}, \dots p_{j-1}^{(j)}, p_j^{(j)} + N_{j+1}' - p_{j+1}^{(j+1)} \right\rangle.$$

Further decreasing the number of multipliers in the product of rotation operators, after $(j-1)$ steps we find

$$\left\langle p_1^{(j+1)},\dots,p_{j+1}^{(j+1)}\left|\prod_{l=1}^{j}\widehat{G}_{l+1,l}(\theta_l^j)\right|p_1^{(j)},\dots,p_j^{(j)},N'_{j+1}\right\rangle =$$

$$=\prod_{k=1}^{j}\left\langle J_{jk}+\mathcal{M}_{jk},J_{jk}-\mathcal{M}_{jk}\middle|\widehat{G}_{j-k+2}(\theta_{j-k+1}^j)\middle|J_{jk}+\mathcal{M}'_{jk},J_{jk}-\mathcal{M}'_{jk}\right\rangle. \qquad (12)$$

The quantities J_{jk}, $\mathcal{M}_{jk}$ and $\mathcal{M}'_{jk}$ are defined in the following manner:

$$2J_{jk}=N'_{j+1}+\sum_{\nu=j-k+1}^{j}p_\nu^{(j)}-\sum_{\nu=j-k+2}^{j+1}p_\nu^{(j+1)}+p_{j-k+2}^{(j+1)},$$

$$2\mathcal{M}_{jk}=N'_{j+1}+\sum_{\nu=j-k+1}^{j}p_\nu^{(j)}-\sum_{\nu=j-k+2}^{j+1}p_\nu^{(j+1)}-p_{j-k+2}^{(j+1)},$$

$$2\mathcal{M}_{jk}=\sum_{\nu=1}^{j-k+1}p_\nu^{(j)}-\sum_{\nu=2}^{j-k+2}p_\nu^{(j+1)}+p_{j-k+1}^{(j)}.$$

Now with formula (4) we arrive at the final result

$$\langle N_1,\dots,N_4|\widehat{G}(n)|N'_1,\dots,N'_n\rangle=\sum_{p_1^{(i)},\dots,p_i^{(i)}}\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{j}d^{J_{jk}}_{\mathcal{M}_{jk},\mathcal{M}'_{jk}}(2\theta_{j-k+1}^j). \qquad (13)$$

As can be verified, formula (13) at $n=2,3$ and 4 reduces to (4), (5) and (7), respectively.

5. Graphs

The results obtained can be made much more transparent through the following analogy. The operator $\widehat{G}(n)$ relates states $|N_1,\dots,N_n;X_1,\dots,X_n\rangle$ and $|N'_1,\dots,N'_n;X_1,\dots,X_n\rangle$; therefore, the matrix element $\langle N_1,\dots,N_n|\widehat{G}(n)|N'_1,\dots,N'_n\rangle$ can be interpreted as the «amplitude of transition of a system» from state N' to state N, and this amplitude can be associated with the diagram

$$\langle N_1,\dots,N_n|\widehat{G}(n)|N'_1,\dots,N'_n\rangle =$$

In such an interpretation the expression (10) of the matrix element of the operator $\widehat{G}(n)$ over the matrix elements of the operators $\widehat{G}^{(j)}$ is graphically represented by a sequence of «transitions»

(14)

Summation is implied over broken lines; intermediate blocks with one full line correspond to the matrix elements of operators $\widehat{G}^{(j)}$:

$$\langle p_1^{(j+1)},\dots,p_{j+1}^{(j+1)}|\widehat{G}(\theta_1^j,\dots,\theta_j^j)|p_1^{(j)},\dots,p_j^{(j)},N'_{j+1}\rangle = \tag{15}$$

$$= p^{(j)} \quad N'_{j+1} \quad p^{(j+1)}.$$

According to the condition preceding formula (11), at $j = 1$ and $j = n$ these blocks become, respectively, the first and the last blocks of expansion (14). Each block obeys the conservation law

$$p_1^{(j+1)} + \dots + p_{j+1}^{(j+1)} = p_1^j + \dots + p_j^j + N'_{j+1}.$$

The graphical expansion (14) and expression (12) allow the transition amplitude $\langle N|\widehat{G}(n)|N'\rangle$ to be represented by the amplitudes of elementary transitions of two lines into two lines (see figure 1).

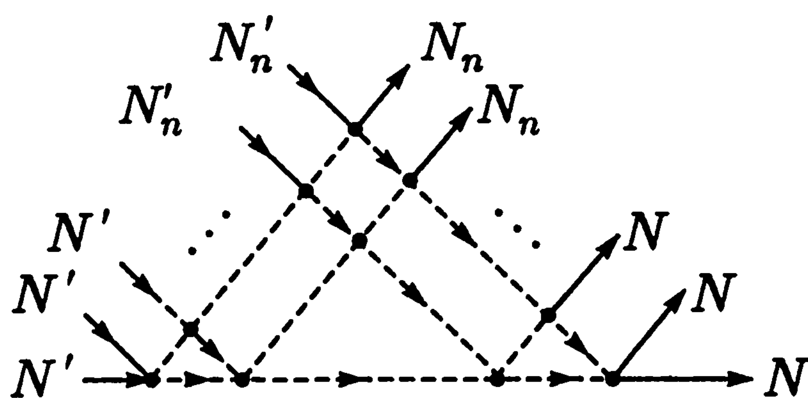


Fig. 1. Diagram representing the n-dimensional oscillator Wigner function by d-functions dependent on angles of rotations in the coordinate planes

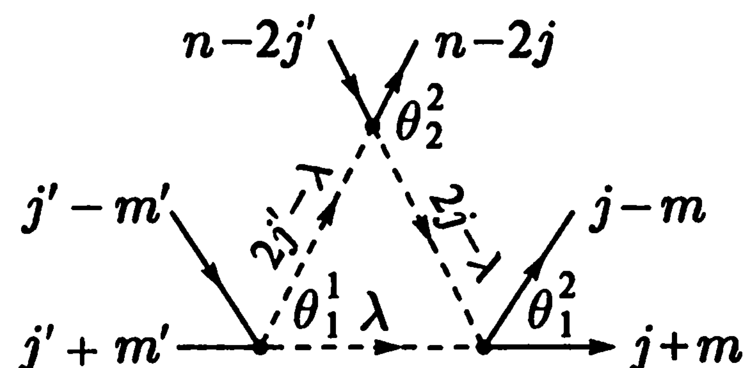


Fig. 2. Diagram for the three-dimensional oscillator Wigner function

In this diagram the number of intersections (elementary blocks) equals $n(n-1)/2$; this means that rotation in the coordinate plane by a certain Euler angle is associated with each of such blocks. The number of summations in formula (13) equals $(n-1)\ (n-2)/2$ and coincides with the number of elementary loops in the diagram of figure 2.

According to formula (4), to each intersection there corresponds the amplitude of the elementary «transition»

$$B' \quad B \quad A' \quad A \quad \theta \quad = \langle A, B|\widehat{G}(\theta)|A', B'\rangle = d^{(A+B)/2}_{(A'-B')/2,\,(A-B)/2}(2\theta). \tag{16}$$

The operator $\widehat{G}(\theta)$ in (16) should be supplied with indices of the coordinate axes defining the plane in which the rotation occurs. We have omitted these indices since they are unambiguously defined by the very diagram of figure 1.

The procedure of calculation is as follows. For each n we draw the corresponding diagram, mark the Euler angles, and place the indices for all lines. The number of non-fixed indices should be equal to the number of elementary loops of the diagram. Further, with

each intersection we associate the d-function of the angle «attached» to this intersection. Indices of the d-function obey the rule (16) and the summation is carried out over non-fixed indices, over those values for which the d-function is meaningful. The latter condition has been discussed earlier in connection with formula (5).

Let us exemplify this procedure for $n = 3, 4$. Choosing the indices of wavefunctions as in § 3, we arrive at the diagrams drawn in figures 2 and 3.

The formulated rules for those diagrams give rise to the formulae (5) and (7). Thus the diagrammatic method reduces the problem of calculating the Wigner oscillator function to simple geometrical constructions.

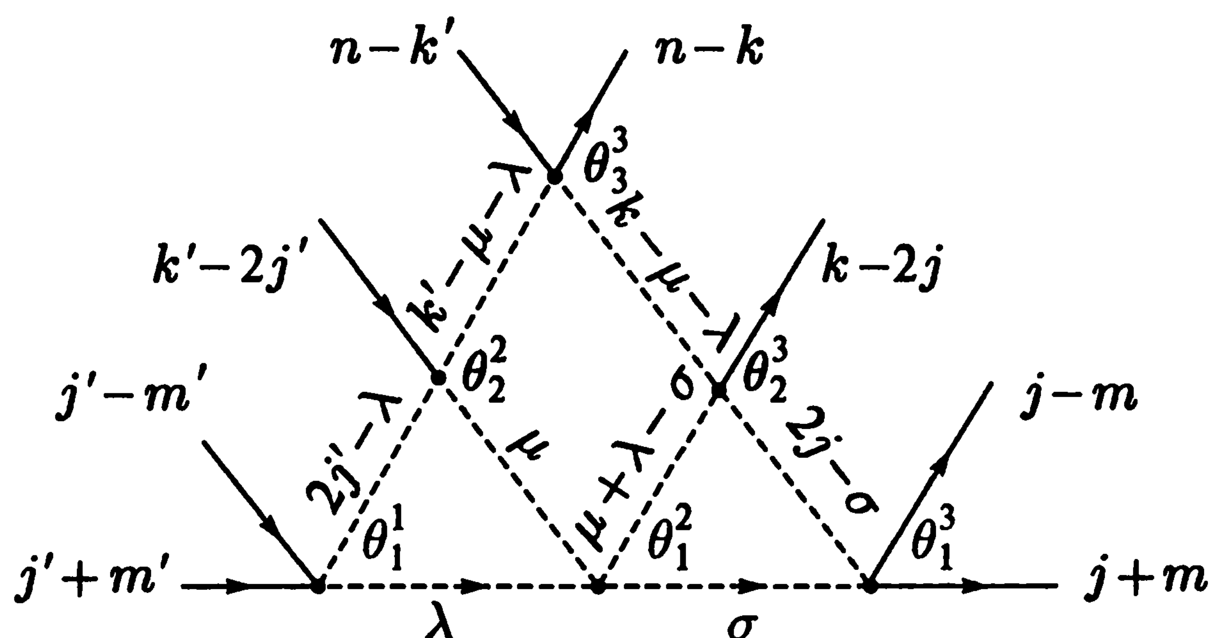


Fig. 3. Diagram for the four-dimensional oscillator Wigner function

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are sincerely grateful to Dr. A. Sissakian for interest in the work and useful discussions.

References

1. Doktorov E. V., Malkin I. A., Man'ko V. I. *J. Phys. B. At. Mol. Phys.*, **9**, 507, 1976.
2. Edmonds A. R. *Angular Momentum Quantum Mechanics.* New Jersey, Princeton, 1957.
3. Pogosyan G., Ter-Antonyan V. JINR Preprint P2–11962, Dubna, 1978; Teor. Mat. Fiz., **10**, № 1, USSR, 1979.
4. Vilenkin N. Ja. Special Functions and the Theory of Group Representations. *Mathematical Monographs*, **22**, Transl. V. N. Singh. Providence, RI American Mathematical Society, 1968.

Коэффициенты Клебша—Гордана группы $SU(2)$ и полиномы Хана

Я. А. Смородинский, С. К. Суслов

Введение

Теория коэффициентов Клебша—Гордана (ККГ) излагается во многих обзорах и монографиях (см., например, [1–4]). В литературе отмечены разные, порой неожиданные, связи ККГ с другими разделами алгебры, геометрией, исчислением конечных разностей, однако эти связи не использовались достаточно эффективно в теории ККГ и наоборот.

Между тем теория ККГ может быть приведена к стандартному виду теории ортогональных полиномов по образцу, например, теории полиномов Якоби, с которыми ККГ имеют много общего [2]. Отличие ККГ от классических ортогональных полиномов состоит в том, что весовая функция сосредоточена в дискретных точках (представляется как сумма δ-функций). Теория таких полиномов (ортогональные полиномы дискретного переменного) существует в литературе и в современном виде изложена в монографии [5].

Оказывается, что коэффициенты Клебша—Гордана с точностью до нормировки и веса совпадают с полиномами Хана, практически не известными физикам. Наиболее простым образом связь ККГ и полиномов Хана устанавливается при изучении группы $SO(4)$, представления которой реализуются при сложении двух угловых моментов [1, 3, 6]. В настоящей работе задача сложения моментов сформулирована как задача на собственные значения генератора «буста» $SO(4)$. ККГ получены классическим методом линейной алгебры — определением собственных векторов и собственных значений эрмитовского оператора, действующего в конечномерном пространстве представления. Возникающие из теории представлений $SO(4)$ рекуррентные соотношения ККГ после отделения веса переходят в рекуррентное соотношение и конечно-разностное уравнение для полиномов Хана. Полиномы Хана, а следовательно и ККГ, можно найти, используя конечно-разностный аналог формулы Родрига [5, 7], впервые полученной для ККГ в [2].

Установленная связь ККГ с полиномами Хана дает возможность рассмотреть на языке полиномов Хана вопрос об аналитическом продолжении ККГ и, в частности, дает интерпретацию дополнительных корней, которые существуют у ККГ и не находят простой интерпретации в квантовой теории углового момента.

1. Неприводимые представления группы $SO(4)$ и ККГ

Как известно, задача о сложении моментов квантовой механики, или задача о разложении тензорного произведения представлений группы вращений трехмерного вещественного пространства на неприводимые компоненты тесно связана

с теорией представлений группы $SO(4)$ [1, 6]. Шесть генераторов алгебры Ли $SO(4)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [J_i, J_k] &= ie_{ikl}J_l, \\ [J_i, K_k] &= ie_{ikl}K_l, \\ [K_i, K_k] &= ie_{ikl}J_l. \end{aligned} \tag{1}$$

Преобразование генераторов

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{K}), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - \mathbf{K})$$

разлагает алгебру Ли $SO(4)$ в прямую сумму двух подалгебр, изоморфных $so(3)$

$$\begin{aligned} [A_i, A_k] &= ie_{ikl}A_l, \\ [B_i, B_k] &= ie_{ikl}B_l, \\ [A_i, B_k] &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В связи с этим возможны две редукции $so(4)$ на подалгебру $so(3)$:

$$so(4)_{JK} \supset so(3)_J \supset so(2)_{J_3}, \tag{3}$$

$$\cap so(3)_A \supset so(2)_{A_3}$$

$$so(4)_{AB} \tag{4}$$

$$\cup so(3)_B \supset so(2)_{B_3}.$$

Рис. 1. Неприводимые представления группы $SO(4)$ для канонической редукции $SO(4) \supset SO(3) \supset SO(2)$

Неприводимые представления группы $SO(4)$ определяются фиксированными, одновременно целыми или полуцелыми компонентами старшего веса (q, m') [2, 6, 8]. Редукции (3) соответствует базис неприводимого для подалгебры $so(3)_J$ представления $\Phi^{jq}_{mm'}$, для которого веса неприводимых представлений подалгебр $so(3)_J$ и $so(2)_{J_3}$, принимают значения, соответствующие задаче сложения моментов квантовой механики (рис. 1):

$$|m'| \leqslant j \leqslant q, \quad -j \leqslant m \leqslant j.$$

Из коммутационных соотношений (1) следует, что для определения действия любого генератора $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ в пространстве представления $\Phi^{jq}_{mm'}$ достаточно задать действие операторов $J_\pm = J_1 \pm iJ_2, J_3, K_3$:

$$J_\pm \Phi^{jq}_{mm'} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,\Phi^{jq}_{m\pm1,m'},$$

$$J_3 \Phi^{jq}_{mm'} = m\Phi^{jq}_{mm'},$$

$$\begin{aligned} K_3\Phi^{jq}_{mm'} &= \sqrt{(j+m)(j-m)(j+m')(j-m')}\sqrt{\frac{(q-j+1)(q+j+1)}{(2j-1)j^2(2j+1)}}\,\Phi^{j-1,q}_{mm'} + \\ &+ \frac{mm'(q+1)}{j(j+1)}\,\Phi^{jq}_{mm'} + \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)(j+m'+1)(j-m'+1)}\,\times \\ &\times \sqrt{\frac{(q-j)(q+j+2)}{(2j+1)(j+1)^2(2j+3)}}\,\Phi^{j+1,q}_{mm'}. \end{aligned} \tag{5}$$

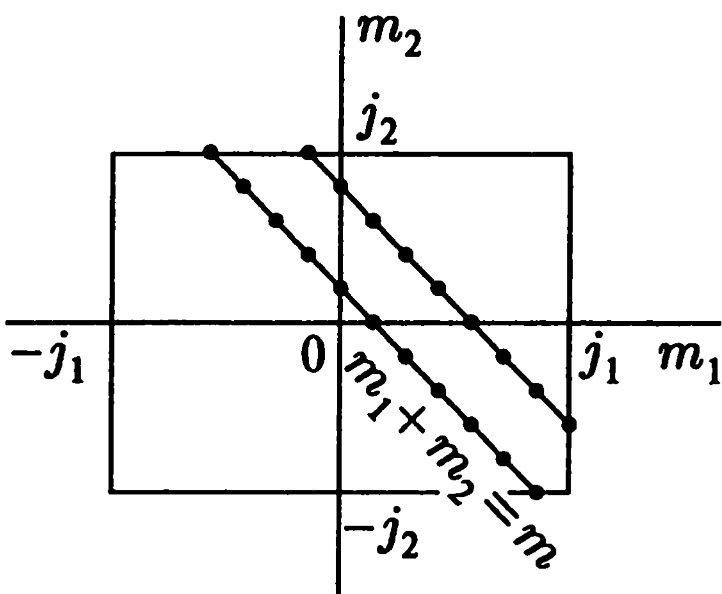


Рис. 2. Неприводимые представления группы $SO(4)$ для редукции $SO(4) \simeq SO(3) \otimes SO(3)$

Редукции (4) соответствует базис $\Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2}$ представления алгебры $so(4)$, неприводимого для подалгебр $so(3)_A$ и $so(3)_B$, определенного целыми или полуцелыми весами j_1 и j_2 (рис. 2). Действие генераторов **A**, **B** в пространстве представления определено действием операторов $A_\pm = A_1 \pm iA_2$, $B_\pm = B_1 \pm iB_2$:

$$\begin{gathered} A_\pm \Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2} = \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)}\,\Phi^{j_1 j_2}_{m_1 \pm 1, m_2}, \\ A_3 \Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2} = m_1 \Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2}, \\ B_\pm \Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2} = \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)}\,\Phi^{j_1 j_2}_{m_1, m_2 \pm 1}, \\ B_3 \Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2} = m_2 \Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Так как

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{A} - \mathbf{B},$$

то связь базисов двух эквивалентных представлений группы $SO(4)$ осуществляют коэффициенты Клебша—Гордана $SU(2)$ (ККГ)

$$\Phi^{jq}_{mm'} = \sum_{m_1+m_2=m} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2}, \tag{7}$$

где

$$q = j_1 + j_2, \quad m' = j_1 - j_2, \quad m = m_1 + m_2.$$

Обратное соотношение

$$\Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2} = \sum_{j=|m'|}^{q} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \Phi^{jq}_{mm'} \tag{8}$$

строит базис собственных векторов эрмитовского оператора $K_3 = A_3 - B_3$, соответствующих собственным значениям $\lambda = m_1 - m_2$:

$$K_3 \Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2} = (m_1 - m_2) \Phi^{j_1 j_2}_{m_1 m_2} \tag{9}$$

и приводит матрицу этого оператора в конечномерном пространстве представления к диагональному виду. Таким образом, коэффициенты Клебша—Гордана можно найти классическим методом линейной алгебры — определением собственных векторов и собственных значений эрмитовского оператора, действующего в конечномерном пространстве представления [9].

Преобразования (7) и (8) для фиксированного m связывают друг с другом

$$n = \begin{cases} q - |m'| + 1 = 2j_{\min} + 1, & |m| \leqslant |m'| \\ q - |m| + 1, & |m'| \leqslant |m| \leqslant q \end{cases}$$

базисных векторов пространства неприводимых представлений группы $SO(4)$, спектр которых принадлежит прямой $m_1 + m_2 = m$ (рис. 1, 2). Обозначим матричные элементы эрмитовского оператора K_3 и ККГ:

$$\begin{gathered} \alpha_k = \left(\Phi^{q-k,q}_{mm'} | K_3 | \Phi^{q-k+1,q}_{mm'}\right), \\ \beta_k = \left(\Phi^{q-k+1,q}_{mm'} | K_3 | \Phi^{q-k+1,q}_{mm'}\right), \\ c_k = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | q - k + 1, m \rangle, \quad k = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{10}$$

Тогда собственные векторы и собственные значения K_3 определяются нетривиальными решениями однородной системы линейных уравнений для ККГ:

$$\begin{gathered}(\beta_1 - \lambda)c_1 + \alpha_1 c_2 = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{k-1}c_{k-1} + (\beta_k - \lambda)c_k + \alpha_k c_{k+1} = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{n-1}c_{n-1} + (\beta_n - \lambda)c_n = 0.\end{gathered} \qquad (11)$$

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения. Для рассматриваемой задачи спектр генератора «буста» группы $SO(4)$ определен соотношением (9), для фиксированного m имеем ровно n невырожденных собственных значений. Характеристическое уравнение оператора K_3 в любом базисе имеет вид

$$\Delta_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n) = 0. \qquad (12)$$

Подставив в (11) собственное значение $\lambda_i = m_1 - m_2$, получим однородную систему линейных уравнений с нулевым детерминантом, имеющую, следовательно, нетривиальное решение, определяющее собственный вектор (8). Для произвольного решения системы, соответствующего данному собственному значению, все неизвестные ККГ можно выразить через c_1 или c_n. Для $k = 1, \dots, n-1$ верхних уравнений

$$N_k c_{k+1} = P_k(\lambda_i)c_1, \qquad (13)$$

где N_k — произведение недиагональных матричных элементов K_3:

$$N_0 = 1, \quad N_k = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k = \prod_{i=1}^{k}\alpha_i, \qquad (14)$$

$P_k(\lambda_i)$ — полином степени k от собственного значения, удовлетворяющий рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned}&P_0(\lambda) = 1,\\ &P_1(\lambda) = \lambda - \beta_1,\\ &P_k(\lambda) = (\lambda - \beta_k)P_{k-1}(\lambda) - \alpha_{k-1}^2 P_{k-2}(\lambda).\end{aligned} \qquad (15)$$

Аналогично для $k = 1, \dots, n-1$ нижних уравнений

$$\widetilde{N}_k c_{n-k} = \widetilde{P}_k(\lambda_i)c_n, \qquad (16)$$

$$\widetilde{N}_0 = 1, \quad \widetilde{N}_k = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\dots\alpha_{n-k} = \prod_{i=1}^{k}\alpha_{n-i}, \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{P}_0(\lambda) = 1,\\ &\widetilde{P}_1(\lambda) = \lambda - \beta_n,\\ &\widetilde{P}_k(\lambda) = (\lambda - \beta_{n-k+1})\widetilde{P}_{k-1}(\lambda) - \alpha_{n-k+1}^2\widetilde{P}_{k-2}(\lambda).\end{aligned} \qquad (18)$$

Отметим некоторые свойства введенных полиномов. Образуем две последовательности матриц, состоящих из $k = 1, \dots, n$ первых и k последних строк и столбцов

матриц оператора K_3 в недиагональном базисе, тогда полиномы P_k и $\widetilde{P}_k$ пропорциональны характеристическим многочленам этих матриц:

$$P_k(\lambda)=(-1)^k\Delta_k(\lambda)=(-1)^k\begin{vmatrix} \beta_1-\lambda & \alpha_1 & & & 0\\ \alpha_1 & \beta_2-\lambda & \alpha_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \alpha_{k-2} & \beta_{k-1}-\lambda & \alpha_{k-1}\\ & & & \alpha_{k-1} & \beta_k-\lambda \\ 0 & & & & \end{vmatrix}, \tag{19}$$

$$\widetilde{P}_k(\lambda)=(-1)^k\widetilde{\Delta}_k(\lambda)=(-1)^k\begin{vmatrix} \beta_{n-k+1}-\lambda & \alpha_{n-k+1} & & & 0\\ \alpha_{n-k+1} & \beta_{n-k+2}-\lambda & \alpha_{n-k+2} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1}-\lambda & \alpha_{n-1}\\ 0 & & & \alpha_{n-1} & \beta_n-\lambda \end{vmatrix}, \tag{20}$$

в частности

$$P_n(\lambda)=\widetilde{P}_n(\lambda)=(-1)^n\Delta_n(\lambda).$$

Корни каждого из полиномов $P_k(\lambda)$ и $\widetilde{P}_k(\lambda)$ вещественны как собственные значения эрмитовских матриц. Рекуррентные соотношения (15), (18) приводят к взаимному разделению нулей двух соседних полиномов [10, 11]. Каждый полином P_k и $\widetilde{P}_k$ имеет k различных вещественных корней, при этом между любыми двумя соседними корнями полинома $P_k(\widetilde{P}_k)$ находится один и только один корень полинома $P_{k-1}(\widetilde{P}_{k-1})$. Так как все корни полинома $P_n=\widetilde{P}_n$ известны как собственные значения K_3, то указанные свойства дают возможность последовательно локализовать и приближенно вычислить все k корней полиномов P_k и $\widetilde{P}_k$.

Произвольное решение однородной системы линейных уравнений, определяющей собственные векторы и собственные значения оператора K_3, имеет вид (13) или (16) для $\lambda_i=m_1-m_2$. Пространство решений системы одномерно, что дает ККГ однозначно с точностью до нормировки. Обе формы решения определяют один и тот же ККГ, поэтому на собственном значении полиномы P_k и $\widetilde{P}_k$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} P_{n-1}(\lambda_i)\widetilde{P}_{n-k-1}(\lambda_i)&=\widetilde{N}^2_{n-k-1}P_k(\lambda_i),\\ \widetilde{P}_{n-1}(\lambda_i)P_k(\lambda_i)&=N_k^2\widetilde{P}_{n-k-1}(\lambda_i), \end{aligned}\qquad k=0,\ldots,n-1, \tag{21}$$

в частности

$$P_{n-1}(\lambda_i)\widetilde{P}_{n-1}(\lambda_i)=\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_{n-1}^2.$$

Для ортонормированного базиса собственных векторов

$$\sum_{s=1}^{n}c_s^2=1,$$

поэтому

$$c_1^2=\left[\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{P_s(\lambda_i)}{N_s}\right)^2\right]^{-1}.$$

Фазовый множитель выберем условием $c_1>0$, тогда в силу отмеченных выше свойств нулей полиномов P_n и P_{n-1}

$$c_n=c_1\frac{P_{n-1}(\lambda_i)}{N_{n-1}}$$

меняет знак между любыми двумя соседними принадлежащими прямой $m_1+m_2=m$ точками спектра оператора K_3. С учетом нормировки и выбора фазового множителя для коэффициентов Клебша—Гордана получим

$$c_{k+1}=\left[\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{P_s(\lambda_i)}{N_s}\right)^2\right]^{-1/2}\frac{P_k(\lambda_i)}{N_k},$$
$$c_{n-k}=\left[\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\widetilde{P}_s(\lambda_i)}{\widetilde{N}_s}\right)^2\right]^{-1/2}\frac{P_{n-1}(\lambda_i)\widetilde{P}_k(\lambda_i)}{N_{n-1}\widetilde{N}_k}. \tag{22}$$

2. Коэффициенты Клебша—Гордана $SU(2)$ и полиномы Хана

Изучим введенные выше полиномы $P_k(\widetilde{P}_k)$ подробнее. Соотношение унитарности ККГ

$$\sum_{m_1+m_2=m}\langle j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\rangle\langle j_1m_1j_2m_2\,|\,j'm\rangle=\delta_{jj'}$$

приводит к системе полиномов, ортогональных на конечном множестве точек (ортогональные полиномы дискретного переменного)

$$\sum_{\lambda_i}P_k(\lambda_i)P_{k'}(\lambda_i)\rho(\lambda_i)=N_k^2\delta_{kk'} \tag{23}$$

с весом

$$\rho(\lambda_i)=c_1^2(\lambda_i)=\langle j_1m_1j_2m_2\,|\,qm\rangle^2. \tag{24}$$

Определим уравнения, которым удовлетворяют полиномы $P_k(\widetilde{P}_k)$. Действуя операторами K_3 и J^2 на базисы неприводимого представления группы $SO(4)$, соответствующие редукциям (3) и (4), придем к рекуррентным соотношениям для ККГ [3, 12]

$$\sqrt{(j+m)(j-m)(j+m')(j-m')}\sqrt{\frac{(q-j+1)(q+j+1)}{(2j-1)j^2(2j+1)}}\langle j_1m_1j_2m_2\,|\,j-1,m\rangle+$$
$$+\frac{mm'(q+1)}{j(j+1)}\langle j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\rangle+\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)(j+m'+1)(j-m'+1)}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(q-j)(q+j+2)}{(2j+1)(j+1)^2(2j+3)}}\langle j_1m_1j_2m_2\,|\,j+1,m\rangle=(m_1-m_2)\langle j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\rangle, \tag{25}$$

$$\sqrt{(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)(j_2-m_2)(j_2+m_2+1)}\langle j_1,m_1-1,j_2,m_2+1\,|\,jm\rangle+$$
$$+\sqrt{(j_1+m_1)(j_1+m_1+1)(j_2+m_2)(j_2-m_2+1)}\langle j_1,m_1+1,j_2,m_2-1\,|\,jm\rangle=$$
$$=\left[j(j+1)-j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)-2m_1m_2\right]\langle j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\rangle. \tag{26}$$

Последнее рекуррентное соотношение при $j=q=j_1+j_2$ имеет решение

$$\langle j_1m_1j_2m_2\,|\,qm\rangle=\sqrt{\frac{(q+m)!(q-m)!(q+m')!(q-m')!}{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(2q)!}}, \tag{27}$$

которое нормировано с учетом выбора фазы и определяет вес полинома P_k в точках ортогональности. Для произвольных точек прямой $m_1 + m_2 = m$ вес полиномов P_k имеет вид

$$\rho(x) = \frac{(q+m)!(q-m)!(q+m')!(q-m')!}{\Gamma(j_1+m_1+1)\Gamma(j_1-m_1+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_2-m_2+1)(2q)!},$$
$$m_1 = \frac{m}{2} + x, \quad m_2 = \frac{m}{2} - x, \quad \lambda = m_1 - m_2 = 2x. \tag{28}$$

Согласно (14) норма полиномов P_k равна

$$N_k = 2^k(2j)!\left[\frac{(q+m)!(q-m)!(q+m')!(q-m')!}{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}\right]^{1/2}\left[\frac{(2j+1)!(q-j)!}{(2q)!(q+j+1)!}\right]^{1/2}, \tag{29}$$

где $j = q - k$.

Преобразуем рекуррентные соотношения ККГ в уравнение для полиномов P_k, используя (13). Соотношение (25) приводит к введенному выше рекуррентному соотношению полиномов (15). Соотношение (26) приобретает вид конечно-разностного уравнения полиномов Хана [5]

$$\sigma(x)\Delta\nabla P_k(2x) + \tau(x)\Delta P_k(2x) + \lambda_k P_k(2x) = 0, \tag{30}$$

где Δ и ∇ — операторы конечных разностей

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1),$$

$\sigma(x)$ и $\tau(x)$ — полиномы второй и первой степени по x

$$\begin{gathered} \sigma(x) = (j_1 + m_1)(j_2 - m_2), \\ \sigma(x) + \tau(x) = (j_1 - m_1)(j_2 + m_2), \end{gathered} \tag{31}$$

m_1 и m_2 находятся на прямой $m_1 + m_2 = m$:

$$m_1 = \frac{m}{2} + x, \quad m_2 = \frac{m}{2} - x. \tag{32}$$

При этом

$$\lambda_k = -k\tau' - \frac{k(k-1)}{2}\sigma'' = (2q+1)k - k^2, \tag{33}$$

а вес (28) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}. \tag{34}$$

Для любого x полиномное решение уравнения (30) единственно и находится из конечно-разностного аналога формулы Родрига [5]:

$$P_k(2x) = \frac{B_k}{\rho(x)}\,\Delta^k\left[\rho(x)\prod_{i=0}^{k-1}\sigma(x-i)\right], \tag{35}$$

где

$$B_k = \frac{1}{A_k}\,P_k^{(k)}(2x), \quad A_0 = 1, \quad A_k = (-1)^k\prod_{i=0}^{k-1}(\lambda_k - \lambda_i).$$

Согласно рекуррентному соотношению (15) коэффициент при старшей степени полинома $P_k(2x)$ равен 2^k, что дает значение нормировочной постоянной формулы Родрига ($j = q - k$)

$$B_k = (-1)^k 2^k \frac{(2j+1)!}{(q+j+1)!}. \tag{36}$$

Раскрывая степень оператора конечной разности в формуле Родрига

$$\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \frac{k!}{i!(k-i)!} f(x+i),$$

приходим к выражению

$$P_k(2x) = 2^k k! \frac{(2j+1)!}{(q+j+1)!} \Gamma(j_1+m_1+1)\Gamma(j_1-m_1+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_2-m_2+1) \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \big(i!(k-i)!\Gamma(j_1-m_1-i+1)\Gamma(j-j_2+m_1+i+1) \times$$
$$\times \Gamma(j_2+m_2-i+1)\Gamma(j-j_1-m_2+i+1)\big)^{-1}, \tag{37}$$

где справедливо (32). Полученное выражение преобразуем к виду полинома согласно [7]. Для этого перейдем к гипергеометрическому ряду ${}_3F_2$ от единичного аргумента.

$$P_k(2x) = 2k \frac{(2j+1)!}{(q+j+1)!} \frac{\Gamma(j_1+m_1+1)\Gamma(j_2-m_2+1)}{\Gamma(j-j_2+m_1+1)\Gamma(j-j_1-m_2+1)} \times$$
$$\times {}_3F_2(-k,\ -j_1+m_1,\ -j_2-m_2;\ j-j_2+m_1+1,\ j-j_1-m_2+1;\ 1) \tag{38}$$

и применим преобразование

$${}_3F_2(-k,\ \alpha,\ \beta;\ \gamma,\ \delta;\ 1) = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\gamma)\Gamma(k+\delta-\alpha)\Gamma(k+\gamma-\alpha)}{\Gamma(k+\delta)\Gamma(k+\gamma)\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \times$$
$$\times {}_3F_2(-k,\ \alpha,\ 1+\alpha+\beta-\gamma-\delta-k;\ 1+\alpha-\delta-k,\ 1+\alpha-\gamma-k;\ 1). \tag{39}$$

В результате получим

$$P_k(2x) = 2^k \frac{(2j+1)!(q-m)!(q+m')!}{(q+j+1)!(j-m)!(j+m')!} {}_3F_2(-k, -j_1+m_1, -q-j-1;\ -q+m, -q-m';\ 1),$$
$$m_1 = \frac{m}{2}+x, \quad j = q-k. \tag{40}$$

Таким образом, полиномы P_k являются полиномами Хана, ортогональными на соответствующей (в зависимости от m) конечной системе точек (рис. 2). Аналогичные рассуждения справедливы для полиномов $\widetilde{P}_k$. Рассматривая полиномы P_k и $\widetilde{P}_k$ в точках «взвешивания» и используя их связь с ККГ, придем к известным рядам коэффициентов Клебша—Гордана [4].

3. Корни коэффициентов Клебша—Гордана

Представление о сложении моментов квантовой механики как о задаче на собственные значения генератора «буста» группы $SO(4)$, приводящее к связи ККГ

с полиномами Хана, дает интерпретацию корней коэффициентов Клебша—Гордана $SU(2)$ [4]. ККГ и их симметричные части — $3jm$-символы Вигнера

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = (-1)^{m+m'} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$$

равны нулю при невыполнении условий

$$|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2, \quad m = m_1 + m_2. \tag{41}$$

Кроме этого известны случаи обращения ККГ в нуль при частных значениях моментов и проекций, хотя условия (41) выполнены. Это приводит к дополнительным правилам отбора, запрещающим квантовые переходы, амплитуды которых пропорциональны таким ККГ.

Полученные выше выражения коэффициентов Клебша—Гордана через полиномы Хана дают необходимые и достаточные условия появления корней: корни ККГ возникают при совпадении собственного значения K_3 $\lambda_i = m_1 - m_2$ с общим корнем полиномов P_k и P_{n-k+1} степени $1 \leqslant k \leqslant n-2$:

$$P_n(m_1 - m_2) = 0, \quad P_k(m_1 - m_2) = \widetilde{P}_{n-k+1}(m_1 - m_2) = 0. \tag{42}$$

Геометрически наличие корня ККГ означает, что в пространстве представления группы $SO(4)$ соответствующий собственный вектор оператора K_3 ортогонален некоторым векторам исходного недиагонального базиса.

Обсудим простейшие случаи корней ККГ. В первую очередь, существуют корни, связанные с симметрией коэффициентов, которая обусловлена перестановками многомерных спиноров и отражена символом Редже [13]:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j_1 + j_2 + j & j_1 - j_2 + j & j_1 + j_2 - j \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j + m \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j - m \end{pmatrix}.$$

Символ Редже не меняется при четных перестановках строк и столбцов и транспозициях и изменяется на $(-1)^J$, $J = j_1 + j_2 + j$ при нечетных перестановках. Ввиду этого для нечетных J ККГ, соответствующие символу Редже с одинаковыми строками или столбцами, равны нулю:

$$\begin{gathered} \langle j_1 0 j_2 0 | j 0 \rangle = 0, \\ \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j, 2m_1 \rangle = 0, \\ \langle j_1, -2j_1 + j_2 + j, j_2, j_1 - 2j_2 + j | j, 2j - j_1 - j_2 \rangle = 0, \\ J = j_1 + j_2 + j = 2k + 1, \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{43}$$

Для первых двух ККГ $\lambda_i = \beta_k = 0$, поэтому рекуррентное соотношение полиномов Хана дает

$$P_k(0) = -\alpha_{k-1}^2 P_{k-2}(0), \quad k = n, n-1, \ldots,$$

что приводит к существованию нулевого корня у всех полиномов нечетной степени

$$P_n(0) = P_{n-2}(0) = \ldots = P_1(0) = 0.$$

Обращение в нуль третьего ККГ приводит к корню соответствующего полинома Хана.

Для коэффициентов Клебша—Гордана, связанных с полиномами низших степеней, корни можно найти явно. Для $k = 1$ соотношения (13) и (16) приводят

к следующим ККГ:

$$\sqrt{(q+m)(q-m)}\sqrt{\frac{j_1j_2}{2q-1}}\langle j_1m_1j_2m_2|q-1,\ m\rangle = (m_1j_2-m_2j_1)\langle j_1m_1j_2m_2|q,\ m\rangle,$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{(|m'|+m+1)(|m'|-m+1)}\sqrt{\frac{(j_1+1)j_2}{2|m'|+3}}\langle j_1m_1j_2m_2||m'|+1,\ m\rangle = \\ &\qquad = -\left[m_1j_2+m_2(j_1+1)\right]\langle j_1m_1j_2m_2||m'|,\ m\rangle, \\ &\sqrt{(j+m'+1)(j-m'+1)}\sqrt{\frac{(q-j)(q+j+2)}{2j+3}}\langle j_1m_1j_2m_2|j+1,\ j\rangle = \\ &\qquad = -\left[m'(q+1)-(j+1)(m_1-m_2)\right]\langle j_1m_1j_2m_2|j,\ j\rangle, \\ &\qquad q=j_1+j_2,\quad m'=j_1-j_2, \end{aligned} \tag{44}$$

корни которых соответственно будут при

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{j_1}{j_2};\quad \frac{m_1}{m_2}=-\frac{j_1+1}{j_2},\quad (j+1)(m_1-m_2)=m'(q+1). \tag{45}$$

Для близкого к верхней границе спектра ККГ при $k=2$ справедливо

$$\begin{aligned} &\sqrt{(q+m)(q-m)(q+m-1)(q-m-1)}\sqrt{\frac{16j_1j_2(2j_1-1)(2j_2-1)}{q(2q-3)(q-1)^2(2q-1)^2}}\times \\ &\qquad\times\langle j_1m_1j_2m_2|q-2,\ m\rangle = (m_1-m_2-x_1)(m_1-m_2-x_2)\langle j_1m_1j_2m_2|qm\rangle, \\ &\qquad x_{1,2}=\frac{1}{q-1}\left[mm'\pm\sqrt{\frac{4(q-1)^2j_1j_2-m^2(2j_1-1)(2j_2-1)}{2q-1}}\right]. \end{aligned}$$

Если корень полинома Хана x_1 или x_2 совпадает с собственным значением K_3, ККГ обращается в нуль. В частности, для любого целого k такими ККГ являются

$$\begin{aligned} &\langle k^2,\ k,\ k^2,\ 0|2k^2-2,\ k\rangle=0, \\ &\langle 2k^2+1,\ k,\ k^2(4k^2+1),\ -k|4k^4+3k^2-1,\ 0\rangle=0. \end{aligned} \tag{46}$$

В общем случае наличие корней ККГ представляется «случайным попаданием» корня полинома Хана в одну из точек ортогональности.

Авторы выражают благодарность Varшаловичу Д. А. за постановку вопроса о смысле дополнительных корней ККГ, Данилову Ю. А., указавшему на связь ККГ, полученных в виде полиномов с характеристическим уравнением, а также Кузнецову Г. И., Неудачину В. Г., Смирнову Ю. Ф., Ашеровой Р. М., Толстому В. Н., Эфросу В. Д. и Суркову Е. Л. за полезные обсуждения и ценные замечания.

Литература

1. *Смородинский Я. А., Шелепин Л. А.* УФН, **106**, 3, 1972.
2. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращения в группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958. С. 356, 365.
3. *Barat A. O., Raj Wilson.* J. Math. Phys., **17** (6), 900, 1976.
4. *Варшалович Д. А., Москалев А. И., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. С. 205, 225.

5. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. С. 74.
6. *Филиппов Г. Ф., Овчаренко В. И., Смирнов Ю. Ф.* Микроскопическая теория коллективных возбуждений атомных ядер. Киев: Наукова думка, 1981. С. 254, 256.
7. *Weber Maria, Erdelyi A.* Amer. Math. Month., **59**, 163, 1952.
8. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980. Т. 1. С. 346.
9. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966. С. 113.
10. *Годунов С. К.* Решение систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1980. С. 50.
11. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. С. 34.
12. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. С. 196.
13. *Regge T.* Nuovo Cim., **10**, 544, 1958.

$6j$-символы и ортогональные полиномы

Я. А. Смородинский, С. К. Суслов

Введение

Основные величины квантовой теории углового момента — коэффициенты Клебша—Гордана и $6j$-символы хорошо известны в различных разделах теоретической и математической физики, теории представлений групп (достаточно отметить задачи атомной и ядерной спектроскопии, представления группы $SU(2)$ и специальные функции). В результате их свойства достаточно хорошо изучены и изложены во многих обзорах и монографиях (см., например, [1–5]). Однако до настоящего времени остались почти незамеченными глубокие связи, существующие между коэффициентами Клебша—Гордана и $6j$-символами с одной стороны, и ортогональными полиномами дискретной переменной (полиномы, ортогональные на дискретном множестве точек) с другой. В случае коэффициентов Клебша—Гордана такими полиномами оказываются полиномы Хана [1, 6], которые принадлежат к числу классических ортогональных полиномов дискретной переменной [7–10]. В настоящей работе эти результаты обобщаются на $6j$-символы [1)].

В разд. 1 получено полиномиальное выражение для $6j$-символа. Основные свойства этих полиномов (ортогональность, вес, разностное уравнение, представление через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_4F_3(1)$), как показано в разд. 2, следуют из теории углового момента. Здесь же обсуждаются известные случаи корней $6j$-символов (существование одного из этих корней приводит к особой группе G_2 в атомной спектроскопии [12, 13]), которые оказываются корнями полинома первой степени. В Заключении отмечены возможные обобщения, в частности на T-коэффициенты «метода деревьев».

1. Полиномиальное выражение для $6j$-символов

При сложении трех моментов возможны различные схемы связи, например изображенные на рисунке [2)]. Переход от одной схемы связи к другой (на языке деревьев — пересадка) осуществляется с помощью матрицы

$$|j_{12}jm\rangle = \sum_{j_{23}} U(j_{23}, j_{12})\, |j_{23}jm\rangle, \tag{1}$$

которая с точностью до множителя совпадает с $6j$-символом

$$U(j_{23}, j_{12}) = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j}\left[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)\right]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

[1)] Упоминание об ортогональных полиномах, связанных с коэффициентами Клебша—Гордана и $6j$-символами, содержится также в предисловии Ричарда Аски к монографии [11].

[2)] Следуя [14], мы используем деревья как схемы сложения моментов.

Правому дереву на рисунке соответствует собственная функция оператора $\mathbf{J}^2{}_{23} = (\mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3)^2$:

$$J_{23}^2 \, |j_{23}jm\rangle = j_{23}(j_{23}+1) \, |j_{23}jm\rangle,$$

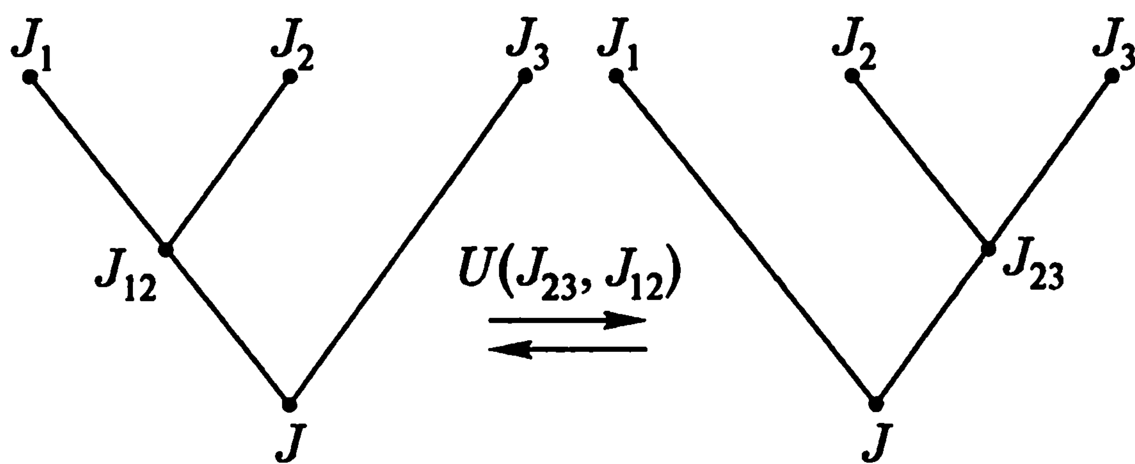
для левого дерева матрица этого оператора трехдиагональна:

$$J_{23}^2 \, |j_{12}jm\rangle = \alpha_{j_{12}} \, |j_{12}-1, jm\rangle + \beta_{j_{12}} \, |j_{12}jm\rangle + \alpha_{j_{12}+1} \, |j_{12}+1, jm\rangle, \tag{3}$$

где

$$\alpha_{j_{12}} = \left[(j_1+j_2+j_{12}+1)(-j_1+j_2+j_{12})(j_1-j_2+j_{12})(j_1+j_2-j_{12}+1)\right]^{1/2} \times \\ \times \left[\frac{(j_3+j+j_{12}+1)(-j_3+j+j_{12})(j_3-j+j_{12})(j_3+j-j_{12}+1)}{(2j_{12}-1)(2j_{12})^2(2j_{12}+1)}\right]^{1/2}, \tag{4}$$

$$\beta_{j_{12}} = \left[2j_{12}(j_{12}+1)\right]^{-1}\left\{2\left[j_1(j_1+1)\, j_3(j_3+1) + j_2(j_2+1)\, j(j+1)\right] - \\ - \left[j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) - j_{12}(j_{12}+1)\right]\left[j_3(j_3+1) + j(j+1) - j_{12}(j_{12}+1)\right]\right\}. \tag{5}$$



Переход между двумя различными схемами связи при сложении трех моментов

Значения матричных элементов можно получить, используя известное рекуррентное соотношение, связывающее между собой три $6j$-символа при $j_{12}-1$, j_{12} и $j_{12}+1$, которое является следствием тождества Биденхарна—Эллиотта [4, 5].

По правилу сложения моментов в соотношении (3) $\alpha_{j_{12}+1} = 0$ при $j_{12} = j_1 + j_2$, поэтому

$$|j_1+j_2-1, jm\rangle = \alpha_{j_1+j_2}^{-1} P_1\left(J_{23}^2\right) |j_1+j_2, jm\rangle,$$

где

$$P_1\left(J_{23}^2\right) = J_{23}^2 - \beta_{j_1+j_2}.$$

Аналогично произвольную собственную функцию задачи сложения трех моментов можно представить в виде полинома от квадрата момента:

$$|j_{12}, jm\rangle = d_{j_1+j_2-j_{12}}^{-1} P_{j_1+j_2-j_{12}}\left(J_{23}^2\right) |j_1+j_2, jm\rangle, \tag{6}$$

где

$$d_0 = 1, \quad d_{j_1+j_2-j_{12}} = \alpha_{j_1+j_2}\alpha_{j_1+j_2-1} \times \ldots \times \alpha_{j_{12}+1},$$

а полиномы $P_n\left(J_{23}^2\right)$, $n = j_1 + j_2 - j_{12}$ удовлетворяют (см. (3)) рекуррентному соотношению

$$J_{23}^2 P_n\left(J_{23}^2\right) = P_{n+1}\left(J_{23}^2\right) + \beta_{j_{12}} P_n\left(J_{23}^2\right) + \alpha_{j_{12}+1}^2 P_{n-1}\left(J_{23}^2\right), \tag{7}$$

и «начальным условиям»

$$P_0\left(J_{23}^2\right) = 1, \quad P_1\left(J_{23}^2\right) = J_{23}^2 - \beta_{j_1+j_2}.$$

Разложим функцию $|j_1+j_2, jm\rangle$ в формуле (6) по собственным функциям оператора J_{23}^2:

$$|j_1+j_2, jm\rangle = \sum_{j_{23}} U(j_{23}, j_1+j_2) \, |j_{23}jm\rangle.$$

Это приводит к полиномиальному выражению матрицы перехода между деревьями

$$U(j_{23}, j_{12}) = d^{-1}_{j_1+j_2-j_{12}} P_{j_1+j_2-j_{12}}(j_{23}(j_{23}+1))\, U(j_{23}, j_1+j_2). \tag{8}$$

Следовательно, для 6j-символов справедливо

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \\ = \frac{1}{d_{j_1+j_2-j_{12}}} \left[\frac{2j_1+2j_2+1}{2j_{12}+1}\right]^{1/2} P_{j_1+j_2-j_{12}}(j_{23}(j_{23}+1)) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_1+j_2 \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}. \tag{9}$$

2. Основные свойства полиномов, связанных с 6j-символами

Теория углового момента позволяет установить основные свойства полиномов, входящих в полученное выше выражение для 6j — символа, ортогональность, вес, разностное уравнение, связи с обобщенной гипергеометрической функцией ${}_4F_3(1)$ и т. д. Ортогональность матрицы перехода между двумя деревьями

$$\sum_{j_{23}} U(j_{23}, j_{12})\, U(j_{23}, j'_{12}) = \delta j_{12} j'_{12}$$

означает, что полиномы $P_n(s(s+1)) \equiv \widetilde{P}_{2n}(s)$, $n = j_1+j_2-j_{12}$, $s = j_{23}$ ортогональны на конечном множестве точек

$$\sum_s \widetilde{P}_{2n}(s)\, \widetilde{P}_{2n'}(s)\, \rho(s) = d_n^2 \delta_{nn'} \tag{10}$$

с весом

$$\rho(s) = U^2(s, j_1+j_2) = (2j_1+2j_2+1)(2s+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_1+j_2 \\ j_3 & j & s \end{Bmatrix}^2.$$

Значения 6j-символа частного вида [4, 5] позволяют определить вес в «точках ортогональности»:

$$\rho(s) = \left[\gamma(2s+1)(-j_1+j+s)!(-j_2+j_3+s)!\right] \times \\ \times \left[(j_1+j-s)!(j_1-j+s)!(j_1+j+s+1)! \times \right. \\ \left. \times (j_2+j_3-s)!(j_2-j_3+s)!(j_2+j_3+s+1)!\right]^{-1}, \tag{11}$$

где

$$\gamma = \left[(2j_1)!(2j_2)!(j_1+j_2+j_3+j+1)!(j_1+j_2-j_3+j)!(j_1+j_2+j_3-1)!\right] \times \\ \times \left[(2j_1+2j_2)!(-j_1-j_2+j_3+j)!\right]^{-1}.$$

В связи с 6j-символами свойство ортогональности (10) возникает только для полиномов четной степени.

Как показано в разд. 1, действие оператора J_{23}^2 на недиагональный базис эквивалентно рекуррентному соотношению полиномов $P_n(s(s+1))$ (см. (7)); применение оператора $\mathbf{J}_{12}^2 = (\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2)^2$ к обеим частям (1) приводит к разностному уравнению второго порядка для этих полиномов. Так как

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j & j_{23} \\ j_3 & j_2 & j_{12} \end{Bmatrix},$$

то матричные элементы оператора J_{12}^2

$$J_{12}^2\,|j_{23}jm\rangle = \alpha'_{j_{23}}\,|j_{23}-1,jm\rangle + \beta'_{j_{23}}\,|j_{23}jm\rangle + \alpha'_{j_{23}+1}\,|j_{23}+1,jm\rangle$$

получим из (4) и (5) в результате замены $j_{12}\leftrightarrow j_{23}$, $j\leftrightarrow j_2$. Тогда

$$\alpha'_{j_{23}}U(j_{23}-1,j_{12}) + \left(\beta'_{j_{23}} - j_{12}(j_{12}+1)\right)U(j_{23},j_{12}) + \alpha'_{j_{23}+1}U(j_{23}+1,j_{12}) = 0.$$

Это соотношение после отделения веса переходит в разностное уравнение полиномов $\widetilde{P}_{2n}(s)\equiv P_n(s(s+1))$:

$$\sigma(s)\,\widetilde{P}_{2n}(s-1) + (\lambda(s)-\tau(s)-2\sigma(s))\,\widetilde{P}_{2n}(s) + (\sigma(s)+\tau(s))\,\widetilde{P}_{2n}(s+1) = 0, \tag{12}$$

где[3)]

$$\sigma(s) = (s+1)(j_1+j+s+1)(j_1-j+s)(j_3+j_2+s+1)(-j_3+j_2+s),$$
$$\sigma(s)+\tau(s) = s(-j_1+j+s+1)(j_1+j-s)(j_3-j_2+s+1)(j_3+j_2-s),$$
$$\lambda(s)-\tau(s)-2\sigma(s) = (2s+1)\{2[j_1(j_1+1)\,j_3(j_3+1) + j(j+1)\,j_2(j_2+1) -$$
$$-j_{12}(j_{12}+1)\,s(s+1)] - [j_1(j_1+1)+j(j+1)-s(s+1)]\,[j_3(j_3+1)+j_2(j_2+1)-s(s+1)]\},$$
$$n = j_1+j_2-j_{12}.$$

Используя разностные производные

$$\Delta P(s) = P(s+1)-P(s), \qquad \nabla P(s) = P(s)-P(s-1),$$

уравнение (12) можно переписать так:

$$\sigma(s)\nabla\Delta\widetilde{P}_{2n}(s) + \tau(s)\Delta\widetilde{P}_{2n}(s) + \lambda(s)\widetilde{P}_{2n}(s) = 0. \tag{13}$$

В такой форме записи коэффициенты уравнения $\sigma(s)$, $\tau(s)$ и $\lambda(s)$ оказываются соответственно полиномами пятой, четвертой и третьей степеней. Полиномиальное решение возможно при условии (m — степень полинома)

$$\lambda^{(3)} = -\frac{1}{4}\left(m\tau^{(4)} + \frac{1}{5}\,m(m-1)\sigma^{(5)}\right).$$

Теория углового момента позволяет получить решение уравнения (13) в виде обобщенной гипергеометрической функции ${}_4F_3(1)$. В одно из известных выражений $6j$-символов через ${}_4F_3(1)$ входит функция [4, 5]

$${}_4F_3\left[\begin{matrix} -j_1-j_2+j_{12}, & j_{12}-j_3-j, & -j_1-j+j_{23}, & -j_2-j_3+j_{23} \\ -j_1-j_2-j_3-j-1, & -j_1+j_{12}-j_3+j_{23}+1, & -j_2+j_{12}-j+j_{23}+1 & \end{matrix}\right].$$

Отсюда свойство симметрии [15]

$${}_4F_3\left[\begin{matrix} -n, & x, & y, & z \\ u, & v, & w & \end{matrix}\right] = \frac{(v-z)_n(w-z)_n}{(v)_n(w)_n}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix} -n, & u-x, & u-y, & z \\ u, & 1-v+z-n, & 1-w+z-n & \end{matrix}\right],$$
$$u+v+w = x+y+z-n+1,$$

приводит к полиному по $j_{23}(j_{23}+1)$. Так как полиномы $P_n(s(s+1))\equiv\widetilde{P}_{2n}(s)$ обладают единичным коэффициентом при старшей степени (см. рекуррентное соотношение (7)), то

[3)] Заметим, что $\sigma(s)+\tau(s) = -\sigma(-s-1)$, $\lambda(s)-\tau(s)-2\sigma(s) = -\lambda(-s-1)+\tau(-s-1)+2\sigma(-s-1)$.

$$P_n(s(s+1)) = \frac{(-j_1-j_2-j-1)_n(-2j_2)_n(j-j_1-j_2-j_3)_n}{(-j_1-j_2-j_{12}-1)_n} \times$$
$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} -n, -j_1-j_2-j_{12}-1, & -j_2-j_3-s-1, & -j_2-j_3-s \\ -j_1-j_2-j_3-j-1, & -2j_2, & j-j_1-j_2-j_3 \end{matrix}\right], \quad (14)$$
$$n = j_1+j_2-j_{12}.$$

Необходимым условием отличия $6j$-символа от нуля, когда моменты j_1, j_2 и j_3 — целые или полуцелые положительные числа, является соблюдение правила сложения моментов во всех узлах деревьев, изображающих схемы связи на рисунке. Кроме того, известны $6j$-символы, обращающиеся в нуль, хотя все правила векторного сложения выполнены. Для небольших моментов это [12]

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 5 & 5 & 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

(последние два $6j$-символа приводят к особой группе G_2 при анализе f-оболочки в атомной спектроскопии [12, 13]).

Формула (9) означает, что корни $6j$-символов оказываются корнями полиномов $P_n(s(s+1))$, находящимися в точках $s = j_{23}$. Самое простое условие корня

$$P_1(s(s+1)) = j_{23}(j_{23}+1) - \beta_{j_1+j_2} = 0.$$

Используя свойство симметрии

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j & j_{12} \\ j_1 & j_2 & j_{23} \end{Bmatrix},$$

нетрудно проверить справедливость такого условия для всех $6j$-символов в (15).

Заключение

Мы показали, что аналогично коэффициентам Клебша—Гордана $6j$-символы группы $SU(2)$ тесно связаны с некоторой системой полиномов дискретной переменной. Для этих полиномов на основании известных свойств $6j$-символов естественно возникают ортогональность на конечном множестве точек, вес, разностное уравнение и т. д. Несомненно такая система полиномов требует дальнейшего изучения. В частности, в связи с асимптотикой $6j$-символов, например, представляет интерес перейти к дифференциальному аналогу уравнения (13), рассмотреть его полиномиальные решения и исследовать вопросы сходимости. С другой стороны, необходимо обобщение полученных результатов на так называемые T-коэффициенты, которые фигурируют в «методе деревьев» задачи n тел [10, 17].

Авторы благодарны Данилову Ю. А., Кузнецову Г. И., Смирнову Ю. Ф., Никифорову А. Ф., Уварову В. Б. и Эфросу В. Д. за полезные обсуждения.

Дополнение. После отправления статьи в редакцию Климык А. У., которому авторы благодарны, указал на препринт Корнвиндера [18], посвященный так же, как и наша статья [6], связи коэффициентов Клебша—Гордана группы $SU(2)$ с полиномами Хана. Из этого препринта авторы узнали о работе Вильсона [19], в которой на основе обобщенной гипергеометрической функции ${}_4F_3(1)$ изучены некоторые свойства рассмотренных в настоящей статье полиномов и указана их связь с $6j$-символами (в неявном виде часть этих результатов была получена в препринте [17]). На наш взгляд, все эти работы взаимно дополняют друг друга. Среди других работ, близких по тематике, сошлемся на препринт [20] и неизвестную ранее авторам работу [21], в которой установлены основные свойства полиномов Хана, ортогональных на конечном множестве точек.

Литература

1. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А. Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
3. *Смородинский Я. А., Шелепин Л. А.* УФН, **106**, 3, 1972.
4. *Варшалович Д. А., Москалев А. И., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
5. *Юцис А. П., Банзайтис А. А.* Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс: Мокслас, 1977.
6. *Смородинский Я. А., Суслов С. К.* ЯФ, **35**, 192, 1982.
7. *Hahn W.* Math. Month., **2**, 4, 1949.
8. *Weber M., Erdelyi A.* Amer. Math. Month., **59**, 163, 1952.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. **2**. М.: Наука, 1966.
10. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
11. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
12. *Джадд Б., Вайборн Б.* Теория сложных атомных спектров. М.: Мир, 1973.
13. *Свиридов Д. Т., Смирнов Ю. Ф.* Теория оптических спектров ионов переходных металлов. М.: Наука, 1977.
14. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **21**, 1135, 1975.
15. *Bailey W. N.* Generalized Hypergeometric Series. Cambridge Tracts in Math, № 32. 1935. P. 56.
16. *Кильдюшов М. С.* ЯФ, **15**, 197, 1972.
17. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Препринт ИАЭ-2659, 1976.
18. *Koornwinder T. H.* Report ZW 160/81, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1981.
19. *Wilson J. A.* SIAM J. Math. Anal., **11**, 690, 1980.
20. *Koornwinder T. H.* Report ZW 156/81, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.
21. *Karlin S., McGregor J. L.* Scripta Math., **26**, 33, 1961.

Многомерный изотропный осциллятор: переходы от декартового базиса к гиперсферическим

Г. С. Погосян, Я. А. Смородинский, В. Н. Тер-Антонян

Введение

В настоящей работе решена задача о взаимных переходах между декартовым и произвольным гиперсферическим базисом p-мерного изотропного осциллятора. Матрица перехода от декартового базиса к сферическому для кругового и трехмерного изотропного осцилляторов была вычислена в работах [1, 2].

С математической точки зрения знание матриц, реализующих эти переходы, примечательно тем, что оно открывает путь для выяснения трансформационных свойств гиперсферических гармоник при конечных вращениях, если, конечно, известно поведение декартового базиса при таких вращениях. Последнее было выяснено в работе [3], где было введено понятие об осцилляторной функции Вигнера как о матричном элементе оператора p-мерных конечных вращений по декартовому осцилляторному базису и дан наглядный диаграммный метод ее построения.

Рассматриваемая нами задача может оказаться полезной и в физических приложениях, так как аппарат гиперсферических гармоник широко используется во многих теоретических подходах, принятых в настоящее время в ядерной физике низких энергий [4].

1. Общая формула

Рассмотрим p-мерный изотропный осциллятор с массой m и циклической частотой ω. Обозначим волновые функции такого осциллятора в декартовом базисе через $\Psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_p)$. Очевидно, что $\Psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ равна произведению волновых функций p линейных осцилляторов. В произвольном гиперсферическом базисе

$$\Psi_{N,\mathbf{l}}(r, \boldsymbol{\theta}) = R_{N,l_1}(r)\, Y_{\mathbf{l}}(\boldsymbol{\theta}),$$

где $N = n_1 + \ldots + n_p$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{p-1})$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_{p-1})$, l_1 — глобальный момент, $l_2, \dots, l_{p-1}$ — гипермоменты. Радиальная волновая функция $R_{N,l_1}(r)$ имеет вид

$$R_{N,l_1}(r) = \left\{ \frac{2\alpha^p \Gamma\left(\dfrac{N+l_1+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{N-l_1}{2}+1\right)} \right\}^{1/2} \frac{(\alpha r)^{l_1}}{\Gamma\left(l_1 + \dfrac{p}{2}\right)} e^{-\alpha^2 r^2/2} {}_1F_1\left(-\frac{N-l_1}{2};\; l_1 + \frac{p}{2};\; \alpha^2 r^2\right),$$

где $\alpha = (m\omega/h)^{1/2}$.

Представим искомое нами разложение декартового осцилляторного базиса по гиперсферическому следующим равенством:

$$\Psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}} W_{\mathbf{n}}^{N,\mathbf{l}} \Psi_{N,\mathbf{l}}(r, \boldsymbol{\theta}). \tag{1}$$

25 Зак. 198

Пределы изменения $\mathbf{l}$ определяются условием $N = \text{const}$ и структурой гиперсферического дерева. Проделаем с разложением (1) следующие операции: умножим его на r^{-N}, устремим все x_i к бесконечности, затем полученное предельное равенство умножим на $Y_{\mathbf{l}'}^*(\boldsymbol{\theta})$, проинтегрируем по телесному углу и воспользуемся условием ортонормируемости гиперсферических гармоник

$$\int Y_{\mathbf{l}'}^*(\boldsymbol{\theta})\, Y_{\mathbf{l}}(\boldsymbol{\theta})\, d\Omega = \delta_{\mathbf{l}\mathbf{l}'}.$$

После этого придем к общей для всех гиперсферических систем координат формуле

$$W_{\mathbf{n}}^{N,\mathbf{l}} = K \int d\Omega\, Y_{\mathbf{l}}^*(\boldsymbol{\theta}) \prod_{i=1}^{p} (\widehat{x}_i)^{n_i}, \tag{2}$$

в которой введено обозначение $\widehat{x}_i = x_i/r$, а множитель K равен

$$K = \frac{(-1)^{(N-l_1)/2}}{\sqrt{2}\pi^{p/4}} \left\{ \frac{2^N \Gamma\left(\frac{N-l_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N+l_1+p}{2}\right)}{(n_1)!(n_2)!\ldots(n_p)} \right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Для вычисления матрицы перехода (2) необходимо иметь явный вид функций $Y_{\mathbf{l}}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{x}_i(\boldsymbol{\theta})$, а также формулу, выражающую элемент телесного угла $d\Omega$ через произведение дифференциалов $d\theta_1, \ldots, d\theta_{p-1}$.

Согласно работе [5] всякой гиперсферической системе координат и соответствующей ей гиперсферической гармонике удобно поставить в соответствие определенный граф, называемый гиперсферическим деревом. В p-мерном пространстве любое дерево имеет $p-1$ вершин и с каждой из этих вершин связана своя ячейка. Ячейки в общем случае могут быть четырех типов. Вклад каждой из этих ячеек в функции $Y_{\mathbf{l}}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{x}_i(\boldsymbol{\theta})$ и $d\Omega(\theta)$ наиболее компактно представлен в табл. 1.

В первой строке таблицы приведены типы ячеек, во второй — пределы изменения углов, связанных с каждой из них. Параметры v_c и v_s означают число вершин, которые находятся выше основания ячейки, т. е. вершины с гипермоментом l, слева и справа от него. Числа N_c и N_s из последней строки таблицы равны суммам декартовых квантовых чисел n_i, которыми наделены свободные концы, «произрастающие» слева и справа от основания ячейки, причем для свободных концов $N_c = n_c$, $N_s = n_s$. Функции, приведенные в четвертой строке таблицы, имеют вид

$$f_{l_s;\,v_s}^{s;\,l}(\theta) = \left(N_{l-l_s}^{\alpha_s}\right)^{-1/2} (\sin\theta)^{l_s} P_{l-l_s}^{\alpha_s,\alpha_s}(\cos\theta), \tag{4}$$

$$f_{l_c,\,v_c}^{c;\,l}(\theta) = \left(N_{l-l_c}^{\alpha_c}\right)^{-1/2} (\cos\theta)^{l_c} P_{l-l_c}^{\alpha_c,\alpha_c}(\sin\theta), \tag{5}$$

$$f_{l_c,\,v_c;\,l_s,\,v_s}^{c,\,s;\,l} = 2^{(\alpha_c+\alpha_s)/2+1} \left(N_{(l-l_s-l_c)/2}^{\alpha_s,\,\alpha_c}\right)^{-1/2} (\cos\theta)^{l_c} (\sin\theta)^{l_s} P_{(l-l_s-l_c)/2}^{\alpha_s,\,\alpha_c}(\cos 2\theta), \tag{6}$$

где $P_n^{a,b}(x)$ — полиномы Якоби, а остальные обозначения таковы:

$$\alpha_s = l_s + \frac{v_s-1}{2}, \quad \alpha_c = l_c + \frac{v_c-1}{2},$$

$$N_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\, \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\, \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \quad N_n^{\alpha} = N_n^{\alpha,\alpha}.$$

В формуле (6) индекс $l - l_s - l_c$ обязан быть четным, в противном случае считается, что левая часть (6) обращается в нуль.

Таблица 1

	n_c n_s θ $l,\ n_c+n_s$	l_s, v_s θ l	l_c, v_c θ l	l_c, v_c l_s, v_s θ l
θ	$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$
$d\Omega$	$d\theta$	$(\sin\theta)^{v_s} d\theta$	$(\cos\theta)^{v_c} d\theta$	$(\sin\theta)^{v_s}(\cos\theta)^{v_c} d\theta$
$Y_l(\theta)$	$\frac{e^{il\theta}}{\sqrt{2\pi}}$	$f^{s;\,l}_{l_s,\,v_s}(\theta)$	$f^{c;\,l}_{l_c,\,v_c}(\theta)$	$f^{c,\,s;\,l}_{l_c,\,v_c;\,l_s,\,l_c}(\theta)$
$\prod_{i=1}^{p-1} \widehat{x}_i$	$(\sin\theta)^{n_s}(\cos\theta)^{n_c}$	$(\sin\theta)^{N_s}(\cos\theta)^{n_c}$	$(\sin\theta)^{n_s}(\cos\theta)^{N_c}$	$(\sin\theta)^{N_s}(\cos\theta)^{N_c}$

2. Вклады ячеек в матрицу перехода

Согласно приведенной в предыдущем пункте таблице каждая ячейка вносит в матрицу перехода (2) следующий вклад:

$$F^{l}_{n_c,\,n_s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} (\cos\theta)^{n_c} (\sin\theta)^{n_s} e^{-il\theta} d\theta, \tag{7}$$

$$F^{s;\,l}_{n_c,\,N_s}(l_s,\,v_s) = \int\limits_0^{\pi} (\cos\theta)^{n_c} (\sin\theta)^{N_s+v_s} f^{s;\,l}_{l_s,\,v_s}(\theta)\, d\theta, \tag{8}$$

$$F^{c;\,l}_{N_c,\,n_s}(l_c,\,v_c) = \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{N_c+v_c} (\sin\theta)^{n_s} f^{c;\,l}_{l_c,\,v_c}(\theta)\, d\theta, \tag{9}$$

$$F^{c;\,s;\,l}_{N_c,\,N_s}(l_c,\,v_c;\,l_s,\,v_s) = \frac{1+(-1)^{l-l_s-l_c}}{2} R^{c,\,s;\,l}_{N_c,\,N_s}(l_c,\,v_c;\,l_s,\,v_s), \tag{10}$$

$$R^{c,\,s;\,l}_{N_c,\,N_s}(l_c,\,v_c;\,l_s,\,v_s) = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{N_c+v_c} (\sin\theta)^{N_s+v_s} f^{s,\,c;\,l}_{l_c,\,v_c;\,l_s,\,v_s}(\theta)\, d\theta. \tag{11}$$

Покажем, что интегралы (7)–(9) приводятся к интегралу (11). Начнем с интеграла (7), соответствующего ячейке со свободными концами. Разобьем в нем интервал интегрирования на интервалы $(0, \pi)$ и $(\pi, 2\pi)$ и сделаем во втором интеграле замену $\phi = \theta - 2\pi$. Тогда, учитывая, что

$$\cos l\phi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(N_l^{-1/2}\right)^{-1/2} P_l^{-1/2,\,-1/2}(\cos\phi),$$

$$\sin l\phi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(N_l^{1/2}\right)^{-1/2} (\sin\phi) P_{l-1}^{1/2,\,1/2}(\cos\phi),$$

и возвращаясь к (8), получим

$$F^{l}_{n_c,n_s} = \frac{1+(-1)^{n_s}}{2} F^{s;l}_{n_c,n_s}(0,0) - i\frac{1-(-1)^{n_s}}{2} F^{s,l}_{n_c,n_s}(1,0). \tag{12}$$

Далее, интегралы (8) и (9) после аналогичных операций и использования формулы

$$\left(N^{\alpha}_{k}\right)^{-1/2} P^{\alpha,\alpha}_{k}(x) = \frac{1+(-1)^k}{2} 2^{\alpha/2+1/4}\left(N^{\alpha,-1/2}_{k/2}\right)^{-1/2} P^{\alpha,-1/2}_{k/2}(2x^2-1) + \\ + \frac{1-(-1)^k}{2} 2^{\alpha/2+3/4}\left(N^{\alpha,1/2}_{(k-1)/2}\right)^{-1/2} P^{\alpha,1/2}_{(k-1)/2}(2x^2-1)$$

принимают вид

$$F^{s;l}_{n_c,N_s}(l_s,v_s) = \left[1+(-1)^{l-l_s+n_c}\right]\left\{\frac{1+(-1)^{l-l_s}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} R^{c,s;l}_{n_c,N_s}(0,0;l_s,v_s) + \right. \\ \left. + \frac{1-(-1)^{l-l_s}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} R^{c,s;l}_{n_c,N_s}(1,0;l_s,v_s)\right\}, \tag{13}$$

$$F^{c;l}_{N_c,n_s}(l_c,v_c) = (-1)^{(l-l_c)/2}\left[1+(-1)^{l-l_c+n_s}\right]\left\{\frac{1+(-1)^{l-l_c}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} R^{c,s;l}_{N_c,n_s}(l_c,v_c;0,0) - \right. \\ \left. - i\frac{1-(-1)^{l-l_c}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} R^{c,s;l}_{N_c,n_s}(l_c,v_c;1,0)\right\}. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь интеграл (11). Переходя к переменной $x = \cos 2\theta$, расписывая полином Якоби согласно формуле Родрига, заменяя затем в интеграле x на $-x$ и имея в виду интегральное представление для коэффициентов Клебша—Гордана [6]

$$C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta} = \left\{\frac{(2c+1)\Gamma(c+\gamma+1)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(a+b+c+2)}{\Gamma(a-b+c+1)\Gamma(a-\alpha+1)\Gamma(a+\alpha+1)\Gamma(b+\beta+1)\times \\ \times\Gamma(b-\beta+1)\Gamma(c-\gamma+1)\Gamma(b+c-a+1)}\right\}^{-1/2}\times \\ \times\frac{(-1)^{a-c+\beta}}{2^{a+b+c+1}}\int\limits_{-1}^{1} dx\,(1-x)^{a-\alpha}(1+x)^{b-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^{c-\gamma}\left\{(1-x)^{c+b-a}(1-x)^{c-b+a}\right\},$$

получим

$$R^{c,s;l}_{N_c,N_s}(l_s,v_c;l_s,v_s) = \frac{(-1)^{(N_c+l_s-l)/2}}{\sqrt{2}} J^{c}_{a,\alpha;b,\beta} C^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta}, \tag{15}$$

где

$$J^{c}_{a,\alpha;b,\beta} = \left\{\frac{\Gamma(a-\alpha+1)\Gamma(b+\beta+1)\Gamma(-b-\beta+1)\Gamma(a+\alpha+1)}{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(a+b+c+2)}\right\}^{1/2}, \tag{16}$$

а индексы c, γ и т. д. имеют вид

$$\begin{aligned} c &= \frac{l}{2} + \frac{v_c+v_s}{4} - \frac{1}{2}, & \gamma &= \frac{l_c+l_s}{2} + \frac{v_c+v_s}{4} - \frac{1}{2}, \\ a &= \frac{N_c+N_s+l_s-l_c}{4} + \frac{v_s-1}{4}, & \alpha &= \frac{l_s+l_c}{4} + \frac{N_s-N_c}{4} + \frac{v_s-1}{4}, \\ b &= \frac{N_c+N_s+l_c-l_s}{4} + \frac{v_c-1}{4}, & \beta &= \frac{l_s+l_c}{4} + \frac{N_c-N_s}{4} + \frac{v_c-1}{4}. \end{aligned} \tag{17}$$

Итак, интеграл (11) выражается через коэффициенты Клебша—Гордана группы $SU(2)$, если формально их распространить на четвертьцелые значения момента. $3j$-символы с четвертьцелыми значениями встречаются и в других задачах [7, 8]. Причина возникновения четвертьцелых моментов и связь соответствующих им $3j$-символов с аналогичными объектами группы $Sp(2, R)$ были выяснены в работе [9].

Выразим коэффициенты Клебша—Гордана в формуле (15) через обобщенные гипергеометрические функции ${}_3F_2$:

$$C^{c,\gamma}_{a,\alpha;b,\beta^s_{\gamma,\alpha+\beta}} = \left\{ \frac{(2c+1)\Gamma(a+\alpha+1)\Gamma(b-\beta+1)\Gamma(c+\gamma+1) \times \Gamma(c-\gamma+1)\Gamma(a-b+c+1)\Gamma(c+b-a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)\Gamma(b+\beta+1)\Gamma(a+b+c+2)\Gamma(a+b-c+1)} \right\}^{-1/2} \times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(c-b+\alpha+1)\Gamma(c-a-\beta+1)} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -a+b+c, & -a+\alpha, & -b-\beta \\ -a+c-\beta+1, & -b+c+\alpha+1 & \end{matrix} \middle| 1 \right\}.$$

Тогда вместо (15) будем иметь

$$R^{c,s;l}_{N_c,N_s}(l_c, v_c; l_s, v_s) = (-1)^{(N_c+l_s-l)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{N_s-l_s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N_s+l_s}{2}+\frac{v_s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N_s+N-l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N_c+N_s+l}{2}+\frac{v_c+v_s}{2}+1\right)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\left(l+\frac{v_s+v_c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+l_s+l_c}{2}+\frac{v_c+v_s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+l_s-l_c}{2}+\frac{v_s+1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{l-l_s-l_c}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l+l_c-l_s}{2}+\frac{v_c+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-N_c+l_s}{2}+\frac{v_s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-N_c-l_s}{2}+1\right)} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\frac{N_s+N_c-l}{2}, & \frac{l_c-N_c}{2}, & -\frac{N_c+l_c}{2}-\frac{v_c}{2} \\ \frac{l-N_c-l_s}{2}+1, & \frac{l-N_c+l_s}{2}+\frac{v_s+1}{2} & \end{matrix} \middle| 1 \right\}$$

и в результате подстановки убедимся в справедливости тождеств

$$R^{c,s;l}_{n_c,N_s}(0,0;l_s,v_s) = R^{c,s;l}_{n_c,N_s}(1,0;l_s,v_s),$$

$$R^{c,s;l}_{N_c,n_s}(l_c,v_c;0,0) = iR^{c,s;l}_{N_c,n_s}(l_c,v_c;1,0).$$

Из этих тождеств следует, что формулы (12)–(14) можно записать в более компактном виде:

$$F^{l}_{n_c,n_s} = \frac{1+(-1)^{l+n_c+n_s}}{\sqrt{2}} R^{c,s;l}_{n_c,n_s}(0,0;0,0), \tag{18}$$

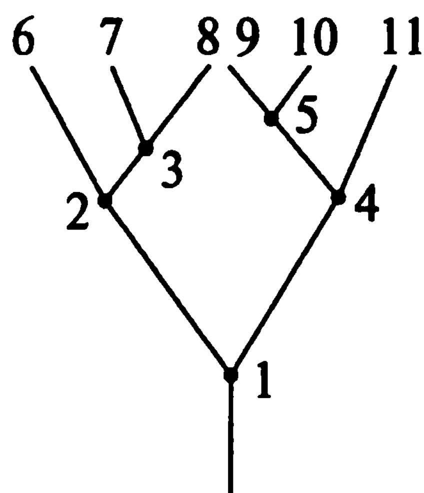
$$F^{s;l}_{n_c,N_s}(l_s,v_s) = \frac{1+(-1)^{l-l_s+n_c}}{\sqrt{2}} R^{c,s;l}_{n_c,N_s}(0,0;l_s,v_s), \tag{19}$$

$$F^{c;l}_{N_c,n_s}(l_c,v_c) = (-1)^{(l-l_c)/2}\frac{1+(-1)^{l-l_c+n_s}}{\sqrt{2}} R^{c,s;l}_{N_c,n_s}(l_c,v_c;0,0). \tag{20}$$

Таким образом, вклады всех четырех типов ячеек в матрицу перехода вычислены. Они даются формулами (15) и (18)–(20). Поэтому перейдем к обсуждению вопроса о том, как по этим результатам вычислить саму матрицу перехода.

3. Графическое построение матрицы перехода

Сопоставим матрице перехода $W_n^{n,l}$ так называемое дерево перехода, которое по своей конструкции идентично соответствующему гиперсферическому дереву с той лишь разницей, что теперь вершине приписываются не гипермомент и число v, а гипермомент, число v и квантовое число N, равное сумме декартовых квантовых чисел n_i, которыми наделены свободные концы, «произрастающие» из этой вершины.



Например, в шестимерном пространстве возможно дерево перехода, изображенное на рисунке. С каждой вершиной мы связали ее порядковый номер, который в подробной записи означает тройку чисел; так, $1 = (l_1 v_1 N_1)$, $7 = (0, n_7, 0)$ и т. д.

Проследим за вкладом коэффициентов (16) в приведенное дерево перехода. Для упрощения формул обозначим этот коэффициент через $J(m, q, r)$, где m, q и r — порядковые числа в данной ячейке, причем m относится к основанию, а q и r — к вышестоящей от него левой и правой вершине. Очевидно, $v_m = v_q + v_r + 1$, и поэтому согласно (16)

$$J(m, q, r) = \frac{f(q)f(r)}{f(m)},$$

где функция f имеет вид

$$f(i) = \left\{\Gamma\left(\frac{N_i - l_i}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{N_i + l_i}{2} + \frac{v_i + 1}{2}\right)\right\}^{1/2}.$$

Полный вклад коэффициентов (16) в приведенное дерево равен произведению факторов $J(m, q, r)$, и легко убедиться, что

$$\prod J(m, q, r) = \frac{1}{f(1)} \prod_{k=6}^{11} f(k),$$

т. е. в окончательный результат входит лишь информация о свободных концах и основании дерева перехода. Аналогичный вывод справедлив и для любого p-мерного дерева перехода. Отсюда следует, что для произвольного дерева

$$\prod J(m, q, r) = \frac{\pi^{p/4}}{2^{N/2}} \left\{ \frac{(n_1)!(n_2)!\dots(n_p)!}{\Gamma\left(\frac{N - l_1}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{N + l_1}{2} + \frac{p}{2}\right)} \right\}^{1/2}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (3), приходим к выводу, что общий вклад коэффициентов (16) в любое дерево перехода сокращается с точностью фазового множителя и фактора $1/\sqrt{2}$ с коэффициентом K в (3). По этой причине их не следует учитывать и на промежуточных этапах, т. е. в пределах данной ячейки.

Обозначим через j, t и q число свободных, частично-свободных и закрытых ячеек на дереве перехода. Очевидно, $2j + t = q$, $j + t + q = p - 1$, откуда $j = q + 1$, и поэтому при учете формул (10), (15) и (18)–(20) и заложенных в них правил

Таблица 2

$n_c \quad n_s$ — l, n_c+n_s	$n_c \quad l_s, v_s, N_s$ — l, N_s+n_c, v_s+1	$l_c, n_c, N_c \quad n_s$ — l, N_c+n_s, v_c+1	$l_c, v_c, N_c \quad l_s, v_s, N_s$ — l, N_c+N_s, v_c+v_s+1
$\dfrac{(-1)^{n_c-l}}{\sqrt{2}} C^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta}$	$(-1)^{(n_c+l_s-l)/2} C^{c\gamma}_{a\alpha;\,b\beta}$	$(-1)^{(N_c-l_c)/2} C^{c\gamma}_{a\alpha;\,b\beta}$	$(-1)^{(N_c+l_s-l)/2} C^{c\gamma}_{a\alpha;\,b\beta}$
$l_c = l_s = v_c = v_s = 0$	$l_c = v_c = 0$	$l_s = v_s = 0$	

четности можно сформулировать следующее правило построения матрицы перехода. Сначала чертится дерево перехода и проставляются на нем тройки чисел (l_i, N_i, v_i). Затем каждой ячейке в зависимости от того, к какому типу она принадлежит, ставится в соответствие ее вклад согласно табл. 2.

Последний этап — это перемножение выписанных в табл. 2 вкладов с учетом конструкции дерева перехода. В окончательный ответ необходимо еще ввести в качестве множителя фактор $(-1)^{(N-l_1)/2}$ где l_1 — глобальный момент, а $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$.

Из приведенных правил следует, что формально матрица перехода для любого дерева может быть записана в виде

$$W_{\mathbf{n}}^{N,1} = \frac{(-1)^{(N-l_1)/2}}{2^{f/2}} \prod_{i=1}^{p-1} (-1)^{Q_i} C^{c_i\gamma_i}_{a_i\alpha_i;\,b_i\beta_i},$$

где f — число ячеек со свободными концами, Q_i для каждой ячейки определяется степенью, в которую возводится (-1) перед коэффициентами Клебша—Гордана в табл. 2, а произведение берется по всем вершинам. В случае канонического дерева $j = 1$, $v_{c_i} = 0$ и, как легко показать, $v_{s_i} = p - i - 1$, $\sum Q_i = (N - l_1 - n_p)/2$, где i — порядковый номер вершины, считая от основания дерева.

Тот факт, что ячейкам со свободными концами соответствует добавочный фактор, равный $1/\sqrt{2}$, понятен и из следующих рассуждений. В частично-свободных и закрытых ячейках гипермоменты и соответствующие им числа N_i имеют одинаковую четность, и поэтому проекции моментов α и β в (17) изменяются с шагом, равным единице, и пробегают все допустимые значения. Для ячеек со свободными концами такого правила четностей нет, и поэтому шаг в α и β равен 1/2. Это приводит к тому, что в последнем случае значения проекций α и β группируются в два подмножества, в каждом из которых шаг равен единице, и каждое из которых является полным в том смысле, что он охватывает все дозволенные значения проекций. По этой причине для коэффициентов Клебша—Гордана, соответствующих ячейкам со свободными концами, условие ортонормировки принимает вид

$$\sum_{\alpha+\beta=\gamma} C^{c'\gamma}_{a\alpha,\,b\beta} C_{a\alpha,\,b\beta} = 2\delta_{cc'}.$$

Из этой формулы следует, что добавочный фактор $1/\sqrt{2}$ в первом столбце табл. 2 призван для того, чтобы «восстановить» стандартную ортонормируемость вкладов от ячеек со свободными концами.

Учитывая сказанное, легко показать, что для любого дерева матрица перехода подчиняется условию ортонормируемости

$$\sum_{n_1+\ldots+n_p=N} W_{\mathbf{n}}^{N,\mathbf{l}} W_{\mathbf{n}}^{*N,\mathbf{l}'} = \delta_{\mathbf{l}\mathbf{l}'}, \tag{21}$$

как это и должно быть исходя из общих соображений. Отсюда следует, что матрица обратного перехода, т. е. перехода от гиперсферического базиса к декартовому, равна $W_{\mathbf{n}}^{*N,\mathbf{l}}$, а само обратное преобразование имеет вид

$$\Psi_{N,\mathbf{l}}(r,\theta) = \sum_{n_1+\ldots+n_p=N} W_{\mathbf{n}}^{*N,\mathbf{l}} \Psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}).$$

В работе [10] было выяснено, что в некоторых частных случаях возможно вырождение коэффициентов Клебша—Гордана в D-функции Вигнера. Именно с таким случаем мы сталкиваемся, когда имеем дело с ячейкой со свободными концами. Действительно, можно показать, что

$$F^l_{n_c,n_s} = (-1)^{(n_s)/2}\sqrt{2}\left\{\frac{(n_c)!(n_s)!}{\pi 2^{n_c+n_s}\left(\dfrac{n_c+n_s+l}{2}\right)!\left(\dfrac{n_c+n_s-l}{2}\right)!}\right\}^{1/2} d^{(n_c+n_s)/2}_{l/2,(n_c-n_s)/2}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Эта формула заимствована нами из работы [1]. С другой стороны, из (15) и (18) следует, что

$$F^l_{n_c,n_s} = (-1)^{(n_c-l)/2}\left\{\frac{(n_c)!(n_s)!}{\pi 2^{n_c+n_s}\left(\dfrac{n_c+n_s+l}{2}\right)!\left(\dfrac{n_c+n_s-l}{2}\right)!}\right\}^{1/2} \times$$

$$\times\, C^{l/2-1/2,-1/2}_{(n_c+n_5)/4\cdot 1/4,\,(n_s-n_c-1)/4;\,(n_c+n_s-1)/4,\,(n_c-n_s-1)/4}.$$

Сравнивая последние две формулы, получим

$$C^{c,-1/2}_{a\alpha;\,a\beta} = (-1)^{\alpha-\beta+\gamma-c}\sqrt{2}\, d^{2a-\gamma}_{c-\gamma,\beta-\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

т.е. результат, аналогичный тому, который приводится в работе [10].

Заключение

Уже отмечалось, что тот факт, что матрица перехода $W_{\mathbf{n}}^{N,\mathbf{l}}$ выражается через коэффициенты Клебша—Гордана группы $Sp(2,\mathbf{R})$, содержащие моменты, кратные $1/4$, имеет теоретико-групповое обоснование. В работе [9] было показано, что построение произвольного гиперсферического осцилляторного базиса из декартового эквивалентно реализации определенной для этого базиса схемы сложения моментов, кратных $-3/4$ и $-1/4$. Схема сложения диктуется структурой соответствующего гиперсферического дерева. В этом смысле некоторая информация о структуре матрицы перехода $W_{\mathbf{n}}^{N,\mathbf{l}}$ содержится уже в работе [9]. Однако для получения явного вида $W_{\mathbf{n}}^{N,\mathbf{l}}$ одних теоретико-групповых соображений недостаточно и следует привлечь аналитические вычисления, проведенные в настоящей работе. Как мы убедились, такой подход приводит к результату, который удается оформить в виде сводки простых и конкретных правил.

Мы признательны Г. С. Саакяну и А. Н. Сисакяну за интересные обсуждения.

Литература

1. *Погосян Г. С., Тер-Антонян В. М., Торосян Г. Т.* Препринт ПРЛФ-77–04, Ереван, 1977.
2. *Погосян Г. С., Тер-Антонян В. М.* ОИЯИ, Р2–11962, Дубна, 1978.
3. *Pogosyan G. S., Smorodinsky Ya. A., Ter-Antonyan V. M.* J. Phys. A. Math. Gen., **14**, 769, 1981.
4. *Смирнов Ю. Ф., Шитикова К. В.* ЭЧАЯ, **8**, № 4, М.: Атомиздат, 1977.
5. *Виленкин Н. Я., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **2**, 906, 1965.
6. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
7. *Смородинский Я. А., Шелепин Л. А.* УФН, **108**, № 1, 1972.
8. *Кильдюшов М. С.* ЯФ, **15**, 197, 1977.
9. *Кныр В. А., Пипирайте П. П., Смирнов Ю. Ф.* ЯФ, **22**, 1063, 1975.
10. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **25**, 1977.

24 Зак 198

Introduction

V. Efros

The papers by Ya. A. Smorodinsky and his students presented in this section are devoted to development of the hyperspherical approach for solving the three-body problem in quantum mechanics. Let us first recall the main points of the approach. In the non-relativistic case, after separating the centre-of-mass motion a system is described with the help of two Jacobi space vectors $\boldsymbol{\xi}_1$ and $\boldsymbol{\xi}_2$ or two conjugated Jacobi momenta. In the 6-dimensional space spanned by these two vectors one introduces the radius $\rho = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)^{1/2}$ and five angles $\{\omega\}$ parameterizing a sphere centered at the origin. One represents a wave function or a scattering amplitude as an expansion over hyperspherical harmonics (HH) $Y_{KLM}(\{\omega\})$. The K quantum number corresponds to the eigenvalue $K(K+4)$ of the Laplace operator on the hypersphere, while L and M are the total angular momentum and its projection. The expansion is similar to that of a single-particle wave function $\psi(\mathbf{r})$ over ordinary spherical harmonics $Y_{lm}(\mathbf{n})$. In case of a particle in a non-central field the latter expansion leads to a system of coupled radial equations, and higher components in the barriers $l(l+1)/r^2$. In the three-body case one arrives at similar coupled equations in the ρ variable that include centrifugal barriers $K(K+4)/\rho^2$.

The quantum numbers K, L, M do not define HH uniquely. One can seek for two additional operators whose eigenvalues may label HH together with K, L, M. This approach is adopted in Refs. [1, 2]. The complex coordinates $\mathbf{z}, \mathbf{z}^*$ are used in replacement of the Jacobi vectors. The subspace of HH with a given K is invariant with respect to simultaneous unitary transformations of $\mathbf{z}$ and $\mathbf{z}^*$ which allows classification of HH according to the chain $O(3) \supset SU(3) \supset O(6)$. This chain provides an additional operator whose eigenvalue ν lables the $SU(3)$-invariant subspaces together with K. The eigenfunctions of ν possess simple properties with respect to particle permutations. One more operator $\widehat{\Omega}$ is required to remove the degeneracy, and eigenvalues and eigenfunctions of this operator are studided.

In Ref. [3] the eigenfunctions of K, L, M, and ν are constructed explicitly by projecting HH $Y^{l_1 l_2}_{KLM}$ with given Jacobi orbital momenta onto subspaces of HH with a given ν value.

In Refs. [4, 5] the (Raynal—Revai) coefficients of the transformations of the HH $Y^{l_1 l_2}_{KLM}$ which are induced by «kinematical rotations» of the Jacobi vectors (see Eqs. (6), (14) in Ref. [4]), are evaluated and studied. Using these coefficients, HH with simple properties with respect to permutations of identical particles are readily expressed in a form convenient for computation of matrix elements. Matrix elements for non-identical particles are also represented in a simple form as combinations of the transformation coefficients. The results obtained have been used in many subsequent calculations in nuclear physics.

The presented papers by Ya. A. Smorodinsky not only have provided suitable techniques for practical three-body calculations but also contributed to development of group theory methods in quantum mechanics in general.

References

1. *Nyiri J., Smorodinsky Ya. A.* Yad. Fiz., 1969, 9, 882.
2. *Pustovalov V. V., Smorodinsky Ya. A.* Yad. Fiz., 1969, **10**, 1287.
3. *Nyiri J., Smorodinsky Ya. A.* Yad. Fiz., 1970, **12**, 202.
4. *Smorodinsky Ya. A., Efros V. D.* Yad. Fiz., 1973, **17**, 210.
5. *Nyiri J., Smorodinsky Ya. A.* Yad. Fiz., 1979, **29**, 833.

Координаты и наблюдаемые в задаче трех тел в ядерной физике

Ю. Нири, Я. А. Смородинский

1. Введение

Задача трех тел в квантовой механике вообще и в ядерной физике — в особенности дает исключительно интересный материал для исследования.

В классической механике, точнее в механике небесной, задача трех тел служила предметом многих весьма плодотворных теорий. Однако даже в классической механике подробно исследованы лишь системы с ньютоновским взаимодействием. Случай же произвольного закона сил практически не изучался, но крайней мере, о нем нет упоминаний в стандартных руководствах.

В квантовой механике задача трех тел исследована несравненно менее подробно. Существует довольно большое число работ, связанных с вычислением уровней энергии трития и He^3. Есть много работ, темой которых служит рассеяние нуклонов дейтронами. Однако большинство работ слишком утилитарно и в них нет достаточно общей постановки задач.

Недавно появились работы Бадалян и Симонова [1, 2], в которых задача трех тел рассматривается наиболее последовательно. Авторы сначала строят базис, отвечающий невзаимодействующим частицам. Потом развивается теория возмущений, в которой функции взаимодействующих частиц разлагаются по этому базису. В качестве базиса выбираются так называемые K-полиномы, являющиеся гармоническими по отношению к оператору Лапласа на шестимерной сфере. Далее обсуждается полная система решений. Построено пять коммутирующих операторов и указан путь построения полиномов — собственных функций этих операторов. Однако реальные вычисления громоздки, и авторы строят лишь несколько первых полиномов, для описания которых достаточно задать четыре квантовых числа.

Попытка построить базис сделана также в работе Зикендрата [3], но использованный им метод очень сложен. В работе Леви—Леблон и Леви—Наас [4] обнаружена связь базиса с представлениями группы $SU(3)$. Работа отличается правильным подходом к параметризации задачи, в ней получено выражение для лапласиана в угловых переменных.

Чтобы развить общую теорию гармонических функций для системы трех частиц (наподобие теории шаровых функций в случае двух частиц), естественно перейти к угловым переменным на шестимерной сфере или на трехмерной комплексной сфере и построить шаровые функции в этих угловых переменных. В этой работе будет найден лишь общий вид этих функций и выражения для всех операторов.

Заметим прежде всего, что полная группа движений на шестимерной сфере слишком широка для наших целей. Вопрос как раз и состоит в том, чтобы найти подходящую подгруппу. Введение угловых координат означает, что мы выделяем преобразование подобия и рассматриваем лишь группу преобразований, оставляющую неизменной сумму квадратов координат всех трех частиц, т. е. радиус шестимерной сферы.

Рассмотрим треугольник, вершины которого задаются тремя частицами. Если отождествлять подобные треугольники, то остаются лишь два типа преобразований: трехмерные вращения, порождающие группу $O(3)$, и деформации треугольника. Легко убедиться в том, что деформации приводят к $SU(2)$. Если рассматривать невращающийся, деформирующийся треугольник, то различные его формы можно описать как проекции на его плоскость другого треугольника неизменной формы, вращающегося в пространстве. Объединяя оба типа преобразований, можно сказать, что все преобразования треугольника, кроме преобразований подобия, описываются как проекции на трехмерное пространство жесткого треугольника, вращающегося в четырехмерном пространстве. Значит, произвольное движение трех тел можно описывать как движение жесткого треугольника в четырехмерном пространстве и подобные преобразования[1)].

Представление группы движений на шестимерной сфере, так же как и ее редукция на $SU(3)$ или на $O(4)$, включает в себя и представление группы перестановок $P(3)$. Поэтому такое представление особенно удобно для системы трех одинаковых частиц. Для простоты ограничимся здесь только этим случаем. Обобщение на произвольные массы не дает ничего нового до тех пор, пока мы не перейдем к разложению амплитуд или волновых функций взаимодействующих частиц по базисным функциям (см. [5]). Область изменения переменных в этом случае, как известно, зависит от масс частиц.

С теоретико-групповой точки зрения самые интересные вопросы в задаче трех тел связаны со свойствами пятого квантового числа Ω (см. [6]). Это число возникает в связи с тем, что для характеристики состояний систем трех частиц недостаточно использовать квантовые числа, возникающие из разложения $O(6) = O(3) \times O(2)$, т. е. квантовые числа, описывающие вращения и перестановки.

В работе Суркова [7] показано, что для систем с большим числом частиц необходимо вводить несколько дополнительных квантовых чисел. Именно для четырех частиц надо вводить три, для пяти частиц — четыре, для шести частиц — пять. Замечательно, что число дополнительных квантовых чисел не растет беспредельно, а остается постоянным и равным пяти для систем, содержащих больше шести частиц.

Свойства квантовых чисел Ω заслуживают отдельного исследования.

Кроме упомянутых выше работ следует указать на работу Филиппова [8], который выбрал в качестве координат компоненты момента инерции.

В нашей работе получены выражения операторов, образующих полную систему, и получена общая форма решения. Свойства коэффициентов, входящих в это решение, будут изложены в другой работе.

2. Координаты и групповые свойства

Координаты вводятся, как обычно, следующим образом. Если x_i $(i = 1, 2, 3)$ есть радиус-вектор i-й частицы и

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \tag{1}$$

[1)] Отметим формальную аналогию с задачей Кеплера. Движение по эллипсу можно описывать как проекцию движения по большому кругу четырехмерной сферы (в плоскости, нормальной к моменту M и вектору Лапласа A) на ее экваториальное сечение. При этом разным большим кругам будут отвечать эллипсы с одинаковой большой осью (вырождению соответствует четырехмерное вращение). Если еще произвести преобразование времени, то кеплерово движение можно описать как свободное движение точки на четырехмерной сфере (симметрия Фока).

то координаты Якоби для одинаковых масс определяются формулами

$$\xi = -\sqrt{\frac{3}{2}}(x_1 + x_2), \tag{2}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{2}}(x_1 - x_2), \tag{3}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2. \tag{4}$$

Аналогичные координаты можно ввести и в пространстве импульсов. В таком случае условие (1) означает, что мы находимся в с. ц. м., а ρ^2 является величиной, пропорциональной энергии.

Выражение (4) можно рассматривать как инвариант группы $O(6)$. На самом деле нас интересует прямое произведение $O(3) \times O(2)$, так как мы должны ввести угловой момент (группа $O(3)$) и квантовые числа группы перестановок трех частиц ($O(2)$).

Чтобы характеризовать систему трех частиц, нам нужно пять квантовых чисел. В этом смысле группа $O(6)$ оказывается слишком широкой. Удобно использовать $SU(3)$-симметрию, в которой как раз имеется пять необходимых квантовых чисел.

Вводим комплексный вектор

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}, \tag{5}$$

$$\mathbf{z}^* = \boldsymbol{\xi} - i\boldsymbol{\eta}. \tag{6}$$

Перестановка двух частиц в этих координатах приводит к вращению в комплексной z-плоскости:

$$P_{12}\begin{pmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{z}^*\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}, \quad P_{13}\begin{pmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{i\pi/3}\,\mathbf{z}^*\\ e^{-i\pi/3}\,\mathbf{z}\end{pmatrix}, \quad P_{23}\begin{pmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-i\pi/3}\mathbf{z}^*\\ e^{i\pi/3}\mathbf{z}\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Условие

$$\boldsymbol{\xi}^2 + \boldsymbol{\eta}^2 = |\mathbf{z}|^2 = \rho^2 \tag{8}$$

дает инвариант группы $SU(3) \subset O(6)$. Генераторы группы определяются обычным образом:

$$A_{ik} = iz_i\frac{\partial}{\partial z_k} - iz_k^*\frac{\partial}{\partial z_i^*}. \tag{9}$$

Реализация представлений группы (выбор квантовых чисел) отличается от реализации, используемой в теории унитарной симметрии адронов. В теории элементарных частиц рассматривают цепочку подгрупп $SU(3) \supset SU(2) \supset U(1)$. В этой цепочке нет $O(3)$ и, соответственно, в число наблюдаемых не включается угловой момент. Чтобы его включить, надо выделить из (8) антисимметричный тензор, генератор $O(3)$:

$$L_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) = \frac{1}{2}\left(iz_i\frac{\partial}{\partial z_k} - iz_k\frac{\partial}{\partial z_i} + iz_i^*\frac{\partial}{\partial z_k^*} - iz_k^*\frac{\partial}{\partial z_i^*}\right). \tag{10}$$

Оставшуюся симметричную часть

$$B_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}) = \frac{1}{2}\left(iz_i\frac{\partial}{\partial z_k} + iz_k\frac{\partial}{\partial z_i} - iz_i^*\frac{\partial}{\partial z_k^*} - iz_k^*\frac{\partial}{\partial z_i^*}\right) \tag{11}$$

составляют генераторы группы деформаций треугольника. Наконец, введем скалярный оператор

$$N = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,A = \frac{1}{2}\sum_k\left(z_k\frac{\partial}{\partial z_k} - z_k^*\frac{\partial}{\partial z_k^*}\right). \tag{12}$$

В качестве квантовых чисел выбираем

$$\left.\begin{array}{l} K(K+4) \text{ — собственное значение лапласиана на шестимерной сфере} \\ \text{(оператор Казимира второго порядка группы } SU(3)\text{); } L(L+1) \text{ — соб-} \\ \text{ственное значение квадрата оператора момента импульса } L^2 = 4\sum\limits_{i>k} L_{ik}^2; \\ M \text{ — собственное значение } L_3 = 2L_{12}; \\ \nu \text{ — собственное значение N.} \end{array}\right\} \quad (13)$$

Генератор (12) не является оператором Казимира $SU(3)$, однако можно показать, что собственное значение оператора Казимира третьего порядка выражается через K и ν. Поэтому эти квантовые числа можно использовать для характеристики представлений. Если p и q означают числа двух типов индексов тензора (верхних и нижних), то $K = p + q$, $\nu = 1/2(p - q)$.

Пятое квантовое число уже не содержится в подгруппах; мы возьмет его из $O(6)$ и определим как собственное значение оператора:

$$\Omega = \sum_{ikl} L_{ik} B_{kl} L_{li} = \operatorname{Sp} LBL. \quad (14)$$

Этот генератор третьего порядка был введен впервые Рака [6].

3. Параметризация комплексной сферы

Изучая систему трех частиц, следует ввести такие координаты, которые связаны явно с подвижной системой координат. Векторы $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$ можно записать в следующем виде[2]:

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\lambda/2} \left(e^{i\alpha/2} \mathbf{l}_1 + i e^{-i\alpha/2} \mathbf{l}_2\right), \quad (15)$$

$$\mathbf{z}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\lambda/2} \left(e^{-i\alpha/2} \mathbf{l}_1 - i e^{i\alpha/2} \mathbf{l}_2\right), \quad (16)$$

$$|z|^2 = 1, \quad (17)$$

$$l_1^2 = l_2^2 = 1, \quad \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 = 0. \quad (18)$$

В этих переменных момент инерции (диагональный) имеет компоненты

$$\sin^2\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \cos^2\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad 1.$$

Три ортогональных единичных вектора $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ и $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2)$ образуют подвижную систему координат. Их ориентации по отношению к неподвижной системе координат задаются с помощью углов Эйлера φ_1, θ_1, φ_2:

$$\mathbf{l}_1 = \{-\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\theta; \\ -\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\theta; \; -\cos\varphi_1 \sin\theta\}, \quad (19)$$

$$\mathbf{l}_2 = \{-\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\theta; \\ -\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\theta; \; \sin\varphi_1 \sin\theta\}, \quad (20)$$

$$\mathbf{l} = \{-\cos\varphi_2 \sin\theta; \; \sin\varphi_2 \sin\theta; \; -\cos\theta\}. \quad (21)$$

[2] В нашем препринте (Дубна, 1968) была выбрана несколько другая параметризация. Поэтому формулы здесь отличаются от формул препринта.

В последующих расчетах будет удобнее рассматривать векторы

$$\mathbf{z} = e^{-i\lambda/2}\left(\cos\frac{a}{2}\,\mathbf{l}_+ + i\sin\frac{a}{2}\,\mathbf{i}_-\right), \tag{22}$$

$$\mathbf{z}^* = e^{-i\lambda/2}\left(\cos\frac{a}{2}\,\mathbf{l}_- - i\sin\frac{a}{2}\,\mathbf{l}_+\right), \tag{23}$$

где

$$\mathbf{l}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{l}_1 + i\mathbf{l}_2), \quad \mathbf{l}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{l}_1 - i\mathbf{l}_2). \tag{24}$$

Векторы $\mathbf{l}_+$ и $\mathbf{l}_-$ обладают очевидными свойствами

$$\mathbf{l}_+^2 = \mathbf{l}_-^2 = 0, \quad \mathbf{l}_0 = (\mathbf{l}_+ \times \mathbf{l}_-) = -i\mathbf{l}, \quad \mathbf{l}_+\mathbf{l}_- = 1, \quad \mathbf{l}_+^* = \mathbf{l}_-. \tag{25}$$

Следует обратить внимание на то, что компоненты $\mathbf{l}_+$ и $\mathbf{l}_-$ можно выразить через D-функции Вигнера

$$D^l_{mn}(\varphi_1\theta\varphi_2) = e^{-i(m\varphi_1+n\varphi_2)}P^l_{mn}(\cos\theta) \tag{26}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_+ &= \left\{D^1_{1-1}(\varphi_1\theta\varphi_2);\ D^1_{10}(\varphi_1\theta\varphi_2);\ D^1_{11}(\varphi_1\theta\varphi_2)\right\},\\
\mathbf{l}_0 &= \left\{D^1_{0-1}(\varphi_1\theta\varphi_2);\ D^1_{00}(\varphi_1\theta\varphi_2);\ D^1_{01}(\varphi_1\theta\varphi_2)\right\},\\
\mathbf{l}_- &= \left\{D^1_{-1-1}(\varphi_1\theta\varphi_2);\ D^1_{-10}(\varphi_1\theta\varphi_2);\ D^1_{-11}(\varphi_1\theta\varphi_2)\right\},
\end{aligned} \tag{27}$$

т. е.

$$D^1_{mn}(\varphi_1\theta\varphi_2) = l_m k_n,$$

где l_m и k_n — единичные векторы соответственно подвижной и неподвижной систем координат.

Векторы $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$ могут быть записаны в виде

$$\mathbf{z}_M = \sum_{M'=\pm 1/2} D^{1/2}_{1/2,M'}(\lambda, a, 0)\, D^1_{2M',M}(\varphi_1\theta\varphi_2), \tag{28}$$

$$\mathbf{z}^*_M = D^{1/2}_{-1/2,-1/2}(\lambda, a, 0)\, D^1_{-1,M}(\varphi_1\theta\varphi_2) - D^{1/2}_{-1/2,1/2}(\lambda, a, 0)\, D^1_{1,M}(\varphi_1\theta\varphi_2). \tag{29}$$

4. Оператор Лапласа

Приступим сейчас к построению тех операторов, собственные значения которых нас интересуют. Прежде всего напишем оператор Лапласа. Можно было бы сделать это путем вычисления $\Delta = |A_{ik}|^2$, но существует более простая возможность. Будем исходить из соотношения

$$d\mathbf{z} = -\frac{i}{2}\,\mathbf{z}d\lambda + \frac{1}{2}\,e^{-i\lambda}(\mathbf{l} \times \mathbf{z}^*)\,da - (d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}). \tag{30}$$

Это выражение получено с помощью введения инфинитезимального вращения $d\omega$. Его проекции на неподвижные орты $k_1 = (1,0,0)$, $k_2 = (0,1,0)$, $k_3 = (0,0,1)$ выражаются через углы Эйлера известным образом:

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= \cos\varphi_2\sin\theta\, d\varphi_1 - \sin\varphi_2\, d\theta,\\
d\omega_2 &= -\sin\varphi_2\sin\theta\, d\varphi_1 - \cos\varphi_2\, d\theta,\\
d\omega_3 &= \cos\theta\, d\varphi_1 + d\varphi_2.
\end{aligned} \tag{31}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\omega_1} &= \cos\varphi_2\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \cos\varphi_2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - \sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\theta},\\
\frac{\partial}{\partial\omega_2} &= -\sin\varphi_2\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \sin\varphi_2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - \cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\theta},\\
\frac{\partial}{\partial\omega_3} &= \frac{\partial}{\partial\varphi_2}
\end{aligned} \tag{32}$$

и перестановочные соотношения

$$\left[\frac{\partial}{\partial\omega_1}, \frac{\partial}{\partial\omega_2}\right] = \frac{\partial}{\partial\omega_3}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial\omega_2}, \frac{\partial}{\partial\omega_3}\right] = \frac{\partial}{\partial\omega_1}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial\omega_3}, \frac{\partial}{\partial\omega_1}\right] = \frac{\partial}{\partial\omega_2}. \tag{33}$$

Действие этого оператора на произвольный вектор **A** сводится к умножению

$$\frac{\partial}{\partial\omega_i}\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{A}; \tag{34}$$

$\boldsymbol{\omega}_i$-вектор длины ω_i, направленный по i-й оси. Справедливость этого выражения проверяется по перестановочным соотношениям.

Определим теперь повороты вокруг подвижных осей:

$$d\Omega_i = \mathbf{l}_i d\boldsymbol{\omega}. \tag{35}$$

Напишем в явном виде $\partial/\partial\Omega_i$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\Omega_1} &= \cos\varphi_1\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \cos\varphi_1\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \sin\varphi_1\frac{\partial}{\partial\theta},\\
\frac{\partial}{\partial\Omega_2} &= -\sin\varphi_1\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \sin\varphi_1\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \cos\varphi_1\frac{\partial}{\partial\theta},\\
\frac{\partial}{\partial\Omega_3} &= -\frac{\partial}{\partial\varphi_1}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Знак минус в третьей компоненте отражает наш выбор нормировки D-функции с минусом в экспоненте (26).

Перестановочные соотношения для операторов $\partial/\partial\Omega_i$ следующие:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\Omega_1}, \frac{\partial}{\partial\Omega_2}\right] = -\frac{\partial}{\partial\Omega_3}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial\Omega_2}, \frac{\partial}{\partial\Omega_3}\right] = -\frac{\partial}{\partial\Omega_1}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial\Omega_3}, \frac{\partial}{\partial\Omega_1}\right] = -\frac{\partial}{\partial\Omega_2}. \tag{37}$$

Соответственно действие на **A** определяется как

$$\frac{\partial}{\partial\Omega}\mathbf{A} = -\boldsymbol{\Omega}_i \times \mathbf{A}, \tag{38}$$

что отличается от (34) знаком в соответствии с разными знаками в перестановочных соотношениях (33) и (37).

Исходя из (30), получаем

$$ds^2 = dz\,dz^* = g_{ik}x^i x^k = \frac{1}{4}da^2 + \frac{1}{4}d\lambda^2 + \frac{1}{2}d\Omega_1^2 + \frac{1}{2}d\Omega_2^2 + d\Omega_3^2 - \sin a\, d\Omega_1\, d\Omega_2 - \cos a\, d\Omega_3\, d\lambda. \tag{39}$$

Это выражение определяет компоненты метрического тензора g_{ik}. Таким образом становится легко вычислить оператор Лапласа. Вводя множитель 1/4, мы имеем

$$\Delta' = \frac{1}{4}\Delta = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x^k} =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2\,\mathrm{ctg}\,2a\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\sin^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \cos a\,\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\Omega_3} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\Omega_3^2}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\cos^2 a}\left[\frac{\partial^2}{\partial\Omega_1^2} + \sin a\left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega_1\,\partial\Omega_2} + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_2\,\partial\Omega_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_2^2}\right]. \quad (40)$$

Если Φ является собственной функцией Δ', соответствующей определенному представлению $SU(3)$, то должно выполняться

$$\Delta'\Phi = -\frac{1}{4}K(K+4)\Phi = -\frac{K}{2}\left(\frac{K}{2}+2\right)\Phi \quad (41)$$

и

$$N\Phi = \nu\Phi, \quad N = i\frac{\partial}{\partial\lambda}. \quad (42)$$

Выражая (40) через углы Эйлера, мы приходим к оператору Лапласа в форме

$$\Delta' = \Delta_a - \mathrm{tg}\,a\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{2\cos^2 a}\left(\Delta_\theta - \frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}\right) - \frac{\sin a}{2\cos^2 a}\left[\cos 2\varphi_1\left(\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - 2\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\theta} + 2\frac{1}{2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2\partial\theta}\right) + \sin 2\varphi_1\left(\Delta_\theta - \frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right], \quad (43)$$

где Δ_a и Δ_θ — операторы Лапласа групп $O(3)$:

$$\Delta_a = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \mathrm{ctg}\,a\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\sin^2 a}\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \cos a\,\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\Omega_3} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\Omega_3^2}\right), \quad (44)$$

$$\Delta_\theta = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - 2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\,\partial\varphi_2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right). \quad (45)$$

Лапласиан (43) отличается от вычисленного в работе [4] другой параметризацией. Однако они связаны унитарным преобразованием.

5. Генераторы L_{ik} и B_{ik}

Получить генераторы непосредственно из dz можно путем обращения определителя пятого порядка для системы трех частиц. Это приводит к громоздким вычислениям; в случае же большего числа частиц вычисления в таком виде становятся безнадежными. Вместо проведения прямых расчетов получим генераторы следующим образом. Рассмотрим сначала L_{ik}, точнее, одну его компоненту, например L_{12}. Вводим параметр σ_{ik}, который определяет перемещение по траектории, соответствующей действию оператора L_{ik}. Формально можно обозначать

$$L_{12} = \frac{1}{2}\left(iz_1\frac{\partial}{\partial z_2} - iz_2\frac{\partial}{\partial z_1} + iz_1^*\frac{\partial}{\partial z_2^*} - iz_2^*\frac{\partial}{\partial z_1^*}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial\sigma_{12}}. \quad (46)$$

Подействуем оператором L_{12} на векторы z и z^*:

$$L_{12}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -iz_2 \\ iz_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_{12}\begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ z_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -iz_2^* \\ iz_1^* \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Отсюда видно, что σ_{12} должен быть мнимым. Из (47) получаем соотношения

$$\mathbf{z}L_{12}\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{z}^*L_{12}\mathbf{z}^* = 0, \tag{48}$$

$$\mathbf{z}^*L_{12}\mathbf{z} = \frac{i}{2}(\mathbf{z}\times\mathbf{z}^*)_3, \tag{49}$$

$$\mathbf{l}L_{12}\mathbf{z} = -\frac{i}{2}(\mathbf{l}\times\mathbf{z})_3. \tag{50}$$

Используя выражение (30) для dz, можем написать

$$L_{12}\mathbf{z} = \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\sigma_{12}} = -\frac{i}{2}\,\mathbf{z}\frac{d\lambda}{d\sigma_{12}} + \frac{1}{2}\,e^{-i\lambda}(\mathbf{l}\times\mathbf{z}^*)\,\frac{\partial a}{\partial\sigma_{12}} - \left(\frac{d\omega}{d\sigma_{12}}\times\mathbf{z}\right), \tag{51}$$

$$L_{12}\mathbf{z}^* = \frac{\partial\mathbf{z}^*}{\partial\sigma_{12}} = \frac{i}{2}\,\mathbf{z}^*\frac{d\lambda}{d\sigma_{12}} + \frac{1}{2}\,e^{i\lambda}(\mathbf{l}\times\mathbf{z}^*)\,\frac{\partial a}{\partial\sigma_{12}} - \left(\frac{d\omega}{d\sigma_{12}}\times\mathbf{z}^*\right) \tag{52}$$

(здесь $-i\mathbf{z}/2$ есть $d\mathbf{z}/d\lambda$ и т.д.). Если мы теперь найдем производные, входящие в правую часть последних уравнений, то сможем выразить L_{12} в новых переменных. Для этого используем равенства (48)–(50). Подставляя в (51)

$$\begin{aligned}(\mathbf{l}\times\mathbf{z}^*) &= ie^{i\lambda/2}\left(\cos\frac{a}{2}\,\mathbf{l}_- + i\sin\frac{a}{2}\,\mathbf{l}_+\right),\\ (\mathbf{l}\times\mathbf{z}) &= -ie^{-i\lambda/2}\left(\cos\frac{a}{2}\,\mathbf{l}_+ - i\sin\frac{a}{2}\,\mathbf{l}_-\right);\end{aligned} \tag{53}$$

$$z^2 = ie^{-i\lambda}\sin a, \quad z^{*2} = -ie^{i\lambda}\sin a, \tag{54}$$

получаем из соотношений (48)

$$\frac{\partial a}{\partial\sigma_{12}} = \frac{d\lambda}{d\sigma_{12}} = 0. \tag{55}$$

Таким же путем из (49) приходим к выражению

$$\frac{d\Omega_3}{d\sigma_{12}} = -\frac{i}{2}\,l^{(3)}, \tag{56}$$

и, наконец, (50) даст

$$\frac{d\Omega_2}{d\sigma_{12}} = -\frac{i}{2}\,l_2^{(3)}, \tag{57}$$

$$\frac{d\Omega_1}{d\sigma_{12}} = -\frac{i}{2}\,l_1^{(3)}, \tag{58}$$

где $l_i^{(k)}$ означает k-ю компоненту вектора l_i. Таким образом, мы получим выражение

$$L_{12} = -\frac{i}{2}\left[l_1^{(3)}\frac{\partial}{\partial\Omega_1} + l_2^{(3)}\frac{\partial}{\partial\Omega_2} + l_3^{(3)}\frac{\partial}{\partial\Omega_3}\right] = -\frac{i}{2}\,\frac{\partial}{\partial\omega_3}. \tag{59}$$

Соответственно будем иметь

$$L_{23} = -\frac{i}{2}\left[l_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial\Omega_1} + l_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial\Omega_2} + l^{(1)}\frac{\partial}{\partial\Omega_3}\right] = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\omega_1}, \tag{60}$$

$$L_{31} = -\frac{i}{2}\left[l_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial\Omega_1} + l_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial\Omega_2} + l^{(2)}\frac{\partial}{\partial\Omega_3}\right] = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\omega_2}. \tag{61}$$

Вводя обозначения

$$L_1 = 2L_{23}, \quad L_2 = 2L_{31}, \quad L_3 = 2L_{12}, \tag{62}$$

можно написать общий вид оператора момента импульса

$$L_k = -i\left[l_1^{(k)}\frac{\partial}{\partial\Omega_1} + l_2^{(k)}\frac{\partial}{\partial\Omega_2} + l^{(k)}\frac{\partial}{\partial\Omega_3}\right]. \tag{63}$$

Для компонент этого оператора выполняются коммутационные соотношения (в движущейся системе координат)

$$[L_1, L_2] = -iL_3, \quad [L_2, L_3] = -iL_1, \quad [L_3, L_1] = -iL_2. \tag{64}$$

Наконец, квадрат оператора момента импульса имеет вид

$$L^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_3^2}\right) = \Delta_\theta. \tag{65}$$

Выражения для L_k можно было получить проще, но мы привели вывод, чтобы проверить метод.

Перейдем сейчас к определению оператора B_{ik}. Рассмотрим

$$B_{12} = \frac{1}{2}\left(iz_1\frac{\partial}{\partial z_2} + iz_2\frac{\partial}{\partial z_1} - iz_1^*\frac{\partial}{\partial z_2^*} - iz_2^*\frac{\partial}{\partial z_1^*}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial\beta_{12}}. \tag{66}$$

Из действия B_{12} на $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$

$$B_{12}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} iz_2 \\ iz_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{12}\begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ z_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -iz_2^* \\ -iz_1^* \\ 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

видно, что угол β_{12} веществен. Исходим из соотношений

$$\mathbf{z}B_{12}\mathbf{z} = iz_1z_2, \quad \mathbf{z}^*B_{12}\mathbf{z}^* = -iz_1^*z_2^*, \tag{68}$$

$$\mathbf{z}^*B_{12}\mathbf{z} = \frac{i}{2}(z_1^*z_2 + z_1z_2^*), \tag{69}$$

$$\mathbf{l}B_{12}\mathbf{z} = \frac{i}{2}\left(\mathbf{l}^{(1)}z_2 + \mathbf{l}^{(2)}z_1\right) \tag{70}$$

и (30) и (53). Целесообразно ввести обозначение

$$b_{ik}^{(lm)} = \frac{1}{2}\left(l_i^{(l)}l_k^{(m)} + l_i^{(m)}l_k^{(l)}\right). \tag{71}$$

Проделав такую же процедуру, как в случае L_{ik}, мы получим из (68)

$$\frac{da}{d\beta_{12}} = b_{11}^{(12)} - b_{22}^{(12)}, \tag{72}$$

$$\frac{d\lambda}{d\beta_{12}} = -\left(b_{11}^{(12)} + b_{22}^{(12)}\right) - 2b_{12}^{(12)}\frac{1}{\sin a}. \tag{73}$$

Уравнения (69) и (70) приводят к выражениям

$$\frac{d\Omega_1}{d\beta_{12}} = -b_{23}^{(12)} \operatorname{tg} a - b_{13}^{(12)} \frac{1}{\cos a}, \tag{74}$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\beta_{12}} = -b_{23}^{(12)} \frac{1}{\cos a} - b_{13}^{(12)} \operatorname{tg} a, \tag{75}$$

$$\frac{d\Omega_3}{d\beta_{12}} = -b_{12}^{(12)} \operatorname{ctg} a. \tag{76}$$

Таким образом B_{12} может быть написано в форме

$$B_{12} = \left(b_{11}^{(12)} - b_{22}^{(12)}\right) \frac{\partial}{\partial a} - \left(b_{11}^{(12)} + b_{22}^{(12)}\right) \frac{\partial}{\partial \lambda} - 2b_{12}^{(12)} \left(\frac{1}{\sin a} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} a \frac{\partial}{\partial \Omega_3}\right) - \\ - \left(b_{13}^{(12)} \frac{1}{\cos a} + b_{23}^{(12)} \operatorname{tg} a\right) \frac{\partial}{\partial \Omega_1} - \left(b_{13}^{(12)} \operatorname{tg} a + b_{23}^{(12)} \frac{1}{\cos a}\right) \frac{\partial}{\partial \Omega_2}. \tag{77}$$

Общее же выражение генератора B_{ik} группы деформаций треугольника будет иметь вид

$$B_{ik} = \left(b_{11}^{(ik)} - b_{22}^{(ik)}\right) \frac{\partial}{\partial a} - \left(b_{11}^{(ik)} + b_{22}^{(ik)}\right) \frac{\partial}{\partial \lambda} - 2b_{12}^{(ik)} \left(\frac{1}{\sin a} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} a \frac{\partial}{\partial \Omega_3}\right) - \\ - b_{13}^{(ik)} \left(\operatorname{tg} a \frac{\partial}{\partial \Omega_2} + \frac{1}{\cos a} \frac{\partial}{\partial \Omega_1}\right) - b_{23}^{(ik)} \left(\operatorname{tg} a \frac{\partial}{\partial \Omega_1} + \frac{1}{\cos a} \frac{\partial}{\partial \Omega_2}\right). \tag{78}$$

Если действовать в пространстве полиномов, составленных только из z (без z^*), то возникает следующее равенство:

$$ie^{ia} \frac{\partial}{\partial \Omega_1} = \frac{\partial}{\partial \Omega_2}. \tag{79}$$

Следовательно, в пространстве полиномов z B_{ik} принимает вид

$$B_{ik} = \left(b_{11}^{(ik)} - b_{22}^{(ik)}\right) \frac{\partial}{\partial a} - \left(b_{11}^{(ik)} + b_{22}^{(ik)}\right) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2\frac{\partial}{\partial \lambda} \delta_{ik} - \\ - 2b_{12}^{(ik)} \left(\frac{1}{\sin a} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} a \frac{\partial}{\partial \Omega_3}\right) - ib_{23}^{(ik)} \frac{\partial}{\partial \Omega_1} + ib_{13}^{(ik)} \frac{\partial}{\partial \Omega_2}. \tag{80}$$

Для полноты приводим еще перестановочные соотношения

$$[B_{ik}, B_{jl}] = \frac{i}{2} \left(L_{il}\delta_{kj} - L_{jk}\delta_{il}\right) + \frac{i}{2} \left(L_{ij}\delta_{kl} - L_{lk}\delta_{ij}\right), \tag{81}$$

$$[B_{ik}, L_{jl}] = \frac{i}{2} \left(B_{il}\delta_{kj} - B_{jk}\delta_{il}\right) - \frac{i}{2} \left(B_{ij}\delta_{kl} - B_{lk}\delta_{ij}\right). \tag{82}$$

В частности,

$$[B_{12}, B_{11}] = -iL_{12}, \quad [B_{12}, B_{22}] = iL_{12}, \quad [B_{11}, L_{12}] = iB_{12},$$

$$[B_{22}, L_{12}] = -iB_{12}, \quad [B_{12}, L_{12}] = -\frac{i}{2} (B_{11} - B_{22}).$$

Отсюда ясно, что операторы L_{12}, B_{12} и $1/2(B_{11} - B_{22})$ образуют подгруппу $SU(2)$.

6. Оператор третьего порядка Ω

Нам остается написать лишь оператор Ω. Если ввести два оператора H_+ и H_-, которые суть не что иное, как операторы повышения и понижения $SU(2)$ при значении угла Эйлера — $2\Omega_3 = 2\varphi_1 = 0$

$$H_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{1}{\sin a}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{i}{2}\operatorname{ctg} a\frac{\partial}{\partial \Omega_3}\right], \tag{83}$$

$$H_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial}{\partial a} - i\frac{1}{\sin a}\frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{i}{2}\operatorname{ctg} a\frac{\partial}{\partial \Omega_3}\right], \tag{84}$$

то оператор Ω можно представить в виде

$$\Omega=\sum_{i,j,k} L_{ij}L_{jk}B_{ki} = -\frac{1}{4}\left\{\sqrt{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega_+^2}H_+ + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_-^2}H_-\right) + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_3^2}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \right.$$
$$\left. +\Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{1}{\cos a}\left(\Delta_\theta - \frac{\partial^2}{\partial\Omega_3^2} + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\Omega_3} + \operatorname{tg} a\left[i\left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega_+^2} - \frac{\partial^2}{\partial\Omega_-^2}\right)\frac{\partial}{\partial\Omega^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega_+^2} + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_-^2}\right)\right]\right\}. \tag{85}$$

Оператор Ω имеет простой смысл в классическом приближении. Заменяя производные на скорости и обозначая $\xi = p$ и $\eta = q$, получим

$$\frac{1}{2}\Omega = (\xi L)(qL) - (\eta L)(pL). \tag{86}$$

Очевидно, что производная этого оператора по времени равна нулю. Если направить ось z по L, и ввести два двухмерных вектора в пространстве перестановок

$$\mathbf{x} = (\xi_z, \eta_z) \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = (p_z, q_z), \tag{87}$$

то (86) можно записать как

$$\frac{1}{2}\Omega = (x \times y)_3. \tag{88}$$

Оператор имеет вид третьей компоненты момента количества движения в пространстве перестановок. Таким образом становится наглядной симметрия задачи — сферическая в координатном пространстве и аксиальная в пространстве перестановок.

Собственные значения этого оператора не нужны при малых K и ν, когда степень вырождения невелика. Действительно, при заданных K и ν число состояний определяется обычной формулой $SU(3)$

$$n(K,\nu) = \frac{1}{8}(K+2)(K+2-2\nu)(K+2+2\nu). \tag{89}$$

Если просуммировать эту формулу по 2ν от $-K$ до K, то получим известную формулу [9]

$$n(K) = \frac{(K+3)(K+2)^2(K+1)}{12}. \tag{90}$$

Максимальные вырождения имеют термы с $\nu = 0$ для четных K или с $\nu = 1/2$ для нечетных K.

$$n(K,0) = \begin{cases} \frac{1}{8}(K+2)^3, & K \text{ — четное,} \\ \frac{1}{8}(K+1)(K+2)(K+3), & K \text{ — нечетное.} \end{cases} \tag{91}$$

С другой стороны, при заданном K имеется $(K+1)^2$ термов с различными L и M, так как $L \in (0, K)$, а $M \in (-L, L)$. Так как $n(K, 0) > (K+1)^2$ для $K \geqslant 4$, то только для таких K необходимо дополнительное квантовое число.

7. Собственные функции

Из того, что сказано выше, следует, что собственные функции задачи надо искать в виде[3]:

$$\Phi_M^L = \sum_{\Lambda} \sum_{M'=-\Lambda}^{\Lambda} a(\Lambda, M')\, D_{\nu, M'}^{\Lambda}(\lambda, a, 0)\, D_{2M', M}^{L}(\varphi_1, \theta, \varphi_2). \tag{92}$$

Нетрудно понять смысл такого выбора решений. Вторую D-функцию — собственную функцию L^2 и L_3 — мы можем рассматривать как собственную функцию вращающегося жесткого волчка с проекцией углового момента на подвижную ось, равной $2M'$. Так как эта проекция в нашем случае не сохраняется, то мы должны взять сумму по разным значениям M'. Здесь нам и понадобится дополнительный оператор для ортогонализации. Как уже было сказано, в качестве этого оператора мы выбрали Ω. Таким образом, получен базис, который определяется операторами Δ_a, N, L^2, L_3 и Ω. Коэффициенты $a(\Lambda, M')$ находятся из решений уравнений для собственных значений. К сожалению нам не удалось получить для них общих формул. Некоторые их свойства будут рассмотрены в другой работе.

Наконец, рассмотрим два частных случая решения уравнения Лапласа. Как показал еще Драгт [11], в случае представлений $SU(3)$ с $L = 0, 1$ оператор Ω не нужен. В самом деле, для $L = 0$ лапласиан приобретает вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2 \operatorname{ctg} 2a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\sin^2 a} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}. \tag{93}$$

Ясно, что его собственной функцией будет

$$\Phi_0 = D_{\nu, 0}^{\Lambda}(\lambda, a, 0), \tag{94}$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Phi_0 = -\Lambda(\Lambda+1)\Phi_0, \quad \Lambda = 0, 1 \ldots . \tag{95}$$

Это решение показывает $SU(2)$-природу невращающегося треугольника.

В случае $L = 1$ решения пишутся в виде

$$z_M = \sum_{M'=\pm 1/2} D_{1/2, M'}^{1/2}(\lambda, a, 0)\, D_{2M', M}^{1}(\varphi_1, \theta, \varphi_2), \tag{96}$$

$$z_M^* = D_{-1/2 -1/2}^{1/2}(\lambda, a, 0)\, D_{-1, M}^{1}(\varphi_1 \theta \varphi_2) - D_{-1/2, 1/2}^{1/2}(\lambda, a, 0)\, D_{1, M}^{1}(\varphi_1 \theta \varphi_2)$$

и соответствуют уравнению Лапласа со значением $K = 1$. Одновременно z_M удовлетворяет уравнениям

$$L^2 z_M = -2 z_M, \quad L_3 z_M = -M z_M, \quad M = -1, 0, 1, \tag{97}$$

$$\Delta_a z_M = -\frac{3}{4} z_M, \quad N z_M = \frac{1}{2} z_M, \tag{98}$$

$$\Omega z_M = -\frac{3}{4} i z_M \tag{99}$$

[3] Такая же форма решения дана в недавней работе [10].

и соответственно z^* удовлетворяет

$$L^2 z_M^* = -2z_M^*, \quad L_3 z_M^* = -M z_M^*, \quad \Delta_\alpha z_M^* = -\frac{3}{4} z_M^*,$$
$$N z_M^* = -\frac{1}{2} z_M^*, \quad \Omega z_M^* = \frac{3}{4} i z_M^*. \tag{100}$$

В заключение авторы выражают благодарность Е. Л. Суркову, В. Пустовалову, Ю. Симонову и М. Хусару за обсуждения.

Литература

1. *Бадалян А. М., Симонов Ю. А.* ЯФ, **3**, 6, 1966.
2. *Симонов Ю. А.* ЯФ, **3**, 630, 1966.
3. *Zickendraht W.* Ann. of Phys., **35**, 18, 1965.
4. *Lévy-Leblond Jean-Marc, Lévy-Nahas Monique.* J. Math. Phys. **6**, 1571, 1965.
5. *Smith F. T.* Phys. Rev., **120**, 1058, 1960.
6. *Racah G.* Rev. Mod. Phys., **21**, 494, 1949.
7. *Сурков Е. Л.* ЯФ, **5**, 908, 1967.
8. *Филиппов Г. Ф.* Препринт ИТФ-67–49, Киев, 1968.
9. *Пустовалов В. А., Симонов Ю. А.* ЖЭТФ, **51**, 345, 1966.
10. *Whitten R. C., Smith F. T.* J. Math. Phys., **9**, 1103, 1968.
11. *Dragt A. J.* J. Math., Phys., **6**, 533, 1965.

Собственные функции в задаче трех тел

Ю. Нири*, Я. А. Смородинский

1. Введение

Исследования систем трех тел в ядерной физике привели к построению базисных функций в виде так называемых K-полиномов, т. е. гармонических полиномов в шестимерном пространстве [1]. Чтобы построить аппарат для работы с такими функциями, которые представляли бы собой естественное обобщение обычных сферических функций (заданных на двумерной сфере), необходимо найти полную систему решений уравнения Лапласа на пятимерной сфере. Для этой цели в работах [2, 3] был разработан метод вычисления генераторов группы движения на пятимерной сфере и построена полная система соответствующих коммутирующих операторов.

Несколько неожиданная сложность задачи связана с тем, что функции одновременно реализуют представления группы перестановок трех частиц и являются собственными функциями оператора момента количества движения. Естественно, что если не требовать от собственных функций симметрии относительно перестановок, то решение задачи становится вполне элементарным. В этом случае оно может быть построено проще всего, если воспользоваться методом «деревьев» [4]. Полученные таким способом собственные функции (базисные функции задачи) будут характеризоваться пятью квантовыми числами:

$$K,\ j_1,\ M_1,\ j_2,\ M_2, \tag{1}$$

где K — общая степень полинома, j_1, M_1; j_2, M_2 — моменты количества движения и их проекции, соответствующие двум координатам ξ и η. Вместо j_1 и j_2, естественно, можно ввести суммарный момент J.

Задача, которой были посвящены работы [2, 3], состояла в построении системы функций, обладающих определенной симметрией относительно перестановок. Эта система характеризовалась бы соответственно квантовыми числами

$$K,\ J,\ M,\ \nu,\ \Omega, \tag{2}$$

из которых два последних не совпадают с квантовыми числами «деревьев». Смысл этих квантовых чисел был обсужден в [3], и на этом мы сейчас останавливаться не будем. В работе [3] задача построения такой системы функций не была доведена до конца. Было только показано, что общее решение имеет вид

$$\Phi^J_{M,\nu} = \sum_{\Lambda, M'} a_\nu(\Lambda, M') D^\Lambda_{\nu, M'}(\lambda, a, 0) D^J_{2M', M}(\varphi_1, \theta, \varphi_2). \tag{3}$$

Смысл переменных будет объяснен ниже, а коэффициенты $a_\nu(\Lambda, M')$ должны были бы быть определены так, чтобы функция (3) удовлетворяла уравнению Лапласа на пятимерной сфере и уравнению для собственных значений оператора Ω. Хотя система уравнений достаточно проста, чтобы решить ее в любом конкретном случае, решение в общем виде нам построить не удалось.

---

* ЦИФИ, Будапешт.

В данной работе мы используем другой, обходной путь. Мы попытаемся найти способ перехода от полной системы функций, построенных методом «деревьев», к K-гармоникам. При таком подходе к решению задачи функции «дерева» будут сначала преобразованы к системе с заданным полным моментом, т. е. к системе с квантовыми числами

$$K,\ J,\ M,\ j_1,\ j_2. \tag{4}$$

После этого мы совершим переход к квантовым числам

$$K,\ J,\ M,\ \nu,\ (j_1 j_2), \tag{5}$$

для чего, как мы увидим, надо будет произвести простое преобразование Фурье. На самом деле пара $(j_1 j_2)$ не является настоящим квантовым числом (в том смысле, что функции с разными парами $(j_1 j_2)$ не образуют ортонормированной системы), а лишь указывает на генеалогию функций (т. е. откуда они были вычислены). Подчеркнем, что j_1 и j_2 перестали быть собственными значениями после того, как мы перешли к компоненте Фурье.

Чтобы довести задачу до конца, нам останется составить сумму

$$C_{(j_1 j_2)} \Psi^{(j_1 j_2)}_{KJM}, \tag{6}$$

где $(j_1 j_2)$ пробегают все пары значений моментов, из которых можно составить полный момент $J \leqslant j_1 + j_2 \leqslant K$.

В настоящей работе мы покажем, как построить систему функций (5). До сих пор мы не смогли найти систему собственных функций оператора Ω в замкнутом виде. В работе [5] был дан алгоритм для вычисления таких функций в виде рядов. Однако с увеличением собственного значения возрастает степень соответствующего уравнения, и, таким образом, вопрос о получении решения в общей форме остается открытым. Так как нас, в конце концов, интересует построение полной ортонормированной системы функций, то нам придется в следующей работе еще раз вернуться к обсуждению свойств Ω.

Вычисления в настоящей работе проводились с целью привести функции «деревьев» к такому виду, для которого преобразование Фурье делается наиболее простым. Итак, с формальной точки зрения мы здесь покажем, как следует вычислять преобразование Фурье от функции «деревьев».

2. Координаты. Параметризация

Напомним определение координат, использованных в [3]. На три радиус-вектора частиц $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ накладывается условие

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0. \tag{7}$$

Вводятся координаты Якоби $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ (для равных масс):

$$\boldsymbol{\xi} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \quad \boldsymbol{\eta} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\xi}^2 + \boldsymbol{\eta}^2 = \rho^2,$$

где ρ — радиус пятимерной сферы, который для простоты положим равным единице. В дальнейшем будет удобно ввести комплексный вектор

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}, \qquad \mathbf{z}^* = \boldsymbol{\xi} - i\boldsymbol{\eta}. \tag{9}$$

Рассмотрим треугольник, в вершинах которого находятся три частицы. Положение этого треугольника в пространстве определяется комплексными векторами $\mathbf{l}_+$ и $\mathbf{l}_-$, которые вместе с третьим вектором $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}_+ \times \mathbf{l}_-$ образуют подвижную систему координат. Они удовлетворяют обычным условиям

$$l_+^2 = l_-^2 = 0, \quad \mathbf{l}_+\mathbf{l}_- = 1. \tag{10}$$

Векторы $\mathbf{l}_+$ и $\mathbf{l}_-$ связаны с $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= e^{-i\lambda/2}\left(\cos\frac{a}{2}\mathbf{l}_+ + i\sin\frac{a}{2}\mathbf{l}_-\right), \\ \mathbf{z}^* &= e^{i\lambda/2}\left(\cos\frac{a}{2}\mathbf{l}_- - i\sin\frac{a}{2}\mathbf{l}_+\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь λ и a определяют форму треугольника с точностью до преобразования подобия (рассмотрение которого мы исключаем, положив длину 6-вектора $\rho = \text{const}$). Кроме этого, как было показано в работе [3], переменная a определяет отношение моментов инерции треугольника.

В дальнейшем окажется удобным вернуться к $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ и связать их с координатами $\mathbf{l}_+$ и $\mathbf{l}_-$:

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}(u\mathbf{l}_+ + u^*\mathbf{l}_-), \quad \boldsymbol{\eta} = -\frac{i}{2}(v\mathbf{l}_+ - v^*\mathbf{l}_-). \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned} u &= e^{-i\lambda/2}\cos\frac{a}{2} - ie^{i\lambda/2}\sin\frac{a}{2}, & u^* &= e^{i\lambda/2}\cos\frac{a}{2} + ie^{-i\lambda/2}\sin\frac{a}{2}, \\ v &= e^{-i\lambda/2}\cos\frac{a}{2} + ie^{i\lambda/2}\sin\frac{a}{2}, & v^* &= e^{i\lambda/2}\cos\frac{a}{2} - ie^{-i\lambda/2}\sin\frac{a}{2}. \end{aligned} \tag{13}$$

В этих формулах явным образом отделены углы Эйлера, определяющие положение треугольника, и координаты, определяющие его деформацию[1]. Заметим, что эти выражения не сводятся к произведению функций от углов Эйлера на функции координат, связанных с деформациями (а есть сумма произведений таких функций), что в конечном счете отражает связь деформации с вращением. Смысл введенных координат становится ясным, если написать выражение для $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ в виде

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\frac{1}{2}uu^*\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\psi_1}\mathbf{l}_+ + e^{-i\psi_1}\mathbf{l}_-\right), \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\frac{1}{2}vv^*\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\psi_2}\mathbf{l}_+ + e^{-i\psi_2}\mathbf{l}_-\right). \tag{15}$$

Здесь мы ввели фазы ψ_1 и ψ:

$$u = \rho_1 e^{i\psi_1}, \quad v = \rho_2 e^{i\psi}, \tag{16}$$

откуда

$$\frac{u}{u^*} = e^{2i\psi_1}, \quad \frac{v}{v^*} = e^{2i\psi}. \tag{17}$$

[1] Обратим внимание на интересную связь переменных u, v, u^* и v^* со спинорами. Рассмотрим выражение $\xi^2 + \eta^2 = 1 = \frac{1}{2}(uu^* + vv^*)$. Если ввести два спинора $\alpha = \begin{pmatrix} u^* \\ v \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -v^* \\ u \end{pmatrix}$, то оно переписывается как произведение двух спиноров $\xi^2 + \eta^2 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$.

Наконец,

$$\psi_2 = \psi - \frac{\pi}{2},$$

а угол

$$\Theta = \psi_1 - \psi_2 \tag{18}$$

есть угол между векторами $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$:

$$\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} = |\boldsymbol{\xi}||\boldsymbol{\eta}|\cos\Theta. \tag{19}$$

Используя соотношения

$$\xi^2 = \frac{1}{2}uu^*, \quad \eta^2 = \frac{1}{2}vv^*, \tag{20}$$

можем выразить угол Θ через наши переменные:

$$\cos\Theta = \frac{\cos\lambda\sin a}{\sqrt{1-\sin^2\lambda\sin^2 a}}. \tag{21}$$

Иррациональная связь между углом Θ и углами a и λ и заставляет нас искать обходные пути для преобразования Фурье.

Введем единичные векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$, определенные как

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}, \quad \mathbf{m} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}. \tag{22}$$

Исходя из (14) и (15) ясно, что

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\psi_1}\mathbf{l}_+ + e^{-i\psi_1}\mathbf{l}_-\right), \tag{23}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\psi_2}\mathbf{l}_+ - e^{-i\psi_2}\mathbf{l}_-\right). \tag{24}$$

Эти выражения целесообразно переписать в форме

$$\mathbf{n} = D^1_{01}\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)\left(e^{i\psi_1}\mathbf{l}_+ + e^{-i\psi_1}\mathbf{l}_-\right), \tag{25}$$

$$\mathbf{m} = D^1_{01}\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)\left(e^{i\psi_2}\mathbf{l}_+ + e^{-i\psi_2}\mathbf{l}_-\right) \tag{26}$$

или, для компонент $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$,

$$n^{(M_1)} = \sum_{\mu_1} D^1_{0\mu_1}\left(0, -\frac{\pi}{2}, \psi_1\right) D^1_{\mu_1 M_1}(\mathbf{l}_+\mathbf{l}_-), \tag{27}$$

$$m^{(M_2)} = \sum_{\mu_2} D^1_{0\mu_2}\left(0, -\frac{\pi}{2}, \psi_2\right) D^1_{\mu_2 M_2}(\mathbf{l}_+\mathbf{l}_-). \tag{28}$$

Напомним, что компоненты $\mathbf{l}_+$ и $\mathbf{l}_-$ можно выразить с помощью D-функций Вигнера

$$D^1_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = l^{(n)}_m. \tag{29}$$

На самом деле $D(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \equiv D(\mathbf{l}_+\mathbf{l}_-)$, и мы ввели это несколько необычное обозначение для того, чтобы показать, что углы Эйлера определяют положение триэдра, заданного единичными векторами $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$. Выражение (27) в действительности описывает поворот, при котором триэдр $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$ переходит в триэдр, составленный

из единичного вектора $\mathbf{n}$ и из каких-то двух перпендикулярных векторов $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ (их более точное определение для нас несущественно). При этом повороте вектор $\mathbf{n}$ оказывается лежащим в плоскости $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$. Аналогично формула (28) есть описание поворота к триэдру, определенному единичными векторами $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$. Формулы (27) и (28) таким образом можно рассматривать как формулы для преобразования полиномов Лежандра первого порядка (именно векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$), и они могут быть естественно обобщены на произвольные полиномы. Так, для полинома, составленного из единичного вектора $\mathbf{n}$, можно получить следующее выражение:

$$D^{j_1}_{0M_1}(\mathbf{n}) = \sum_{\mu_1=-j_1}^{j_1} D^{j_1}_{0\mu_1}\left(0, \frac{\pi}{2}, -\psi_1\right) D^{j_1}_{\mu_1 M_1}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \tag{30}$$

и, соответственно, для полинома из $\mathbf{m}$:

$$D^{j_2}_{0M_2}(\mathbf{m}) = \sum_{\mu_2=-j_2}^{j_2} D^{j_2}_{0\mu_2}\left(0, \frac{\pi}{2}, -\psi_2\right) D^{j_2}_{\mu_2 M_2}(\varphi_1, \theta, \varphi_2). \tag{31}$$

Эти формулы можно преобразовать к такому виду, в котором $D^{j_1}_{0\mu_1}$ и $D^{j_2}_{0\mu_2}$ являются функциями одних и тех же аргументов:

$$D^{j_1}_{0M_1}(\mathbf{n}) = \sum_{\mu_1} \exp\left[i\mu_1 \frac{(\psi_1-\psi_2)}{2}\right] D^{j_1}_{0\mu_1}\left(0, \frac{\pi}{2}, -\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\right) D^{j_1}_{\mu_1 M_1}(\varphi_1, \theta, \varphi_2), \tag{32}$$

$$D^{j_2}_{0M_2}(\mathbf{m}) = \sum_{\mu_2} \exp\left[-i\mu_2 \frac{(\psi_1-\psi_2)}{2}\right] D^{j_2}_{0\mu_2}\left(0, \frac{\pi}{2}, -\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\right) D^{j_2}_{\mu_2 M_2}(\varphi_1, \theta, \varphi_2). \tag{33}$$

Для задачи трех тел нам надо ввести еще одно ограничение. Так как задача имеет определенную симметрию относительно отражения по отношению к подвижной плоскости, образуемой векторами $\mathbf{l}_+$ и $\mathbf{l}_-$, то μ_1 и μ_2 должны принимать либо только четные, либо только нечетные значения. (Например, в суммах (27) и (28) может быть только $\mu_{1,2} = \pm 1$.)

Введенное нами разнообразие параметров и координат и проделанные преобразования пока могут казаться лишними; например, u, v, u^* и v^* выделены несколько искусственно. В действительности в дальнейшем будет ясно, что именно они упростят наши вычисления коэффициентов Фурье от полиномов.

3. Случай $J = 0$

Для состояний с полным моментом количества движения $J = 0$ решение может быть получено просто. Из уравнения работы [3] для этого случая мы получили решение в виде

$$D^{K/4}_{\nu/2,-\nu/2}(2\lambda, 2a, 0). \tag{34}$$

Порядок D-функции $K/4$ отвечает степени полинома, равной K, так как степень полинома определяется по тригонометрическим функциям от аргумента $a/2$, и таким образом каждая тригонометрическая функция от $2a$ увеличивает степень на четыре единицы.

Структуру формулы (34) можно понять и не обращаясь к уравнению. Для этого заметим, что полином при $J = 0$ не может содержать векторов $\mathbf{l}_+$ и $\mathbf{l}_-$, а поэтому

должен быть функцией от z^2 и z^{*2}. Мы знаем, что

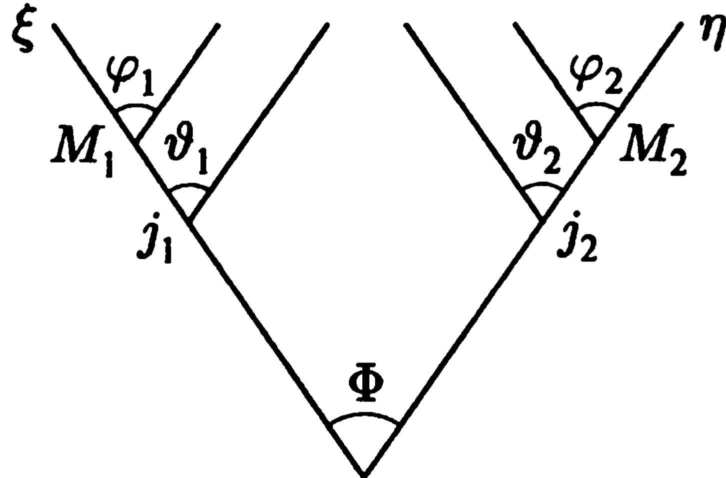
$$z^2 = i \sin a e^{-i\lambda}, \quad z^{*2} = -i \sin a e^{i\lambda}. \tag{35}$$

Обращаясь к таблицам D-функций, мы сразу увидим, что

$$z^2 = D^{1/2}_{-1/2,1/2}(2\lambda, 2a, 0), \quad z^{*2} = -D^{1/2}_{1/2,-1/2}(2\lambda, 2a, 0) \tag{36}$$

и что сумма нижних индексов у каждой из D-функций равна нулю. Естественно, что при построении гармонических полиномов из функции (36) это свойство сохраняется и для D-функций высших порядков. Это замечание и приводит нас к (34). Итак, специфической чертой нашей задачи оказывается отсутствие в базисе диагональных элементов

$$D^{1/2}_{1/2,1/2}, \quad D^{1/2}_{-1/2,-1/2}. \tag{37}$$



Возникает интересная задача о разложении функции (34) по функциям «деревьев», т. е. по функциям с заданными парными угловыми моментами; состояние системы при $J = 0$ описывается как вращение векторов $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ в противоположные стороны с разными моментами. Эта задача приводит к связи с теорией коэффициентов Клебша—Гордана, которая будет обсуждена в другой статье.

Относя вывод в Приложение, отметим здесь, что амплитуды состояния с моментами $j_1 = j_2 = j$ оказываются пропорциональными коэффициенту Вигнера[2)]

$$\begin{pmatrix} K/4 & K/4 & j \\ \nu/2 & -\nu/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Разложения по парным угловым моментам в случае $J \neq 0$ также должны приводить к различным коэффициентам векторного сложения. Этот вопрос заслуживает отдельного рассмотрения.

4. Функции «деревьев»

Решение уравнения Лапласа на пятимерной сфере можно написать в системе координат, отвечающей «дереву» (см. рисунок). В этот системе полагаем

$$\boldsymbol{\xi} = \cos\Phi\mathbf{n}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \sin\Phi\mathbf{m}, \tag{39}$$

учитывая, что $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Собственная функция, соответствующая этому «дереву», составляется следующим образом [4]. Узлу n (где $2n = K - j_1 - j_2$) сопоставляется функция

$$(\cos\Phi)^{j_1}(\sin\Phi)^{j_2}P_n^{(j_1+1/2, j_2+1/2)}(\cos 2\Phi). \tag{40}$$

В силу (39)

$$\cos^2\Phi = \xi^2, \quad \sin^2\Phi = \eta^2,$$

[2)] Эта формула была получена совместно с В. Эфросом. После окончания работы нам стала известна работа Виттена [6], в которой дано разложение двухчастичных потенциалов по функциям с $J = 0$.

поэтому выражение (40) можно переписать в виде

$$\xi^{j_1}\eta^{j_2}P^{(j_1+1/2,j_2+1/2)}_{(K-j_1-j_2)/2}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \tag{41}$$

где

$$P^{(j_1+1/2,j_2+1/2)}_{(K-j_1-j_2)/2}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n+j_1+1/2}{m}\binom{n+j_2+1/2}{n-m}(\xi^2)^m(\eta^2)^{n-m}(-1)^{n-m}. \tag{42}$$

«Веткам» $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$, которые характеризуются узлами j_1M_1 и j_2M_2, сопоставляются соответственно функции

$$\begin{aligned} P_{j_1M_1}(\mathbf{n}) &= P^{M_1}_{j_1}(\vartheta_1)e^{-iM_1\varphi_1},\\ P_{j_2M_2}(\mathbf{m}) &= P^{M_2}_{j_2}(\vartheta_2)e^{-iM_2\varphi_2}. \end{aligned} \tag{43}$$

Перемножив функции (42) и (43), приходим к собственной функции, соответствующей «дереву» в целом

$$\Phi(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = P_{J,M}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})P^{(j_1+1/2,j_2+1/2)}_{(K-j_1-j_2)/2}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}), \tag{44}$$

где

$$P_{J_1M}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = P_{j_1M_1}(\boldsymbol{\xi})P_{j_2M_2}(\boldsymbol{\eta}), \tag{45}$$

$$P_{j_1M_1}(\boldsymbol{\xi}) = \xi^{j_1}P_{j_1M_1}(\mathbf{n}), \tag{46}$$

$$P_{j_2M_2}(\boldsymbol{\eta}) = \eta^{j_2}P_{j_2M_2}(\mathbf{m}). \tag{47}$$

Используя соотношения (17) и (20), мы перейдем к переменным u, v, u^* и v^* и напишем выражения (46) и (47) в виде

$$P_{j_1M_1}(\xi) = i^{M_1}\left[\frac{(j_1+M_1)!}{(j_1-M_1)!}\right]^{1/2}\sum_{\mu_1}\frac{1}{2^{j_1}}u^{(j_1+\mu_1)/2}(u^*)^{(j_1-\mu_1)/2}\Delta^{(j_1)}_{0\mu_1}D^{j_1}_{\mu_1M_1}(\varphi_1,\theta,\varphi_2), \tag{48}$$

$$P_{j_2M_2}(\eta) = i^{M_2}\left[\frac{(j_2+M_2)!}{(j_2-M_2)!}\right]^{1/2}\sum_{\mu_2}\frac{(-i)^{\mu_2}}{2^{-j_2}}v^{(j_2+\mu_2)/2}(v^*)^{(j_2-\mu_2)/2}\Delta^{(j_2)}_{0\mu_2}D^{j_2}_{\mu_2M_2}(\varphi_1,\theta,\varphi_2). \tag{49}$$

Здесь использовано обозначение [7]:

$$\Delta^{(m)}_{kl} = D^m_{kl}\left(0,\frac{\pi}{2},0\right) = P^m_{kl}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right). \tag{50}$$

Разложив произведение $D^{j_1}_{\mu_1M_1}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)D^{j_2}_{\mu_2M_2}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ по функциям $D^j_{\mu M}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ (где $M = M_1+M_2$, $\mu = \mu_1+\mu_2$) и выделяя из суммы один член с определенным J (где $|j_1-j_2| \leqslant J \leqslant j_1+j_2$), получаем

$$P_{J,M}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = i^M\left[\frac{(j_1+M_1)!(j_2+M_2)!}{(j_1-M_1)!(j_2-M_2)!}\right]^{1/2}(j_1j_2,00|J0)(j_1j_2,M_1M_2|JM)\times$$

$$\times\sum_{\mu_1,\mu_2}\frac{(-i)^{\mu^2}}{2^{j_1+j_2}}(u^*)^{(j_1-\mu_1)/2}v^{(j_2+\mu_2)/2}u^{(j_1+\mu_1)/2}(v^*)^{(j_2-\mu_2)/2}(j_1j_2,\mu_1\mu_2|J\mu)^2\Delta^{(J)}_{0\mu}D^J_{\mu M}(\varphi_1,\theta,\varphi_2). \tag{51}$$

С помощью (17) и (20) можно выражение (42) переписать в форме

$$P^{(j_1+1/2,\,j_2+1/2)}_{(K-j_1-j_2)/2}(\xi,\eta)=\sum_m\frac{1}{2^n}\binom{n+j_1+1/2}{m}\binom{n+j_2+1/2}{n-m}\times$$

$$\times(-1)^{n-m}(uu^*)^m(vv^*)^{n-m}. \qquad (52)$$

Подставив в соотношение (44) формулы (51) и (52), мы приходим к следующему выражению для собственной функции $\Phi(\xi,\eta)$:

$$\Phi(\xi,\eta)=A'_{JM}\sum_m\sum_{\mu_1\mu_2}\frac{(-i)^{\mu_2}}{2^{j_1+j_2+n}}(-1)^{n-m}(j_1j_2,\mu_1\mu_2|J\mu)^2\Delta^{(J)}_{0\mu}\binom{n+j_1+\frac{1}{2}}{m}\times$$

$$\times\binom{n+j_2+\frac{1}{2}}{n-m}(u^*)^{\frac{j_1-\mu_1}{2}+m}v^{\frac{j_2+\mu_2}{2}+n-m}u^{\frac{j_1+\mu_1}{2}+m}(u^*)^{\frac{j_2-\mu_2}{2}+n-m}D^J_{\mu M}(\varphi_1,\theta,\varphi_2), \qquad (53)$$

где

$$A'_{JM}=(-1)^{M/2}\left[\frac{(j_1+M_1)!(j_2+M_2)!}{(j_1-M_1)!(j_2-M_2)!}\right]^{1/2}\quad(j_1j_2,00|J0)(j_1j_2,M_1M_2|JM).$$

Как мы уже отметили раньше, все дальнейшие вычисления нужны для того, чтобы привести функцию $\Phi(\xi,\eta)$ к такому виду, для которого преобразование Фурье сделается сравнительно простым.

Воспользуемся формулами, данными в [8]:

$$\frac{1}{\sqrt{(j-k)!(j+k)!}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\gamma/2}+i\sin\frac{\alpha}{2}e^{-i\gamma/2}\right)^{j-k}\times$$

$$\times\left(i\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\gamma/2}\cos\frac{\alpha}{2}e^{-i\gamma/2}\right)^{j+k}=\sum_{l=-j}^{j}\frac{P^j_{lk}(\cos\alpha)}{\sqrt{(j-l)!(j+l)!}}e^{-il\gamma}, \qquad (54)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(j-k)!(j+k)!}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}e^{-i\gamma/2}-i\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\gamma/2}\right)^{j-k}\times$$

$$\times\left(-i\sin\frac{\alpha}{2}e^{-i\gamma/2}+\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\gamma/2}\right)^{j+k}=\sum_{l=-j}^{j}\frac{\bar{P}^j_{lk}(\cos\alpha)}{\sqrt{(j-l)!(j+l)!}}e^{il\gamma}. \qquad (55)$$

Если сравнивать эти выражения с формулами (13) для u, u^*, v и v^* и вспомнить, что

$$\bar{P}^j_{lk}(\cos\alpha)=(-1)^{l-k}P^j_{-l-k}(\cos\alpha), \qquad (56)$$

то можем написать

$$(u^*)^{\frac{j_1-\mu_1}{2}+m}v^{\frac{j_2+\mu_2}{2}+n-m}=\left[\left(\frac{j_1-\mu_1}{2}+m\right)!\left(\frac{j_2+\mu_2}{2}+n-m\right)!\right]^{1/2}\times$$

$$\times\sum_{\nu_1=-(K-\delta)/4}^{(K-\delta)/4}P^{(K-\delta)/4}_{\nu_1,\,W+\mu/4}(\cos a)e^{-i\nu_1\lambda}\left[\left(\frac{K-\delta}{4}-\nu_1\right)!\left(\frac{K-\delta}{4}+\nu_1\right)!\right]^{-1/2}_{\cdot}, \qquad (57)$$

$$u^{\frac{j_1+\mu_1}{2}+m}(v^*)^{\frac{j_2-\mu_2}{2}+n-m} = \left[\left(\frac{j_1+\mu_1}{2}+m\right)!\left(\frac{j_2-\mu_2}{2}+n-m\right)!\right]^{1/2} \times$$
$$\times \sum_{\nu_2=-(K+\delta)/4}^{(K+\delta)/4} P^{(K+\delta)/4}_{\nu_2,-W+\mu/4}(\cos a)(-1)^{\nu^2-W+\mu/4}e^{i\nu_2\lambda}\left[\left(\frac{K+\delta}{4}-\nu_2\right)!\left(\frac{K+\delta}{4}+\nu_2\right)!\right]^{-1/2}, \tag{58}$$

где $\delta=\mu_1-\mu_2$, $W=\frac{j_2-j_1}{4}+\frac{n}{2}-m$. Отсюда, разложив $P^{(K-\delta)/4}_{\nu_1,W+\mu/4}(\cos a)P^{(K+\delta)/4}_{-\nu_2,-W+\mu/4}(\cos a)$ по функциям $P^{K/2-\varkappa}_{\nu,\mu/2}(\cos a)$ (где $\nu=\nu_1-\nu_2$), собственную функцию $\Phi(\xi,\eta)$ можно переписать в виде

$$\Phi(\xi,\eta)=A'_{JM}\sum_m\sum_{\mu,\delta}\sum_{\nu,\varepsilon}\sum_{\varkappa}\frac{1}{2^{j_1+j_2+n}}(-1)^{\frac{K-\delta}{4}+\frac{\varepsilon-\nu}{2}+\frac{\mu}{2}-\frac{j_2}{2}}\left(j_1,j_2,\frac{\mu+\delta}{2},\frac{\mu-\delta}{2}\middle|J,\mu\right)^2\times$$
$$\times\left(\frac{K-\delta}{4},\frac{K+\delta}{4},\frac{\nu+\varepsilon}{2},\frac{\nu-\varepsilon}{2}\middle|\frac{K}{2}-\varkappa,\nu\right)\times\left(\frac{K-\delta}{4},\frac{K+\delta}{4},W+\frac{\mu}{4},-W+\frac{\mu}{4}\middle|\frac{K}{2}-\varkappa,\frac{\mu}{2}\right)\times$$
$$\times\Delta^{(J)}_{0\mu}\binom{n+j_1+1/2}{m}\binom{n+j_2+1/2}{n-m}\left[\left(\frac{j_1}{2}-\frac{\mu+\delta}{4}+m\right)!\left(\frac{j_1}{2}+\frac{\mu+\delta}{4}+m\right)!\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{j_2}{2}+\frac{\mu-\delta}{4}+n-m\right)!\left(\frac{j_2}{2}-\frac{\mu-\delta}{4}+n-m\right)!\right]^{1/2}\left[\left(\frac{K-\delta}{4}-\frac{\nu+\varepsilon}{2}\right)!\left(\frac{K-\delta}{4}+\frac{\nu+\varepsilon}{2}\right)!\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{K+\delta}{4}-\frac{\nu-\varepsilon}{2}\right)!\left(\frac{K+\delta}{4}+\frac{\nu-\varepsilon}{2}\right)!\right]^{-1/2}P^{K/2-\varkappa}_{\nu,\mu/2}(\cos a)D^J_{\mu,M}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)e^{-i\nu\lambda}. \tag{59}$$

Используя разные соотношения для коэффициентов Клебша—Гордана, мы можем преобразовать (59) так, чтобы сумма по $\varepsilon=\nu_1+\nu_2$ бралась уже легко, введением

$$P^{(\alpha,\beta)}_k(0)=\frac{1}{2^k}\sum_{m=0}^{k}\binom{k+\alpha}{m}\binom{k+\beta}{k-m}(-1)^{k-m}. \tag{60}$$

Из суммы по ν в дальнейшем рассматриваем только один определенный член. После довольно длинных алгебраических преобразований получаем окончательную формулу

$$\Phi(\xi,\eta)=A_{JM}\sum_m\sum_{\mu,\delta}\sum_{\varkappa}\left(j_1j_2,\frac{\mu+\delta}{2},\frac{\mu-\delta}{2}\middle|J\mu\right)^2\times$$
$$\times\left(\frac{K-\delta}{4},\frac{K+\delta}{4},W+\frac{\mu}{4},-W+\frac{\mu}{4}\middle|\frac{K}{2}-\varkappa,\frac{\mu}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{j_1}{2}+m,\frac{j_2}{2}+n-m,\frac{\mu+\delta}{4},\frac{\mu-\delta}{4}\middle|\frac{K}{2},\frac{\mu}{2}\right)^{-1}\times\frac{(-1)^{\frac{K+\mu-\delta}{4}-\frac{\nu}{4}+\varkappa}}{2^{K/4}}\frac{\Delta^{(J)}_{0\mu}\Delta^{(K/2-\varkappa)}_{\delta/2,\nu}}{\Delta^{(K/2)}_{K/2,\mu/2}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(K-2\varkappa+1)}{(K+\varkappa+1)!\varkappa!}}\binom{n+j_1+1/2}{m}\binom{n+j_2+1/2}{n-m}\times$$
$$\times\sqrt{(j_1+2m)!(j_2+2n-2m)!}\,D^{K/2-\varkappa}_{\nu,\mu/2}(\lambda,a,0)D^J_{\mu,M}(\varphi_1,\theta,\varphi_2), \tag{61}$$

где $A_{JM}=\left[(-1)^{-j_2/2}/2^{(j_1+j_2)/2}\right]A'_{JM}$.

Таким, образом, мы получили выражение для общего решения задачи в форме (3). (В наших обозначениях $M' = \mu/2$, $\Lambda = K/2-\varkappa$.) Из структуры коэффициента при $D^{K/2-\varkappa}_{\nu,\mu/2}(\lambda, a, 0)D^{j}_{\mu,M}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ становится ясно, почему в работе [3] попытки явного определения $a_\nu(\Lambda, M')$ не могли кончиться успехом.

5. Другой путь получения собственной функции $\Phi(\xi, \eta)$

По ходу вычисления явного вида собственной функции задачи мы заметили, что вместо произведения двух D-функций мы можем прийти к другой, по-видимому, более удобной в дальнейшем форме $\Phi(\xi, \eta)$. Мы исходим из выражения (53). Вспомнив явный вид u, v, u^* и v^* (13), мы разложим их по степеням $\sin(a/2)$ и $\cos(a/2)$:

$$
\begin{aligned}
u^A &= \sum_{s=-A/2}^{A/2} \begin{pmatrix} A \\ \dfrac{A+s}{2} \end{pmatrix} \left(\cos\frac{a}{2}\right)^{(A-s)/2} \left(\sin\frac{a}{2}\right)^{(A+s)/2} (-i)^{(A+s)/2} e^{i\lambda s/2},\\
v^B &= \sum_{t=-B/2}^{B/2} \begin{pmatrix} B \\ \dfrac{B+t}{2} \end{pmatrix} \left(\cos\frac{a}{2}\right)^{(B-t)/2} \left(\sin\frac{a}{2}\right)^{(B+t)/2} (i)^{(B+t)/2} e^{i\lambda t/2},\\
u^{*C} &= \sum_{u=-C/2}^{C/2} \begin{pmatrix} C \\ \dfrac{C+u}{2} \end{pmatrix} \left(\cos\frac{a}{2}\right)^{(C+u)/2} \left(\sin\frac{a}{2}\right)^{(C-u)/2} (i)^{(C-u)/2} e^{i\lambda u/2},\\
v*^D &= \sum_{v=-D/2}^{D/2} \begin{pmatrix} D \\ \dfrac{D+v}{2} \end{pmatrix} \left(\cos\frac{a}{2}\right)^{(D+v)/2} \left(\sin\frac{a}{2}\right)^{(D-v)/2} (-i)^{(D-v)/2} e^{i\lambda v/2}.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

С помощью этих соотношений мы тогда можем написать

$$
(u^*)^{\frac{j_1-\mu_1}{2}+m} v^{\frac{j_2+\mu_2}{2}+n-m} u^{\frac{j_1+\mu_1}{2}+m} (v^*)^{\frac{j_2-\mu_2}{2}+n-m} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{s,t,u,v\\ s+t+u+v=-2\nu}} \begin{pmatrix} \dfrac{j_1+\mu_1}{2}+m \\ \dfrac{(j_1+\mu_1)/2+m+s}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{j_2+\mu_2}{2}+n-m \\ \dfrac{(j_2+\mu_2)/2+n-m+t}{2} \end{pmatrix} \times\\
&\quad \times \begin{pmatrix} \dfrac{j_1-\mu_1}{2}+m \\ \dfrac{(j_1-\mu_1)/2+m+u}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{j_2-\mu_2}{2}+n-m \\ \dfrac{(j_2-\mu_2)/2+n-m+v}{2} \end{pmatrix} \times\\
&\quad \times \left(\cos\frac{a}{2}\right)^{\frac{K-s-t+u+v}{2}} \left(\sin\frac{a}{2}\right)^{\frac{K+s+t-u-v}{2}} (i)^{\frac{-\delta-s+t-u+v}{2}} e^{i\left(\frac{s+t+u+v}{2}\right)\lambda}.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Введем $P_k^{(\alpha,\beta)}(0)$ по формуле (60), тогда две суммы легко берутся, и мы имеем

$$
\begin{aligned}
\Phi(\xi, \eta) &= A'_{JM} \sum_m \sum_{\mu,\delta} \frac{(-i)^{(\mu-\delta)/2}}{2^{j_1+j_2+n}} (-1)^{n-m} \left(j_1, j_2, \frac{\mu+\delta}{2}, \frac{\mu-\delta}{2} \,\middle|\, J\mu\right)^2 \times\\
&\times \Delta^{(J)}_{0\mu} \begin{pmatrix} n+j_1+1/2 \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+j_2+1/2 \\ n-m \end{pmatrix} \sum_{\substack{t,u\\ s+t+u+v=-2\nu}} (i)^{-\frac{K}{2}-\frac{\delta}{2}} 2^{\frac{K}{2}} e^{-i\nu\lambda} \times
\end{aligned}
$$

$$\times\left[\left(\frac{j_1}{2}+\frac{\mu+\delta}{4}+m\right)!\left(\frac{j_1}{2}-\frac{\mu+\delta}{4}+m\right)!\left(\frac{j_2}{2}+\frac{\mu-\delta}{4}+n-m\right)!\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{j_2}{2}-\frac{\mu-\delta}{4}+n-m\right)!\right]^{1/2}\left[\left(\frac{K}{4}+\frac{\mu}{4}+\frac{s+t}{2}\right)!\left(\frac{K}{4}+\frac{\mu}{4}-\frac{s+t}{2}\right)!\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{K}{4}-\frac{\mu}{4}+\frac{u+v}{2}\right)!\left(\frac{K}{4}-\frac{\mu}{4}-\frac{u+v}{2}\right)!\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\,\Delta^{\left(\frac{K}{4}+\frac{\mu}{4}\right)}_{-\frac{s+t}{2},\,W-\frac{\delta}{4}}\Delta^{\left(\frac{K}{4}-\frac{\mu}{4}\right)}_{-\frac{u+v}{2},\,-W-\frac{\delta}{4}}\left(\cos\frac{a}{2}\right)^{\frac{K}{2}-\frac{(s+t)-(u+v)}{2}}\left(\sin\frac{a}{2}\right)^{\frac{K}{2}+\frac{(s+t)-(u+v)}{2}}D^J_{\mu M}(\varphi_1,\theta,\varphi_2). \qquad (64)$$

Это выражение можно переписать в следующем виде:

$$\Phi(\xi,\eta)=\sum_{\mu,\delta,\sigma,W}N(K,\nu,j_1,j_2\,|\,\mu,\delta,\sigma,W)\times$$
$$\times(\cos a+1)^{\frac{K}{4}-\frac{\sigma}{4}}(\cos a-1)^{\frac{K}{4}+\frac{\sigma}{4}}D^J_{\mu M}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)e^{-i\nu\lambda}, \qquad (65)$$

где

$$N(K,\nu,j_1,j_2\,|\,\mu,\delta,\sigma,W)=A_{JM}(-1)^{n-m}\left(j_1,j_2,\frac{\mu+\delta}{2},\frac{\mu-\delta}{2}\,\middle|\,J\mu\right)^2\times$$
$$\times\,\Delta^{(J)}_{0\mu}\binom{n+j_1+1/2}{m}\binom{n+j_2+1/2}{n-m}\widetilde{\Delta}^{\left(\frac{K}{4}+\frac{\mu}{4}\right)}_{\frac{\nu}{2}-\frac{\sigma}{4},\,W-\frac{\delta}{4}}\widetilde{\Delta}^{\left(\frac{K}{4}-\frac{\mu}{4}\right)}_{\frac{\nu}{2}+\frac{\sigma}{4},\,-W-\frac{\delta}{4}}. \qquad (66)$$

Мы ввели здесь обозначение $\sigma=s+t-(u+v)$ и

$$\sqrt{\frac{(l-n)!(l+n)!}{(l-m)!(l+m)!}}\,\Delta^{(l)}_{mn}=\widetilde{\Delta}^{(l)}_{mn}. \qquad (67)$$

A_{JM} есть нормировочный множитель, который мы не будем здесь вычислять. Пределы суммирования в (65) даются формулами

$$-K\leqslant\sigma\leqslant K,\qquad -\frac{K-2j_2}{4}\leqslant W\leqslant\frac{K-2j_1}{4}. \qquad (68)$$

Пределы по μ и δ при заданных σ и m определяются обращением в нуль факториалов в знаменателе $\widetilde{\Delta}$.

6. Заключение

Решение задачи о построении базиса для трех свободных частиц, реализующее представление группы вращений трехмерного пространства и группы перестановок, оказалось, несколько неожиданно для авторов, весьма сложным делом. Система уравнений, определяющих собственные функции задачи, получилась очень громоздкой[3], и ее решение пришлось строить обходным путем. При этом удалось построить функции, удовлетворяющие лишь четырем из пяти уравнений, так

[3] Сложность формул объясняется тем, что возникающие полиномы не принадлежат к числу классических и их теория не разработана. Если развитие метода даст полезные результаты, то не представляет большого труда (по крайней мере принципиально) исследовать свойства новых полиномов и сосчитать для них таблицы. Отметим, что переход к большему числу частиц еще больше усложняет формулы; в некотором смысле он подобен переходу от гипергеометрических функций одной переменной к гипергеометрическим функциям многих переменных, теория которых известна также плохо.

что окончательное решение (с квантовым числом Ω) надо находить, подставляя линейную комбинацию решений с разными $(j_1 j_2)$ в уравнение для Ω, выведенное в работе [3]. Следует однако подчеркнуть, что решение последнего, пятого уравнения уже не представляет большого труда в каждом конкретном случае. Для нахождения коэффициентов достаточно сравнить лишь старшие степени $\cos(a/2)$ в полиномах. (Так это и было сделано в [5].) Нам, однако, кажется вероятным, что ортогонализация полиномов может быть проведена более эффективным путем (может быть, даже без использования оператора Ω). Во всяком случае этот вопрос требует еще дополнительного обсуждения.

Кроме этого, в продолжении нашей работы будет необходимо обобщить метод разложения функций по состояниям с заданными парными угловыми моментами (см. Приложение) на случай полного углового момента $J \neq 0$. Было бы также очень полезно уметь строить приближенную ортонормированную систему функций, обрезанную на некотором заданном значении $j_1 = j_2 = j$; такая система функций была бы удобна для вычисления матричных элементов.

Волновые функции, полученные в этой работе (после их ортогонализации), позволяют поставить еще одну задачу — задачу о возникновении ротационного спектра системы. Для этого надо рассмотреть свойства пакета (суперпозиции по квантовым числам K и Ω), у которого приближённо сохраняется проекция углового момента на нормаль к плоскости треугольника[4]. Подробное обсуждение этой задачи мы оставим до следующей публикации. Было бы также интересно выяснить, можно ли использовать такого рода разложения и для движения тяжелого волчка. Особенно интересен (и пока мало понятен) случай волчка Ковалевской, квантовый аналог которого до сих пор не известен[5].

В качестве возможного применения разработанной нами техники можно указать на классификацию диаграмм Далитца трехчастичного распада. Обобщение результатов на релятивистский случай кажется сейчас не очень трудной задачей.

Наконец, с практической точки зрения важно разработать технику вычисления матричных элементов парных взаимодействий.

Приложение

Вычисление вклада парциальных моментов в состоянии $J = 0$ сводится к вычислению коэффициента Фурье от функции

$$\Phi_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\cos\Phi)^j (\sin\Phi)^j P_{K/2-j}^{(j+1/2,\, j+1/2)}(\cos 2\Phi) P_j(\mathbf{n}, \mathbf{m}). \tag{П.1}$$

При условии $\xi^2 + \eta^2 = 1$, как мы уже отметили в разделе 4, можно считать $\cos^2\Phi = \xi^2$ и $\sin^2\Phi = \eta^2$ и (П. 1) переписать в виде

$$\Phi_0(\xi, \eta) = (\xi^2)^{j/2} (\eta^2)^{j/2} P_{K/2-j}^{(j+1/2,\, j+1/2)}(\xi^2 - \eta^2) P_j(\mathbf{n}, \mathbf{m}). \tag{П.2}$$

Состояние с полным угловым моментом, равным нулю, составлено из двух парциальных моментов j_1 и j_2, равных друг другу ($j_1 = j_2 = j$). Так как для такого состояния собственное значение Ω не существенно, это состояние отличается от состояний, описываемых квантовыми числами нашей работы, только заменой числа ν

[4] Для жесткой системы с осцилляционным потенциалом сохраняются все квантовые числа, но такая система ни в каком приближении не переходит в «волчок» с определенными значениями момента инерции.

[5] Конечно, в этом случае надо рассматривать систему из многих частиц.

на j. Поэтому функции (П. 2) есть суперпозиция

$$\sum_{\nu} C(j,\nu) D^{K/4}_{\nu/2,-\nu/2}(2\lambda, 2a, 0). \tag{П.3}$$

Коэффициент $C(j,\nu)$ мы должны вычислить (точнее, обратный ему, но это из-за унитарности преобразования не имеет значения). Коэффициент Фурье от (П. 2) будем вычислять при дополнительном условии $\mathbf{mn} = 1$; этому соответствует $a = \pi/2$ по (21). С другой стороны,

$$\cos 2\Phi = \sin a \sin \lambda,$$

что при $a = \pi/2$ дает

$$\cos 2\Phi = \sin \lambda, \quad \sin 2\Phi = \cos \lambda. \tag{П.4}$$

Чтобы пользоваться стандартными формулами, положим $\sin \lambda = \cos \Lambda$ и перейдем от полинома Якоби к полиному Гегенбауера

$$P^{(j+1/2,j+1/2)}_{K/2-j}(\cos 2\Phi) = \frac{\Gamma(2j+2)\Gamma(K+3/2)}{\Gamma((K/2)+j+2)\Gamma(j+3/2)} C^{j+1}_{K/2-j}(\cos 2\Phi). \tag{П.5}$$

Тогда (П. 1) переписывается в виде

$$(\cos \Phi)^j (\sin \Phi)^j = \frac{\Gamma(2j+2)\Gamma(K+3/2)}{\Gamma((K/2)+j+2)\Gamma(j+3/2)} C^{j+1}_{K/2-j}(\cos 2\Phi). \tag{П.6}$$

Используем теперь интегральное представление полиномов Гегенбауера [8]:

$$\frac{1}{2^j}(\sin\Lambda)^j C^{j+1}_{K/2-j}(\cos\Lambda) = \frac{i^j}{2^{2j+1}} \frac{\Gamma(2+j+(K/2))}{(K/2)!\Gamma(j+1)} \times \\ \times \int_0^\pi (\cos\Lambda - i \sin\Lambda \cos\vartheta)^{K/2} C^{1/2}_j(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta. \tag{П.7}$$

Учитывая соотношение $C^{1/2}_j(\cos\vartheta) = P_j(\cos\vartheta)$, имеем

$$\Phi_0(\xi,\eta) = \frac{i^j}{2^{2j+1}} \frac{\Gamma(2j+2)\Gamma(K+3/2)}{(K/2)!\Gamma(j+1)\Gamma(j+3/2)} \int_0^\pi (\cos\Lambda - i \sin\Lambda\cos\vartheta)^{K/2} P_j(\cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta. \tag{П.8}$$

Разложение в ряд легко получить непосредственно, если разложить $\cos\Lambda$ и $\sin\Lambda$ на экспоненты и раскрыть скобки. Выделяя в интеграле член с экспонентой $e^{-i\nu\Lambda}$, получаем для него

$$\binom{\frac{K}{2}}{\frac{K}{4}-\frac{\nu}{2}} \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos\vartheta}{2}\right)^{\frac{K/2-\nu}{2}} \left(\frac{1+\cos\vartheta}{2}\right)^{\frac{K/2+\nu}{2}} P_j(\cos\vartheta) e^{-i\nu\Lambda} \sin\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \binom{\frac{K}{2}}{\frac{K}{4}-\frac{\nu}{2}} \int_0^\pi \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{K/2-\nu} \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{K/2+\nu} P_j(\cos\vartheta) e^{-i\nu\Lambda} \sin\vartheta \, d\vartheta. \tag{П.9}$$

Это можно переписать как

$$i^{-K/2}\int_0^{\pi} P^{K/4}_{K/4,\nu/2}(\cos\vartheta)P^{K/4}_{-K/4,-\nu/2}(\cos\vartheta)P^{j}_{00}(\cos\vartheta)e^{-i\nu\Lambda}\sin\vartheta\,d\vartheta. \qquad (\text{П}.10)$$

Отсюда мы приходим к формуле

$$\Phi_0(\xi,\eta)=\sum_{\nu}\frac{i^{j-K/2}}{2^{2j}\sqrt{2j+1}}\frac{\Gamma(2j+2)\Gamma(K+3/2)}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+3/2)}\times$$
$$\times\left(\frac{K}{4},\frac{\nu}{2},\frac{K}{4},-\frac{\nu}{2}\,\middle|\,j0\right)e^{-i\nu\lambda}\left[\left(\frac{K}{2}-j\right)!\left[\left(\frac{K}{2}+j+1\right)!\right]^{-1/2}. \qquad (\text{П}.11)$$

Если вместо (П. 1) исходить из ортонормированной функции

$$\Phi_0^{j+1/2,j+1/2}(\xi,\eta)=\left(N^{j+1/2,\,j+1/2}_{K/2-j}\right)^{-1/2}\Phi_0(\xi,\eta), \qquad (\text{П}.12)$$

где

$$N^{j+1/2,j+1/2}_{K/2-j}=\frac{\left[i\Gamma\left(\frac{K}{2}+\frac{3}{2}\right)\right]^2}{2(K+2)\Gamma\left(\frac{K}{2}-j+1\right)\Gamma\left(\frac{K}{2}+j+2\right)}, \qquad (\text{П}.13)$$

то вычисления приводят к следующему разложению функции «деревьев» по K-гармоникам:

$$\Phi_0^{j+1/2,j+1/2}(\xi,\eta)=-\sum_{\nu}\frac{i^j}{2^{2j-1/2}}\left(\frac{K+2}{2j+1}\right)^{1/2}\frac{\Gamma(2j+2)\Gamma\left(K+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(j+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K+3}{2}\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{K}{4},\frac{\nu}{2},\frac{K}{4},-\frac{\nu}{2}\,\middle|\,j0\right)D^{K/4}_{\nu/2,-\nu/2}(2\lambda,2a,0). \qquad (\text{П}.14)$$

При этом мы отказались от условия $a=\pi/2$. Очевидно, что обратное разложение K-гармоник по функциям «деревьев» определяется теми же коэффициентами, что и разложение (П. 14).

Литература

1. *Бадалян А. М., Симонов Ю. А.* ЯФ, **3**, 6, 1966.
2. *Nyiri J., Smorodinsky Ya. A.* Preprint E4–4043, JINR, 1968.
3. *Нири Ю., Смородинский Я. А.* ЯФ, **9**, 882, 1969.
4. *Виленкин Н. Я., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **2**, 906, 1965.
5. *Смородинский Я. А., Пустовалов В. Л.* ЯФ, **10**, 1900, 1969.
6. *Whitten R. C.* J. Math. Phys., **10**, 1631, 1969.
7. *Эдмондс Л.* Угловые моменты в квантовой механике. В сб. Деформация атомных ядер, ИИЛ, 1958.
8. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. Наука, 1965.

Задача трех тел. Полная система ортогональных угловых функций

В. В. Пустовалов, Я. А. Смородинский

1. Введение

В настоящее время в задаче трех тел очень эффективно развивается метод решения, основанный на разложении волновой функции по угловым функциям системы трех невзаимодействующих частиц. Эти угловые функции должны описывать состояния с заданным орбитальным моментом и определенной симметрией относительно перестановок частиц. Групповые свойства трехчастичных состояний, которые следуют из инвариантности свободного гамильтониана относительно группы O_6 или $SU(3)$, изучены в нескольких работах [1–3]. Классификация состояний на основе этих групп дает четыре квантовых числа: квадрат шестимерного момента K^2, квадрат орбитального момента L^2 и его проекцию M, а также число ν, описывающее перестановочную симметрию. Вырождение, которое при этом получается, снимается пятым оператором Ω, обсуждавшимся рядом авторов [4, 5]. Простой способ построения полного набора коммутирующих операторов предложила А. М. Бадалян. Из генераторов группы $SU(3)$ строятся скалярные операторы первого, второго и т. д. порядков. Так как число таких операторов невелико, легко отобрать из них линейно независимые и коммутирующие операторы. Было найдено два полных набора операторов. В одном пятым оператором является Ω. В другом наборе в качестве пятого оператора используется оператор четвертого порядка, не коммутирующий с Ω, но обладающий свойствами Ω по отношению к K^2, L^2, M, ν и оператору Лапласа. Метод нахождения собственных значений оператора Ω, описанный ниже, в равной степени применим и для нахождения собственных значений этого оператора четвертого порядка.

Было реализовано несколько способов построения угловых функций с заданными K^2, L^2, M и ν [2, 6–10]. Групповой подход [2, 10] дает возможность строить функции только с небольшими K. С помощью разделения переменных в уравнении Лапласа [6, 7] удается построить функции с $L = 0, 1, 2$. В общем случае произвольных K и L функции построены в виде гармонических полиномов [8, 9]. В работе [11] применен иной подход к задаче трех тел. С самого начала введены координаты и построены операторы, реализующие представления группы $SU(3)$ на шестимерной сфере, которые записаны через угловые переменные на этой сфере. Общий вид шаровых функций в угловых переменных получается естественным образом.

Все способы построения гарантируют полноту набора функций, но состояния, описываемые этим набором, вырождены по квантовому числу Ω. Для снятия вырождения должна быть проведена ортогонализация набора. При этом, конечно, состояния не будут характеризоваться определенным значением Ω. Авторами работы [10] предложен некоторый план нахождения собственных функций оператора Ω, который они собираются осуществить в будущем.

В настоящей работе собственные функции оператора Ω найдены. Исходным базисом являются гармонические полиномы [8, 9], которые наряду с квантовыми

числами K^2, L^2, M и ν характеризуются значком ω. Собственные функции и представляют собой линейные комбинации полиномов по значку ω.

Проведена также параметризация базисных полиномов с помощью введения трех углов Эйлера. Подвижные орты выбраны так, что они остаются инвариантными при любых перестановках частиц. Это позволяет выделить в явном виде D-функцию, которая не зависит от перестановок. При такой параметризации перестановочные свойства системы координат не накладываются па перестановочные свойства полиномов.

Вводим следующие обозначения:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3), \quad \boldsymbol{\xi} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - \mathbf{r}_3\right), \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2);$$
$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{z}^* = \boldsymbol{\xi} - i\boldsymbol{\eta}; \quad \rho^2 = \mathbf{z}^*, \quad A^2 = \rho^{-4} z^2 z^{*2}, \quad \sigma \equiv e^{-i\lambda} = -\rho^{-2} A^{-1} z^2. \tag{1}$$

Комплексные векторы $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$ очень просто преобразуются при перестановках:

$$(12)\,\mathbf{z} = \mathbf{z}\mathbf{z}^*, \quad (23)\,\mathbf{z} = \mathbf{z}^* e^{2\pi i/3}, \quad (31)\,\mathbf{z} = \mathbf{z}^* e^{-2\pi i/3}. \tag{2}$$

Переменные ρ и A инвариантны относительно всех перестановок, а для λ имеем

$$(12)\,\lambda = -\lambda, \quad (23)\,\lambda = -\lambda + \frac{2\pi}{3}, \quad (31)\,\lambda = -\lambda - \frac{2\pi}{3}. \tag{3}$$

2. Собственные функции оператора $\widehat{\Omega}$

Исходным базисом для получения собственных функций оператора Ω является полный набор гармонических полиномов [9], который характеризуется пятью квантовыми числами. Угловая часть шестимерного лапласиана

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{z}\, \partial \mathbf{z}^*} \tag{4}$$

определяет квадрат шестимерного момента

$$K^2 = \left(\mathbf{z}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} + \mathbf{z}^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*}\right)\left(\mathbf{z}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} + \mathbf{z}^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} + 4\right) - 4(\mathbf{z}\mathbf{z}^*)\Delta. \tag{5}$$

Оператор орбитального момента

$$\widehat{L} = -i\hbar\left(\left[\mathbf{z}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right] + \left[\mathbf{z}^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*}\right]\right) \tag{6}$$

дает $\widehat{L}^2$ и $\widehat{M}$. Поведение при перестановках описывается оператором $\widehat{\nu}$

$$\widehat{\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{z}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} - \mathbf{z}^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*}\right). \tag{7}$$

Угловые функции также различаются по значку ω, смысл которого состоит в следующем. В общем виде полиномы с квантовыми числами K^2, L^2, M и ν имеют вид

$$u^{\nu}_{KLM} = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=(K-L)/2 \\ \alpha-\beta=\varepsilon\equiv\nu-\varkappa}} \sum_{\varkappa=-L/2}^{L/2} a^{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma} T^{\varkappa}_{LM}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) (z^2)^{\alpha} (z^{*2})^{\beta} (\mathbf{z}\mathbf{z}^*)^{\gamma}. \tag{8}$$

Квантовые числа K^2 и ν задаются условиями суммирования, а L^2 и M определяются тем, что $T^{\varkappa}_{LM}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)$ представляют собой неприводимые тензоры, построенные из сферических компонент векторов $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$ [9]. Значок $\varkappa$ является аналогом ν, но характеризует только тензорную часть полинома ($\varkappa$ и ε в отдельности не сохраняются). Так как полиномы (8) удовлетворяют уравнению Лапласа, коэффициенты $a^{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma}$ связаны системой уравнений (см. Приложение). Из уравнений (П. 1) видно, что коэффициенты $a^{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma}$ при $\gamma = 0$ можно задавать произвольно. Если при $\gamma = 0$ задать коэффициенты $a^{-\omega}_{\alpha\beta 0}$, а все остальные считать равными нулю, то получим полиномы со значком ω (Приложение 2 работы [9]).

Оператор $\widehat{\Omega}$, собственные функции которого нужно найти, имеет вид

$$\widehat{\Omega} = \sum_{ij} \widehat{L}_i \widehat{S}_{ij} \widehat{L}_j, \tag{9}$$

где

$$\widehat{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(z_i \frac{\partial}{\partial z_j} + z_j \frac{\partial}{\partial z_i} - z_i^* \frac{\partial}{\partial z_j^*} - z_j^* \frac{\partial}{\partial z_i^*}\right).$$

Поскольку $\widehat{\Omega}$ коммутирует со всеми операторами $\widehat{K}^2$, $\widehat{L}^2$, $\widehat{M}$ и $\widehat{\nu}$, то вся свобода действий этого оператора заключается в задании определенных соотношений между коэффициентами $a^{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma}$ при $\gamma = 0$. Поэтому собственные функции представляют собой линейные комбинации полиномов со значком ω.

Подействуем оператором Ω на полином общего вида

$$P = \sum_{\alpha,\beta,\gamma;p,q} a^{pq}_{\alpha\beta\gamma} z_+^p z_+^{*q} (z^2)^\alpha (z^{*2})^\beta (\mathbf{z}\mathbf{z}^*)^\gamma. \tag{10}$$

Величина M не играет роли, поэтому взято $M = L$. Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}P = \sum z_+^p z_+^q (z^2)^\alpha (z^{*2})^\beta (\mathbf{z}\mathbf{z}^*)^\gamma \{ a^{pq}_{\alpha\beta\gamma}[-(p-q)(L+1) + 4\alpha q^2 - 4\beta p^2] -\\ - a^{p-1\,q+1}_{\alpha+1\,\beta\,\gamma-1} \cdot 4(\alpha+1)(q+1)(2q+1) + a^{p+1\,q-1}_{\alpha\,\beta+1\,\gamma-1} \cdot 4(\beta+1)(p+1)(2p+1) +\\ + a^{p-2\,q+2}_{\alpha+1\,\beta-1\,\gamma} \cdot 4(\alpha+1)(q+1)(q+2) - a^{p+2\,q+2}_{\alpha-1\,\beta+1\,\gamma} \cdot 4(\beta+1)(p+1)(p+2)\}.\end{aligned} \tag{11}$$

Чтобы привести (10) к виду (8), вводим ограничения па переменные суммирования

$$\begin{aligned} p+q = L, \quad p-q = 2\varkappa,\\ \alpha+\beta+\gamma = \frac{K-L}{2} \equiv y, \quad \alpha-\beta = \varepsilon \equiv \nu - \varkappa. \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} p = \frac{L+2\varkappa}{2}, \quad q = \frac{L-2\varkappa}{2},\\ \alpha = \frac{1}{2}(y+\varepsilon-\gamma), \quad \beta = \frac{1}{2}(y-\varepsilon-\gamma). \end{aligned} \tag{13}$$

Получаем

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}u^{\nu}_{KLM=L} = \sum z^p z^q (z^2)^\alpha (z^{*2})^\beta (\mathbf{z}\mathbf{z}^*)^\gamma \times\\ \times \left\{ a^{\varkappa}_{\varepsilon\gamma}\left[-2\varkappa(L+1) + 2(y+\varepsilon-\gamma)\left(\frac{L}{2}-\varkappa\right)^2 - 2(y-\varepsilon-\gamma)\left(\frac{L}{2}+\varkappa\right)^2\right] - \right.\end{aligned}$$

$$- a^{\varkappa-1}_{\varepsilon+1\,\gamma-1} \cdot 2(y+\varepsilon-\gamma+2)\left(\frac{L}{2}-\varkappa+1\right)(L-2\varkappa+1)+$$

$$+ a^{\varkappa+1}_{\varepsilon-1\,\gamma-1} \cdot 2(y-\varepsilon-\gamma+2)\left(\frac{L}{2}+\varkappa+1\right)(L+2\varkappa+1)+$$

$$+ a^{\varkappa-2}_{\varepsilon+2\,\gamma} \cdot 2(y+\varepsilon-\gamma+2)\left(\frac{L}{2}-\varkappa+1\right)\left(\frac{L}{2}-\varkappa+2\right)-$$

$$- a^{\varkappa+2}_{\varepsilon-2\,\gamma} \cdot 2(y-\varepsilon-\gamma+2)\left(\frac{L}{2}+\varkappa+1\right)\left(\frac{L}{2}+\varkappa+2\right)\Bigg\}. \quad (14)$$

Решаем задачу на собственные значения

$$(\widehat{\Omega}-\Omega)u^{\nu\Omega}_{KLM}=0. \quad (15)$$

В связи со сказанным выше, нужно только найти соотношение между коэффициентами $a^{\varkappa}_{\varepsilon\gamma}$ при $\gamma=0$. Поэтому задача на собственные функции и собственные значения оператора $\widehat{\Omega}$ определяется следующей системой уравнений:

$$a^{\varkappa}_{\varepsilon\,0}\left[-2\varkappa(L+1)+2(y+\varepsilon)\left(\frac{L}{2}-\varkappa\right)^2-2(y-\varepsilon)\left(\frac{L}{2}+\varkappa\right)^2-\Omega\right]+$$

$$+ a^{\varkappa-2}_{\varepsilon+2\,0} \cdot 2(y+\varepsilon+2)\left(\frac{L}{2}-\varkappa+1\right)\left(\frac{L}{2}-\varkappa+2\right)-$$

$$- a^{\varkappa+2}_{\varepsilon-2\,0} \cdot 2(y-\varepsilon+2)\left(\frac{L}{2}+\varkappa+1\right)\left(\frac{L}{2}+\varkappa+2\right)=0, \quad (16)$$

$$\varkappa=-\frac{L}{2},-\frac{L}{2}+1,\dots,\frac{L}{2}.$$

При подробной записи системы нужно следить, чтобы $\varkappa+\varepsilon=\nu$ оставалось постоянным.

Значок $\varkappa$ в (16) меняется через единицу, а уравнения связывают коэффициенты с $\varkappa$ через две единицы. Поэтому система распадается на две подсистемы. Порядок этих подсистем при нечетных L одинаков и равен $(L+1)/2$, а при четных L одна подсистема имеет порядок $(L/2)+1$, а другая $L/2$. Отсюда следует, что система уравнений (16) до $L=7$ включительно разрешима в радикалах.

Для примера приводим систему уравнений для $L=2$:

$$\begin{gathered} a^{1}_{\varepsilon 0}(-6-8(y-\varepsilon)-\Omega)+a^{-1}_{\varepsilon-2\,0}\cdot 4(y+\varepsilon+2)=0, \\ a^{0}_{\varepsilon+1\,0}(4(\varepsilon+1)-\Omega)=0, \\ a^{-1}_{\varepsilon+2\,0}(6+8(y+\varepsilon+2)-\Omega)-a^{1}_{\varepsilon\,0}\cdot 4(y-\varepsilon)=0. \end{gathered} \quad (17)$$

Отсюда

$$\Omega^{\pm 1}=8(\varepsilon+1)\pm 2[12y^2+4\varepsilon^2+48y+8\varepsilon+49]^{1/2}, \quad \Omega^0=4(\varepsilon+1). \quad (18)$$

Рассмотрим частные случаи уравнений (16). Значок ε в выражении (8) для гармонических полиномов пробегает значения через две единицы в пределах $[-y,y]$. Поэтому при $y=0,1$ коэффициенты $a^{\varkappa-2}_{\varepsilon+2\,0}$ и $a^{\varkappa+2}_{\varepsilon-2\,0}$ в уравнениях (16) тождественно равны нулю по значку ε, и система уравнений сводится к одному уравнению

$$a^{\varkappa}_{\varepsilon\,0}\left[-2\varkappa(L+1)+2(y+\varepsilon)\left(\frac{L}{2}-\varkappa\right)^2-2(y-\varepsilon)\left(\frac{L}{2}+\varkappa\right)^2-\Omega\right]=0, \quad y=0,1. \quad (19)$$

Это означает, что при $L = K$ (чистый тензор из двух векторов) и $L = K - 2$ полиномы со значком ω [9] являются собственными функциями оператора Ω.

Точно такая же ситуация имеет место для полиномов с $L = 0, 1$, когда коэффициенты $a^{\varkappa-2}_{\varepsilon+2\,0}$ и $a^{\varkappa+2}_{\varepsilon-2\,0}$ тождественно равны нулю по значку $\varkappa$.

Для псевдотензорного варианта выкладки аналогичны предыдущим. Полином общего вида

$$P_A = \sum a^{pq}_{\alpha\beta\gamma} A_+ z_+^{p-1} z_+^{*q-1} \left(z^2\right)^\alpha \left(z^{*2}\right)^\beta (\mathbf{z}\mathbf{z}^*)^\gamma, \qquad A_+ = i(z_0 z_+^* - z_+ z_0^*). \tag{20}$$

Определим действие оператора $\widehat{\Omega}$:

$$\widehat{\Omega} P_A = \sum A_+ z_+^{p-1} z_+^{*q-1} \left(z^2\right)^\alpha \left(z^{*2}\right)^\beta (\mathbf{z}\mathbf{z}^*)^\gamma \Big\{ a^{pq}_{\alpha\beta\gamma} \left[p(p-1) - q(q-1) + 4\alpha q^2 - 4\beta p^2\right] - a^{p-1\,q+1}_{\alpha+1\,\beta\,\gamma-1} \cdot 4(\alpha+1)\, q(2q+1) + a^{p+1\,q-1}_{\alpha\;\beta+1\,\gamma-1} \cdot 4(\beta+1)\, p(2p+1) + a^{p-2\,q+2}_{\alpha+1\,\beta-1\,\gamma} \cdot 4(\alpha+1)\, q(q+1) - a^{p+2\,q-2}_{\alpha-1\,\beta+1\,\gamma} \cdot 4(\beta+1)\, p(p+1) \Big\}. \tag{21}$$

Вводим ограничение на переменные суммирования

$$p + q = L + 1, \quad p - q = 2\varkappa, \qquad \alpha + \beta + \gamma = \frac{K - L - 1}{2} \equiv y_A, \quad \alpha - \beta = \varepsilon \equiv \nu - \varkappa. \tag{22}$$

Задача на собственные значения дает

$$a^{\varkappa}_{\varepsilon\,0} \left[2\varkappa L + 2(y_A + \varepsilon)\left(\frac{L+1}{2} - \varkappa\right)^2 - 2(y_A - \varepsilon)\left(\frac{L+1}{2} + \varkappa\right)^2 - \Omega\right] - a^{\varkappa+2}_{\varepsilon-2\,0} \cdot 2(y_A - \varepsilon + 2)\left(\frac{L+1}{2} + \varkappa\right)\left(\frac{L+1}{2} + \varkappa + 1\right) + a^{\varkappa+2}_{\varepsilon-2\,0} \cdot 2(y_A + \varepsilon + 2)\left(\frac{L+1}{2} - \varkappa\right)\left(\frac{L+1}{2} - \varkappa + 1\right) = 0, \tag{23}$$

$$\varkappa = -\frac{L-1}{2}, -\frac{L-1}{2} + 1, \ldots, \frac{L-1}{2}.$$

Размерность подсистем для четных L равна $L/2$, а для нечетных $(L+1)/2$ и $(L-1)/2$. Разрешимость в радикалах возможна до $L = 8$ включительно. Также получаем, что полиномы со значком ω [9] при $y_A = 0, 1$ $(L = K - 1, K - 3)$ и при $L = 1, 2$ являются собственными функциями $\widehat{\Omega}$.

Рассмотрим совместно все частные случаи. Можем подсчитать, что полиномы со значком ω с $K \leqslant 5$ ($K \leqslant 6$ в псевдотензорном варианте) являются собственными для оператора $\widehat{\Omega}$.

Остановимся теперь на вопросе построения угловых функций определенной перестановочной симметрии. Метод, использованный раньше [9], здесь не подходит. Нельзя ограничиться полиномами только с положительной величиной значка ω, поскольку собственные функции оператора $\widehat{\Omega}$ представляют собой сумму из полиномов с любыми величинами ω. Однако легко заметить симметрию между квантовым числом ν и значком ω относительно поведения при перестановках. Поэтому, строя полиномы определенной перестановочной симметрии, можно было ограничиться также только полиномами с положительными величинами ν и любыми ω. Поведение Ω при перестановках аналогично поведению значка ω. Из уравнений (16)

видно, что если изменить знак ν ($\varkappa$ и ε), то Ω изменит знак. Учитывая все сказанное, формулы для получения полиномов определенной перестановочной симметрии запишем в виде

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u^{\nu,\Omega} + u^{-\nu,-\Omega}\right),$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(u^{\nu,\Omega} - u^{-\nu,-\Omega}\right) \times \begin{cases} 1, & \nu = \frac{3}{2}n, \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{4\pi}{3}\nu, & \nu \neq \frac{3}{2}n. \end{cases} \tag{24}$$

При $\nu > 0$ Ω любое; при $\nu = 0$ $\Omega \geqslant 0$. Здесь n — целое число. Если исходные полиномы имеют ν, кратные $3/2$, то функции u_1 являются симметричными, а u_2 — антисимметричными. При остальных ν функции u_1 и u_2 с одинаковыми квантовыми числами попарно образуют двумерное представление группы перестановок трех частиц.

Для псевдовекторного варианта справедливы те же формулы (24).

3. Отделение внешних координат

Полный набор угловых функций с квантовыми числами K^2, L^2, M, ν и ω [9] получается с помощью дифференциального оператора $D^{L,-M,\omega}$, действующего на гармонический полином с $L = 0$:

$$u^{\nu\Omega}_{KLM} = D^{L,-M,\omega} P^{\nu+\omega}_{K+L},$$

$$D^{L,-M,\omega} = \sum_{\varkappa=-L/2}^{L/2} T^{\varkappa}_{LM}(\mathbf{z},\mathbf{z}^*) \sum_{m=0}^{(L+2\omega)/2} \binom{\frac{L+2\omega}{2}}{m} \binom{\frac{L-2\omega}{2}}{\varkappa-\omega+m} \times$$
$$\times \Lambda_1^{L/2+\omega-m} \Lambda_1^{*L/2-\varkappa-m} \Lambda_2^{2m+\varkappa-\omega}, \tag{25}$$

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{\rho^2\sigma}\frac{\partial}{\partial A} - \frac{1}{\rho^2 A}\frac{\partial}{\partial\sigma},$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{A}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial A},$$

$$\Lambda_1^* = -\frac{\sigma}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial A} + \frac{\sigma^2}{\rho^2 A}\frac{\partial}{\partial\sigma},$$

$$P^{\nu}_{K} = \rho^K \sigma^\nu A^{|\nu|} P^{(|\nu|,0)}_{((K/2)-\nu)/2}\left(1 - 2A^2\right).$$

Действие операторов Λ на P^{ν}_{K} известно (Приложение 1 работы [9]). В результате получается функция, зависящая от внутренних переменных ρ, A, $\sigma(\lambda)$ (1), которые описывают конфигурацию треугольника, образуемого тремя частицами. Неприводимые тензоры $T^{\varkappa}_{LM}(\mathbf{z},\mathbf{z}^*)$, кроме этих переменных, зависят еще от координат (углов Эйлера), описывающих положения треугольника в пространстве. Наша задача — в явном виде выделить эту зависимость.

Введем подвижную координатную систему, связанную с плоскостью треугольника так, чтобы она оставалась инвариантной при любых перестановках частиц. Такую систему координат образуют, например, симметричные относительно перестановок вектор $\mathbf{E}_1$ ($K = 3, \varepsilon = 1$) и псевдовектор $\mathbf{E}_3$ ($K = 8, \varepsilon = 3$) [9]:

$$\mathbf{E}_1 = \rho^2(A)\left(\mathbf{z}\sigma - \mathbf{z}^*\sigma^{-1}\right), \quad \mathbf{E}_3 = [\mathbf{z},\mathbf{z}^*]\rho^6 A^3\left(\sigma^3 - \sigma^{-3}\right), \quad \mathbf{E}_2 = [\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_1]. \tag{26}$$

В переменных $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -2\xi(\xi^2-\eta^2)+4\eta(\xi\eta), \\ \mathbf{E}_3 &= -8[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]\{3(\xi^2-\eta^2)^2(\xi\eta)-4(\xi\eta)^3\}. \end{aligned} \tag{26а}$$

Соответствующие единичные векторы запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-A\cos 3\lambda}}\left(\frac{\mathbf{z}}{\rho}\sigma+\frac{\mathbf{z}^*}{\rho}\sigma^{-1}\right), \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-A\cos 3\lambda}\sqrt{1-A^2}}\frac{i\sin 3\lambda}{|\sin 3\lambda|}\left(\frac{\mathbf{z}}{\rho}\sigma(1-A\sigma^{-3})-\frac{\mathbf{z}^*}{\rho}\sigma^{-1}(1-A\sigma^3)\right), \\ \mathbf{e}_3 &= -\frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\frac{i\sin 3\lambda}{|\sin 3\lambda|}\left[\frac{\mathbf{z}}{\rho},\frac{\mathbf{z}^*}{\rho}\right]. \end{aligned} \tag{26б}$$

В работе [11] была введена другая подвижная система координат $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$. Обе системы координат приводятся между собой в соответствие с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\mathbf{l}_1 &= \left[\cos\left(\frac{3\lambda+a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sin a\cos\left(\frac{3\lambda-a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos a\sqrt{1-\sin a\cos 3\lambda}\right]^{-1}, \\ \mathbf{e}_1\mathbf{l}_2 &= \left[\sin\left(\frac{3\lambda-a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin a\sin\left(\frac{3\lambda+a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos a\sqrt{1-\sin a\cos 3\lambda}\right]^{-1}, \\ &\sin a = A. \end{aligned} \tag{27}$$

Введем углы Эйлера φ, θ, ψ, характеризующие ориентацию подвижной системы координат $\mathbf{e}_i$ относительно лабораторной системы. Связь между компонентами $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$ в обеих системах описывается формулами

$$\begin{aligned} z_+ &= x_+e^{i(\psi+\varphi)}\cos^2\frac{\theta}{2}+(-x_-)e^{-i(\psi-\varphi)}\sin^2\frac{\theta}{2}, \\ (-z_-) &= x_+e^{i(\psi-\varphi)}\sin^2\frac{\theta}{2}+(-x_-)e^{-i(\psi+\varphi)}\cos^2\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Через $x_\pm(x^*_\mp)$ обозначены сферические компоненты вектора $\mathbf{z}$ $(\mathbf{z}^*)$ в подвижной системе координат. Для вектора $\mathbf{z}^*$ имеют место такие же формулы.

Найдем, как преобразуются компоненты неприводимых тензоров $T^\varkappa_{LM}(\mathbf{z},\mathbf{z}^*)$ при переходе от одной системы координат к другой. Рассмотрим тензоры старшего веса. Имеем

$$T^\varkappa_{LL} = z_+^p z_+^{*q} = \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} C_p^m C_q^n e^{i\psi(p+q-2m-2n)}e^{i\varphi(p+q)}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{p+q-m-n}\times$$
$$\times\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{m+n}(x_+)^{p-m}(-x_-)^m(x_+^*)^{q-n}(-x_-^*)^n. \tag{29}$$

Вместо переменных суммирования m и n введем переменные $m+n=(L-N)/2$ и n. Видно, что новое переменное N той же четности, что и L.

$$T^\varkappa_{LL} = \sum_N\sum_n C_p^{(L-N)/2-n}C_q^n e^{i\psi N}e^{i\varphi L}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{(L+N)/2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{(L-N)/2}\times$$
$$\times(x_+)^{\varkappa+(N/2)+n}(-x_-)^{(L-N)/2-n}(x_+^*)^{(L/2)-\varkappa-n}(-x_-^*)^n. \tag{30}$$

Замечая, что выражение для D-функции имеет вид

$$D^L_{NL}(\varphi,\theta,\psi) = (-1)^{L-N}\left(C^{L-N}_{2L}\right)^{1/2} e^{iN\psi} e^{iL\varphi}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{(L+N)/2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{(L-N)/2}, \quad (31)$$

для тензоров старшего веса получаем

$$T^{\varkappa}_{LL}(\mathbf{z},\mathbf{z})^* = \sum_N D^L_{NL}(\varphi,\theta,\psi)\left(C^{L-N}_{2L}\right)^{-1/2}\sum_n C_p^{(L-N)/2-n} C_q^n \times$$
$$\times (-x_-)^{(L-N)/2-n}(-x^*_-)^n (x_+)^{\varkappa+(N/2)+n}(x^*_+)^{(L/2)-\varkappa-n}. \quad (32)$$

В случае произвольного неприводимого тензора $T^{\varkappa}_{LM}$ в этом выражении вместо D^L_{NL} нужно написать D^L_{NM}.

Сферические компоненты векторов $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$ в подвижной системе координат зависят только от внутренних переменных ρ, A, λ (1). С учетом формул (26б) находим

$$x_\pm = \pm\frac{\rho\sigma^{-1}}{2\sqrt{1-A\cos 3\lambda}}\,(R_\pm + iA\sin 3\lambda),$$
$$x^*_\pm = \pm\frac{\rho\sigma}{2\sqrt{1-A\cos 3\lambda}}\,(R_\pm - iA\sin 3\lambda), \quad (33)$$
$$R_\pm = 1 - A\cos 3\lambda \pm \frac{\sin 3\lambda}{|\sin 3\lambda|}\sqrt{1-A^2}.$$

Как и следовало ожидать, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ ведут себя при перестановках как векторы $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$. Подставляя эти выражения в (32), получаем тензоры в параметризованном виде:

$$T^{\varkappa}_{LM}(\mathbf{z},\mathbf{z}^*) = \sum_N D^L_{NM}(\varphi,\theta,\psi)\,T^{\varkappa}_{LN}(\rho,A,\lambda). \quad (34)$$

В зависимости от знака величины $\varkappa + (N/2)$ имеем

$$\varkappa + \frac{N}{2} \geqslant 0,$$
$$T^{\varkappa}_{LN}(\rho,A,\lambda) = \rho^L Q_{Ln}(-1)^{\varkappa}\exp\left[-i\left(\varkappa\lambda + \frac{N}{2}\delta\right)\right]\frac{((L/2)+\varkappa)!}{[\varkappa+(N/2)]!}\times$$
$$\times\left(1 - \frac{\sin 3\lambda}{|\sin 3\lambda|}\sqrt{1-A^2}\right)^{L/2} B^{(\varkappa+(N/2))/2} F\left(-\frac{L-2\varkappa}{2}, -\frac{L-N}{2};\ \varkappa+\frac{N}{2}+1;\ B\right);$$
$$\varkappa + \frac{N}{2} < 0, \quad (35)$$
$$T^{\varkappa}_{LN}(\rho,A,\lambda) = \rho^L Q_{LN}(-1)^{\varkappa}\exp\left[-i\left(\varkappa\lambda + \frac{N}{2}\delta\right)\right]\times$$
$$\times\frac{((L-N)/2)!((L/2)-\varkappa)!}{((L+N)/2)!(-\varkappa-(N/2))!}\left(1 - \frac{\sin 3\lambda}{|\sin 3\lambda|}\sqrt{1-A^2}\right)^{L/2} B^{-(\varkappa+N/2)/2}\times$$
$$\times F\left(-\frac{L+2\varkappa}{2}, -\frac{L+N}{2};\ -\varkappa-\frac{N}{2}+1;\ B\right).$$

Здесь

$$Q_{LN} = \left[\frac{(L+N)!(L-N-1)!!}{2^N(2L)!(L-N)!!}\right]^{1/2},$$

$$B = \left[1 + \frac{\sin 3\lambda}{|\sin 3\lambda|}\sqrt{1-A^2}\right]\left[1 - \frac{\sin 3\lambda}{|\sin 3\lambda|}\sqrt{1-A^2}\right]^{-1},$$
$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{|\sin 3\lambda|\sqrt{1-A^2}}{A - \cos 3\lambda}.$$

Перестановочные свойства тензоров в параметризованном виде очень просты и определяются перестановочными свойствами переменной $\lambda(3)$. Подчеркнем еще раз, что D-функция в (34) инвариантна относительно перестановок всех частиц.

Для псевдовекторного варианта получаем такие же выражения. Все отличие состоит в том, что в (35) нужно L заменить на $L-1$, изменить константу Q_{LN} на

$$Q'_{LN} = \left[\frac{(L+N)!(L-N)!!}{2^{N-1}(2L)!(L-N-1)!!}\right]^{1/2} \tag{36}$$

и умножить выражения на нулевую компоненту псевдовектора $\mathbf{A} = [\mathbf{z}, \mathbf{z}^*]$ в подвижной системе координат

$$A_0 = -i\rho^2\frac{\sin 3\lambda}{|\sin 3\lambda|}\sqrt{1-A^2}. \tag{37}$$

Таким образом, построен один из возможных наборов угловых «функций» осуществляющих неприводимое представление группы вращений в трехмерном пространстве и неприводимое представление группы перестановок трех частиц и характеризующихся всеми пятью квантовыми числами.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Г. И. Кузнецову и Е. Л. Суркову за полезные обсуждения.

Приложение

Действие оператора Лапласа (4) на гармонические полиномы (10) и (20) должно давать нуль. Отсюда коэффициенты $a^{pq}_{\alpha\beta\gamma}$ связаны системой уравнений

$$4\alpha\beta a^{pq}_{\alpha\beta\gamma} + (\gamma+2)(K-\gamma)a^{pq}_{\alpha-1\,\beta-1\,\gamma+2} + \alpha\big(\widetilde{L} - 2\varkappa + 2\big)a^{p-1\,q+1}_{\alpha\,\beta-1\,\gamma+1} + \\ + \beta\big(\widetilde{L} + 2\varkappa + 2\big)a^{p+1\,q-1}_{\alpha-1\,\beta\,\gamma+1} = 0 \tag{П.1}$$

(см. определения (12) и (22)). Здесь $\widetilde{L} = L$ в обычном случае и $\widetilde{L} = L-1$ для псевдотензорного варианта.

Литература

1. *Smith F. T.* Phys. Rev., **120**, 1058, 1960; J. Math. Phys., **3**, 735, 1962.
2. *Dragt A. J.* J. Math. Phys., **6**, 533, 1965.
3. *Levy-Leblond J. M., Lurcat F.* J. Math. Phys., **6**, 1565, 1965.
4. *Bargmann V., Moshinsky M.* Nucl. Phys., **18**, 697, 1960; **23**, 177, 1961.
5. *Racah G.* Proc. of Summer Scool, Istanbul, 1962.
6. *Levy-Leblond J. M., Levy-Nahas M.* J. Math, Phys., **6**, 1571, 1965.
7. *Zickendraht W.* Ann. of Phys., **35**, 18, 1965.
8. *Симонов Ю. А.* ЯФ, **3**, 630, 1966.
9. *Пустовалов В. В., Симонов Ю. А.* ЖЭТФ, **51**, 345, 1966.
10. *Whitten R. C., Smith F. T.* J. Math. Phys., **9**, 1103, 1968.
11. *Нири Ю., Смородинский Я. А.* ЯФ, **9**, 882, 1969.

Ортогональные преобразования многомерных угловых гармоник

Я. А. Смородинский, В. Д. Эфрос

1. Введение

Для решения задачи нескольких нуклонов методом гиперсферического разложения нужно уметь строить базисные гиперсферические функции с нужными свойствами симметрии по отношению к перестановкам частиц в форме разложения по гиперсферическим функциям вида «деревьев» [1], квантовые числа которых имеют простой смысл.

С другой стороны, базисные функции с нужными свойствами симметрии можно построить, применяя соответствующие операторы перестановок частиц к тем же самым функциям «деревьев». Для числа частиц, большего трех, такой способ построения является наиболее практичным (см. [2]). Таким образом, возникает задача вычисления матричных элементов операторов перестановок между гиперсферическими функциями вида «деревьев». При вычислении нужно иметь в виду, что любая перестановка может быть представлена как произведение таких перестановок, которые в пространстве координат Якоби соответствуют поворотам в двумерных плоскостях на некоторые углы φ, разные для разного числа частиц. Поэтому в этой работе мы вычислим матричные элементы для произвольного угла φ.

Рассмотрим ортонормированную систему «трехчастичных» гиперсферических функций типа «деревьев»

$$u^{\lambda\mu}_{KLM}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = Y^{\lambda\mu}_{LM}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)\psi_{K\lambda\mu}(\theta), \tag{1}$$

где

$$Y^{\lambda\mu}_{LM}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \sum_{M_1+M_2=M} (\lambda M_1 \mu M_2 | LM)\, Y_{\lambda M_1}(\mathbf{n}_1)\, Y_{\mu M_2}(\mathbf{n}_2), \tag{2}$$

$$\psi_{K\lambda\mu}(\theta) = N_{K\lambda\mu} \sin^\lambda\theta \cos^\mu\theta\, P^{(\lambda+1/2,\mu+1/2)}_{(K-\lambda-\mu)/2}(\cos 2\theta) \tag{3}$$

($P^{\alpha,\beta}_n(x)$ — полином Якоби). Функции (1) заданы на сфере $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \rho^2$ и

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\xi_1}, \quad \mathbf{n}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\xi_2}, \quad \xi_1 = \rho\cos\theta, \quad \xi_2 = \rho\cos\theta. \tag{4}$$

Нормирующий множитель

$$N_{K\lambda\mu} = \left[\frac{(2K+4)((K-\lambda-\mu)/2)!((K+\lambda+\mu)/2+1)!}{\Gamma((K-\lambda+\mu+3)/2)\Gamma((K+\lambda-\mu+3)/2)}\right]^{1/2}. \tag{5}$$

Пусть над аргументами функции (1) совершается псевдоортогональное преобразование

$$\boldsymbol{\xi}'_1 = \cos\varphi\boldsymbol{\xi}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{\xi}_2, \quad \boldsymbol{\xi}'_2 = \sin\varphi\boldsymbol{\xi}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{\xi}_2. \tag{6}$$

Запишем разложение преобразованной функции (1) по исходным

$$u^{\lambda\mu}_{KLM}(\boldsymbol{\xi}'_1, \boldsymbol{\xi}'_2) = \sum_{\lambda', \mu'} \langle \lambda'\mu' | \lambda\mu \rangle^{\varphi}_{KL}\, u^{\lambda'\mu'}_{KLM}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2). \tag{7}$$

Задачей настоящей работы является изучение коэффициентов

$$\langle \lambda'\mu' | \lambda\mu \rangle^{\varphi}_{KL}, \tag{8}$$

входящих в это разложение. Интерес к изучению этих коэффициентов связан со следующим обстоятельством. Для построения базиса многомерных угловых гармоник (K-гармоник), приспособленного для решения малонуклонных проблем [2], достаточно знать матричные элементы (м. э.) следующего вида:

$$\left\langle u^{L'_1\widetilde{K}'\widetilde{L}'(\widetilde{\alpha}')}_{KL,M}(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{A-1}) \,\middle|\, \widehat{P} \,\middle|\, u^{L_1\widetilde{K}\widetilde{L}(\widetilde{\alpha})}_{KLM}(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{A-1}) \right\rangle. \tag{9}$$

Здесь $\widehat{P}$ — оператор некоторой перестановки частиц; $\boldsymbol{\xi}_m$ — обычные координаты Якоби (A — число частиц):

$$\boldsymbol{\xi}_m = \left[m(m+1)\right]^{-1/2}\left(m\mathbf{r}_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \mathbf{r}_i\right);$$

$u^{L_1\widetilde{K}\widetilde{L}(\widetilde{\alpha})}_{KLM}$ — гиперсферические функции, обладающие наряду с заданными K, L, M заданным орбитальным моментом L_1 относительного движения первой и второй частиц, заданным «глобальным моментом» $\widetilde{K}$ в подпространстве $\boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_{A-1}$ всех векторов Якоби, исключая ξ_1, и заданным орбитальным моментом $\widetilde{L}$ в этом подпространстве;

$$u^{L_1\widetilde{K}\widetilde{L}(\widetilde{\alpha})}_{KLM}(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{A-1}) = \left[Y_{L_1M_1}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\xi_1}\right) u_{\widetilde{K}\widetilde{L}\widetilde{M}(\widetilde{\alpha})}(\boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_{A-1}) \right]_{LM} \psi^{m}_{K;L_1\widetilde{K}}(\theta), \tag{10}$$

где $\psi^{n}_{K;L_1\widetilde{K}}(\theta)$ — известные [1] функции, $\sin\theta = \xi_1/\rho$.

Оператор перестановки P в (9) соответствует одновременно некоторому (псевдо) ортогональному преобразованию в пространстве векторов Якоби ξ_i:

$$\widehat{P} u^{L_1\widetilde{K}\widetilde{L}(\widetilde{\alpha})}_{KLM}(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{A-1}) = u^{L_1\widetilde{K}\widetilde{L}(\widetilde{\alpha})}_{KLM}(\boldsymbol{\xi}'_1, \dots, \boldsymbol{\xi}'_{A-1}), \quad \boldsymbol{\xi}'_i = \widehat{P}\boldsymbol{\xi}_i = \sum c_{ij}(\widehat{P})\boldsymbol{\xi}_j. \tag{11}$$

В связи с этим для случая трех частиц м. э. (9) совпадают с искомыми коэффициентами (8), взятыми при определенных $\varphi = \varphi_0$. В случае большего числа частиц м. э. (9) совпадают с аналогичными (8) «многочастичными» коэффициентами, взятыми при определенных преобразованиях $c_{ij}(\widehat{P})$ (11). Существенно отметить, что эти «многочастичные» коэффициенты можно свести к «трехчастичным» коэффициентам (8), воспользовавшись методом, предложенным в работе [3], поэтому мы можем сосредоточиться на изучении коэффициентов (8) [1)].

Коэффициенты (8) уже были введены с другой целью в работе [4], где были получены другие формулы для них. Те из результатов настоящей работы, которые можно сопоставить с результатами работы [4], содержатся в формулах (19), (38), (39), (41), (43) (см. ниже).

[1)] Для облегчения использования в указанном плане результатов работы [3] заметим, что в конкретных вычислениях этой работы используются гиперсферические функции, аргументы которых иначе связаны с координатами отдельных частиц, чем в функциях (10), наиболее важных для приложений. Метод [3], однако, элементарно переносится и на функции (10).

Введем некоторые дальнейшие обозначения. Наряду с коэффициентами (8) удобно ввести в рассмотрение и видоизмененные коэффициенты

$$[\lambda'\mu'|\lambda\mu]^{\varphi}_{KL} = \langle\lambda'\mu'|\lambda\mu\rangle^{\varphi}_{KL}\frac{a_{K\lambda'\mu'}}{a_{K\lambda\mu}}, \tag{12}$$

где

$$a_{K\lambda\mu} = \left[\left(\frac{K-\lambda-\mu}{2}\right)!\left(\frac{K+\lambda+\mu}{2}+1\right)!(K-\lambda+\mu+1)!!(K+\lambda-\mu+1)!!\right]^{-1/2}. \tag{13}$$

Всюду употребляются обычные обозначения для величин теории момента количества движения [5] и ортогональных полиномов [6].

Если вместо преобразования (6) рассматривается ортогональное преобразование

$$\boldsymbol{\xi}'_1 = \cos\varphi\boldsymbol{\xi}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{\xi}_2, \quad \boldsymbol{\xi}'_1 = -\sin\varphi\boldsymbol{\xi}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{\xi}_2, \tag{14}$$

то коэффициенты, аналогичные (8), выражаются, очевидно, через соответствующие коэффициенты (8) как

$$(-1)^{\mu}\langle\lambda'\mu'|\lambda\mu\rangle^{\varphi}_{KL}.$$

Ниже всюду мы имеем дело с преобразованием (6), а не (14).

2. Выражение через коэффициенты Тальми

Будем обозначать $\Psi_{nlm}(\xi)$ нормированные Ψ-функции трехмерного изотропного гармонического осциллятора. Здесь n — радиальное квантовое число, l — орбитальный момент. Обозначаем далее

$$\Psi^{LM}_{n_1\lambda n_2\mu}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \sum_{M_1+M_2=M}(\lambda M_1\mu M_2|LM)\Psi_{n_1\lambda M_1}(\boldsymbol{\xi}_1)\Psi_{n_2\mu M_2}(\boldsymbol{\xi}_2).$$

Обобщенные коэффициенты Тальми [7, 8]

$$\langle N\lambda' n\mu'|n_1\lambda n_2\mu\rangle^{\varphi}_{L} \tag{15}$$

определяются, как известно, разложением

$$\Psi^{LM}_{n_1\lambda n_2\mu}(\boldsymbol{\xi}'_1, \boldsymbol{\xi}'_2) = \sum_{2N+\lambda'+2n+\mu'=2n_1+\lambda+2n_2+\mu}\langle N\lambda' n\mu'|n_1\lambda n_2\mu\rangle^{\varphi}_{L}\,\Psi^{LM}_{N\lambda' n\mu'}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2), \tag{16}$$

где переменные $\boldsymbol{\xi}'_{1,2}$ и $\boldsymbol{\xi}_{1,2}$ связаны равенствами (6). Удобно рассматривать видоизмененные коэффициенты Тальми, связанные с коэффициентами (15) соотношением

$$\begin{gathered}[N\lambda' n\mu'|n_1\lambda n_2\mu]^{\varphi}_{L} = \langle N\lambda' n\mu'|n_1\lambda n_2\mu\rangle^{\varphi}_{L}\frac{A_{N\lambda'}A_{n\mu'}}{A_{n_1\lambda}A_{n_2\mu}},\\ A_{pq} = (-1)^p\left[(2p+2q+1)!!(2p)!!\right]^{-1/2}.\end{gathered} \tag{17}$$

Величины (17) входят в разложение [9]

$$(\boldsymbol{\xi}'^2_1)^{n_1}(\boldsymbol{\xi}'^2_2)^{n_2}\,Y^{\lambda\mu}_{LM}(\boldsymbol{\xi}'_1, \boldsymbol{\xi}'_2) = \sum[n'_1\lambda' n'_2\mu'|n_1\lambda n_2\mu]^{\varphi}_{L}\,(\boldsymbol{\xi}^2_1)^{n'_1}(\boldsymbol{\xi}^2_2)^{n'_2}\,Y^{\lambda'\mu'}_{LM}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2), \tag{18}$$

получаемое при сравнении в разложении (16) коэффициентов при полиномах старшей степени однородности. В (18) обозначено

$$Y^{\lambda\mu}_{LM}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \xi_1^{\lambda}\xi_2^{\mu}\,Y^{\lambda\mu}_{LM}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2).$$

Искомые коэффициенты (8) можно выразить через коэффициенты Тальми. Справедлива формула

$$[\lambda'\mu'|\lambda\mu]^{\varphi}_{KL} = \sum_{\substack{n_1'n_2' \\ n_1'+n_2'=(K-\lambda'-\mu')/2}} (-1)^{n_1+n_1'} \left[n_1'\lambda' n_2'\mu' | n_1\lambda n_2\mu\right]^{\varphi}_{L}. \tag{19}$$

Формула (19) выражает коэффициенты (8), видоизмененные согласно (12), в виде однократной суммы обобщенных коэффициентов Тальми (17), относящихся к оболочке

$$2n_1' + \lambda' + 2n_2' + \mu' = 2n_1 + \lambda + 2n_2 + \mu = K. \tag{20}$$

При этом заметим, что в соотношении (19) величины n_1 и n_2, удовлетворяя условию (20), в остальном произвольны.

Выведем формулу (19). Для нас будут представлять интерес гармонические проекции [10] осцилляторных полиномов, входящих в (16). Пусть Q_1 и Q_2 — некоторые однородные полиномы от ξ_1, ξ_2 степени K. Будем употреблять обозначение $Q_1 \sim Q_2$, если полиномы Q_1 и Q_2 таковы, что их разность содержит величину ρ^2 в качестве общего множителя[2]:

$$Q_1(\xi_1, \xi_2) - Q_2(\xi_1, \xi_2) = \rho^2 R_{K-2}(\xi_1, \xi_2),$$

где R_{K-2} — некоторый однородный полином степени $K-2$. Будем обозначать через $P^{\lambda\mu}_{KLM}$ гармонические полиномы, соответствующие функциям (1): $P^{\lambda\mu}_{KLM} = \rho^K u^{\lambda\mu}_{KLM}$. Для этих полиномов справедливо следующее соотношение:

$$P^{\lambda\mu}_{KLM}(\xi_1, \xi_2) \sim a_{K\lambda\mu} \left[\frac{\xi_2^2 - \xi_1^2}{2}\right]^{(K-\lambda-\mu)/2} Y^{\lambda\mu}_{LM}(\xi_1, \xi_2), \tag{21}$$

где $a_{K\lambda\mu}$ задаются соотношением (13). Записав в правой части (21) $\xi_1^2 \sim -\xi_2^2$, получим

$$P^{\lambda\mu}_{KLM}(\xi_1, \xi_2) \sim a_{K\lambda\mu} (\xi_2^2)^{(K-\lambda-\mu)/2} Y^{\lambda\mu}_{LM}(\xi_1, \xi_2). \tag{22}$$

Используем в (22) соотношение $(\xi_2^2)^{n_1} \sim (-\xi_1^2)^{n_1}$. Получаем окончательно

$$(\xi_1^2)^{n_1} (\xi_2^2)^{n_2} Y^{\lambda\mu}_{LM}(\xi_1, \xi_2) \sim (-1)^{n_1} a^{-1}_{K\lambda\mu} P^{\mu\lambda}_{KLM}(\xi_1, \xi_2), \tag{23}$$

причем в (23) целые числа n_1 и n_2, удовлетворяя условию (20), в остальном произвольны.

Подействуем теперь на левую и правую части равенства (18) оператором гармонического проектирования $\widehat{h}$ [10]. Учитывая соотношения (23) и тот факт, что гармоническая проекция полинома, пропорционального ρ^2, равна нулю, получаем независимо от значений n_1, n_2

$$\widehat{h}\left[(\xi_1^2)^{n_1} (\xi_2^2)^{n_2} Y^{\lambda\mu}_{\Lambda M}(\xi_1, \xi_2)\right] = (-1)^{n_1} a^{-1}_{K\lambda\mu} P^{\lambda\mu}_{KLM}(\xi_1, \xi_2),$$

так что справедливо равенство

$$(-1)^{n_1} a^{-1}_{K\lambda\mu} u^{\lambda\mu}_{KLM}(\xi_1', \xi_2') = \sum_{\lambda'\mu'} a^{-1}_{K\lambda'\mu'} u^{\lambda'\mu'}_{KLM}(\xi_1', \xi_2') \left(\sum_{n_1'n_2'} (-1)^{n_1'} \left[n_1'\lambda' n_2'\mu' \,|\, n_1\lambda n_2\mu\right]^{\varphi}_{L}\right). \tag{24}$$

[2] У таких полиномов одинаковые гармонические проекции.

Сравнивая (24) и разложение (7) и учитывая определение (12), получаем формулу (19).

Формула (19) много проще полученной в работе [4], которая выражает коэффициенты (8) в виде трехкратной суммы, включающей в себя обобщенные коэффициенты Тальми.

3. Частные случаи

Приведем явные формулы для величин (8) в двух частных случаях. Затем, используя эти формулы, получим формулы и для общего случая.

Случай А.

$$\langle\lambda\mu|L0\rangle^{\varphi}_{KL} = (-1)^{(K+L)/2}\begin{pmatrix}\lambda & \mu & L\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sqrt{[\lambda][\mu]}\times$$
$$\times\left(\frac{N_{K\lambda\mu}}{N_{KL0}}\right)\frac{(K-L)!!}{(K-L+1)!!}\cos^{\lambda}\varphi\sin^{\mu}\varphi\, P^{(\lambda+1/2,\mu+1/2)}_{(K-\lambda-\mu)/2}(-\cos 2\varphi). \quad (25)$$

Здесь и ниже $[\lambda] = 2\lambda+1\ldots$. Формула (25) получена в [2] (нужно подставить в формуле (45) и заменить в формуле (46) [2] $c_{11} = \cos\varphi$, $c_{21} = \sin\varphi$). Можно получить аналог формулы (25) для гиперсферических функций, отвечающих произвольному числу частиц, применяя тот же способ, что и при выводе (25). Соответствующая формула записана в Приложении.

Нам понадобится видоизмененный согласно (12) коэффициент

$$[\lambda\mu|L0]_{KL} = (-1)^{(K+L)/2}\begin{pmatrix}\lambda & \mu & L\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sqrt{[\lambda][\mu]}\cdot 2^{(K-L)/2}\times$$
$$\times\frac{((K-L)/2)!(K+L+1)!!}{(K-\lambda+\mu+1)!!(K+\lambda-\mu+1)!!}\cos^{\lambda}\varphi\sin^{\mu}\varphi\, P^{(\lambda+1/2,\mu+1/2)}_{(K-\lambda-\mu)/2}(-\cos 2\varphi). \quad (26)$$

Случай Б.

Пусть в соотношении (19) $\lambda'+\mu' = K$. Тогда параметры суммирования могут принимать только одно значение $n_1' = n_2' = 0$, и мы получаем соотношение

$$[\lambda'\mu'|\lambda\mu]^{\varphi}_{\lambda'+\mu',L} = (-1)^{n_1}[0\lambda'0\mu'|n_1\lambda n_2\mu]^{\varphi}_{L}. \quad (27)$$

В правой части (27) стоит коэффициент Тальми (17) специального вида. Подставляя полученную в [7] формулу для таких коэффициентов и переходя (с учетом (12) и (49а)) к транспонированному коэффициенту, получаем формулу

$$[\lambda'\mu'|\lambda\mu]^{\varphi}_{\lambda+\mu,L} = \sin^{s}\varphi\cos^{t}\varphi\cdot 2^{-(\lambda'+\mu')}\times$$
$$\times\frac{(\lambda+\mu+1)!\left[(\lambda+\mu+L+1)!(\lambda+\mu-L)![\lambda][\mu][\lambda'][\mu']\right]^{1/2}}{s!(t+1)!(2s+2\lambda'+1)!!(2s+2\mu'+1)!!}F^{\varphi}_{L}(\lambda',\mu';\,\lambda-s,\mu-s). \quad (28)$$

Здесь

$$s = \frac{\lambda+\mu-\lambda'-\mu'}{2}, \quad t = \frac{\lambda+\mu+\lambda'+\mu'}{2},$$

$$F_L(x,y;\,p,q) = \sum_{m=|p-x|}^{\min(p+x,q+y)}(-1)^{\pi_4}\frac{\prod_{i=1}^{4}\sqrt{(2\pi_i)!}}{\prod_{i=1}^{4}\pi_i!}\begin{pmatrix}p & q & L\\ x-m & m-y & y-x\end{pmatrix}(\mathrm{tg}\,\varphi)^m, \quad (29)$$

причем m в (29) принимает только значения той же четности, что и $|p-x|$;

$$\pi_1 = \frac{p+x-m}{2}, \qquad \pi_2 = \frac{p-x+m}{2},$$
$$\pi_3 = \frac{q-y+m}{2}, \qquad \pi_4 = \frac{q+y-m}{2}.$$

4. Явные выражения

Получим явные формулы для величин (8). (Результаты этого раздела выражаются формулами (38), (39), (41), (43).) Будем обозначать через $D^K_{\alpha\beta}(g)$ D-функцию группы $O(6)$, отвечающую представлению, реализуемому гиперсферическими функциями, и выбору базиса (1). Индексы α или β здесь и ниже обозначают соответствующую совокупность чисел $(\lambda\mu LM)$. Будем также обозначать через

$$\begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$3j$-символы группы $O(6)$ [3], соответствующие выбору базиса (1).

Запишем соотношение

$$\sum_{\alpha_1\alpha_2} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} D^{K_1}_{\alpha_1\beta_1}(g)\, D^{K_2}_{\alpha_2\beta_2}(g) = \sum_{\beta_3} D^{K_3 *}_{\alpha_3\beta_3}(g) \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Заменим в (30) $3j$-символы на интегралы от произведений трех гармоник (1), пользуясь теоремой Вигнера—Эккарта:

$$\int d\Omega_6\, u_{K_1\alpha_1}\, u_{K_2\alpha_2}\, u_{K_3\alpha_3} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} I(K_1, K_2, K_3).$$

Затем (заменив g на g^{-1}) возьмем в (30) преобразование частного вида (14)

$$D^K_{\alpha\beta}(g=\varphi) \equiv \langle \lambda_\alpha\mu_\alpha | \lambda_\beta\mu_\beta \rangle^\varphi_{KL} (-1)^{\mu_\beta}.$$

Тогда для искомых коэффициентов (8) получаем соотношение

$$\sum_{\lambda_1'\lambda_2'\mu_1'\mu_2'} \langle \lambda_1'\mu_1' | \lambda_1\mu_1 \rangle^\varphi_{K_1L_1} \langle \lambda_2'\mu_2' | \lambda_2\mu_2 \rangle^\varphi_{K_2L_2} \begin{bmatrix} K_1L_1 & K_2L_2 & K_3L_3 \\ \lambda_1'\mu_1' & \lambda_2'\mu_2' & \lambda_3\mu_3 \end{bmatrix} =$$
$$= \sum_{\lambda_3'\mu_3'} \langle \lambda_3\mu_3 | \lambda_3'\mu_3' \rangle^\varphi_{K_3L_3} \begin{bmatrix} K_1L_1 & K_2L_2 & K_3L_3 \\ \lambda_1\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_3'\mu_3' \end{bmatrix} (-1)^{\mu_1+\mu_2+\mu_3'}, \tag{31}$$

где введено обозначение

$$\begin{bmatrix} K_1L_1 & K_2L_2 & K_3L_3 \\ \lambda_1\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_3\mu_3 \end{bmatrix} =$$
$$4\pi \left\{ \prod_{i=1}^{3} \sqrt{[L_i]} \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \int d\Omega_6\, u^{\lambda_1\mu_1}_{K_1L_1M_1}\, u^{\lambda_2\mu_2}_{K_2L_2M_2}\, u^{\lambda_3\mu_3}_{K_3L_3M_3}. \tag{32}$$

[3] См., например, [11]. Мы сознательно используем здесь обозначения, аналогичные употребляемым для $O(3)$, что не должно привести к недоразумениям, хотя в других местах этой работы фигурируют $3j$-символы $O(3)$.

Записывая $d\Omega_6 = \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2$ и интегрируя по $d\mathbf{n}_1$, $d\mathbf{n}_2$, получаем, что величина (32) равна

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2\theta \cos^2\theta \psi_{K_1\lambda_1\mu_1}(\theta)\, \psi_{K_2\lambda_2\mu_2}(\theta)\, \psi_{K_3\lambda_3\mu_3}(\theta) S(L_1\lambda_1\mu_1,\ L_2\lambda_2\mu_2,\ L_3\lambda_3\mu_3), \tag{33}$$

где обозначено

$$S(L_1\lambda_1\mu_1,\ L_2\lambda_2\mu_2,\ L_3\lambda_3\mu_3) = \\ = \left(\prod_{i=0}^{3} \sqrt{[\lambda_i][\mu_i]}\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{Bmatrix}. \tag{34}$$

Мы будем использовать частный случай соотношения (31), отвечающий $K_1+K_2=K_3$. Для этого случая интеграл, входящий в (33), вычисляется в конечном виде и равен с точностью до множителя, зависящего только от K_1, K_2, K_3, величине

$$(-1)^{(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)/2} \frac{a_{K_1\lambda_1\mu_1}\, a_{K_2\lambda_2\mu_2}}{a_{K_3\lambda_3\mu_3}}, \quad K_1 + K_2 = K_3, \tag{35}$$

где $a_{K\lambda\mu}$ задаются формулой (13). Отсюда получаем, что в рассматриваемом случае, если перейти к видоизмененным коэффициентам (12), соотношение (31) сводится к формуле

$$\sum_{\lambda_1'\lambda_2'\mu_1'\mu_2'} (-1)^{(\lambda_1'+\lambda_2'-\lambda_3)/2} [\lambda_1'\mu_1' \,|\, \lambda_1\mu_1]^{\varphi}_{K_1L_1} [\lambda_2'\mu_2' \,|\, \lambda_2\mu_2]^{\varphi}_{K_2L_2} S(L_1\lambda_1'\mu_1',\ L_2\lambda_2'\mu_2',\ L_3\lambda_3\mu_3) = \\ = \sum_{\lambda_3'\mu'} (-1)^{(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3')/2} [\lambda_3\mu_3 \,|\, \lambda_3'\mu_3']^{\varphi}_{K_1+K_2,L_3}\, S(L_1\lambda_1\mu_1,\ L_2\lambda_2\mu_2,\ L_3\lambda_3'\mu_3'). \tag{36}$$

Разрешим соотношение (36) относительно коэффициентов, входящих в его правую часть. Для этого умножаем (36) на соответствующий $9j$-символ (выписанный явно в (37)), суммируем по L_1, L_2 и используем соотношение ортогональности (см. [5], формула (24.32)) для $9j$-символов[4]. Получаем формулу (переобозначая индексы)

$$[\lambda'\mu' | \lambda\mu]^{\varphi}_{K_1+K_2,L} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = (-1)^{(\lambda_1+\lambda_2-\lambda)/2} \left(\frac{[\lambda][\mu]}{[\lambda_1][\mu_1][\lambda_2][\mu_2]}\right)^{1/2} \sum_{\lambda_1'\lambda_2'\mu_1'\mu_2'L_1L_2} \Bigg\{ [L_1][L_2](-1)^{(\lambda_1'+\lambda_2'-\lambda')/2} \times \\ \times S(L_1\lambda_1'\mu_1',\ L_2\lambda_2'\mu_2',\ L\lambda'\mu') \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \\ L_1 & L_2 & L \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu \end{Bmatrix} [\lambda_1'\mu_1' \,|\, \lambda_1\mu_1]^{\varphi}_{K_1L_1}\, [\lambda_2'\mu_2' \,|\, \lambda_2\mu_2]^{\varphi}_{K_2L_2} \Bigg\}. \tag{37}$$

Отметим, что в формуле (37) значения параметров λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 произвольны. Придавая этим параметрам специальные значения, получаем формулы, выражающие искомые коэффициенты общего вида через коэффициенты специального вида. Так, положим в (37) $\mu_1 = \lambda_2 = 0$. Это приводит к формуле

$$[\lambda'\mu' \,|\, \lambda\mu]^{\varphi}_{KL} = (-1)^L ([\lambda][\mu])^{1/2} \sum_{\lambda_1'\lambda_2'\mu_1'\mu_2'} (-1)^{(\lambda_1'+\lambda_2'-\lambda')/2} [\lambda_1'\mu_1' \,|\, \lambda 0]^{\varphi}_{K-K',\lambda} \times \\ \times [\lambda_2'\mu_2' \,|\, 0\mu]^{\varphi}_{K',\mu}\, S(\lambda\lambda_1'\mu_1',\ \mu\lambda_2'\mu_2',\ L\lambda'\mu'). \tag{38}$$

---

[4] Тем же способом можно разрешить и общее соотношение (31).

Далее, в (38) еще можно распорядиться значением K'. Положим $K' = \mu$. В этом случае второй из коэффициентов в правой части (38) отличен от нуля лишь при $\lambda'_2 + \mu'_2 = \mu$. Получаем (с учетом (49г)) формулу

$$[\lambda'\mu'|\lambda\mu]_{KL} = (-1)^{L+\mu}\big([\lambda][\mu]\big)^{1/2} \sum_{\substack{p,q,r\\ \text{(все допустимые)}}} (-1)^{(p-r-\lambda')/2} \times$$
$$\times [pq|\lambda 0]^{\varphi}_{K-\mu,\lambda}[\mu - rr|\mu 0]^{\varphi}_{\mu\mu} S(\lambda pq,\ \mu r\mu - r,\ L\lambda'\mu'). \qquad (39)$$

Формулы (38) и (39) выражают искомые коэффициенты (8), (12) общего вида через их частный случай (26) и величину (34). Отметим, что в (39), как следует из (26),

$$[\mu - rr|\mu 0]^{\varphi}_{\mu\mu} = \cos^{\mu-r}\varphi \sin^{r}\varphi \left[\frac{(2\mu+1)!}{(2r+1)!(2\mu-2r+1)!}\right]^{1/2} \qquad (40)$$

Параметры суммирования в (39) заключены в пределах

$$0 \leqslant r \leqslant \mu, \quad |p-q| \leqslant \lambda, \quad \lambda \leqslant p+q \leqslant K-\mu,$$

причем сумма чисел в каждой из троек $(\lambda' pr)$, $(\mu' q\mu - r)$ четна[5].

Другую формулу для вычисления искомых коэффициентов (12) получаем, положив в (37) $\lambda_2 = \mu_2 = 0$, $K_1 = \lambda + \mu$:

$$[\lambda'\mu'|\lambda\mu]^{\varphi}_{KL} = (-1)^{\lambda+\mu}\big([L]\big)^{1/2} \sum_{\substack{p,q,r\\ \text{(все допустимые)}}} (-1)^{(p+r-\lambda')/2} \times$$
$$\times [pq|\lambda\mu]_{\lambda+\mu,L}[rr|00]^{\varphi}_{K-\lambda-\mu,0} S(Lpq,\ 0rr,\ L\lambda'\mu'). \qquad (41)$$

При этом, как следует из (26),

$$[rr|00]_{2Q,0} = 2^{r}\frac{Q!r!\sqrt{[r]}}{(Q+r+1)!}(\sin 2\varphi)^{r} C^{r+1}_{Q-r}(\cos 2\varphi) \qquad (42)$$

($C^{\alpha}_{n}(x)$ — полипом Гегенбауэра), а первый из коэффициентов в правой части (41) задается формулой (28). Функция S в (41) сводится к $6j$-символу; параметры суммирования заключены в пределах

$$|p-q| \leqslant L, \quad L \leqslant p+q \leqslant \lambda+\mu, \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{K-\lambda-\mu}{2},$$

причем сумма чисел в каждой из троек $(\lambda' pr)$, $(\mu' qr)$ четна.

Отметим, что имеется также другой простой способ получения формул (37), (38), (41), близкий к данному, в работах [12, 13].

В случае $L = 0$ имеется также следующая простая формула для коэффициентов (8):

$$\langle\lambda'\lambda'|\lambda\lambda\rangle_{K,L=0} = \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \times$$
$$\times \sum_{\substack{m\\ \text{(все допустимые)}}} \begin{pmatrix} \frac{K}{4} & \frac{K}{4} & \lambda \\ -m & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{K}{4} & \frac{K}{4} & \lambda' \\ -m & m & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} (-1)^{(\lambda+\lambda')/2}\cos 4m\varphi \\ (-1)^{(\lambda+\lambda'+1)/2}\sin 4m\varphi \end{cases} \qquad (43)$$

[5] $9j$-символ, входящий в (39), частично вырожден, и для его вычисления может быть, в частности, использована формула специального вида ([5], формула (25.20)). Заметим, что в этой формуле имеется опечатка — пропущен множитель $1/y!$

для случая соответственно четных и нечетных $\lambda+\lambda'$. Формулу (43) получаем, производя преобразование (6) над функциями (1) с $L=0$ в три этапа: разлагаем функции (1) от переменных $\xi'_{1,2}$ по известным гиперсферическим функциям [14] с $L=0$ и заданным $\nu=2m$. Производим преобразование (14), что сводится к умножению последних функций на $\exp(i2\nu\varphi)$; производим обратное разложение функций с заданным ν по функциям (1) и умножаем (см. (14)) результат на $(-1)^\lambda$. Ответ (43) выражается таким образом через билинейные комбинации коэффициентов перехода [12, 13, 15] от функций с заданным ν и $L=0$ к функциям (1)[6].

5. Рекуррентные формулы

Для вывода обратимся к рекуррентным формулам для коэффициентов Тальми. Вывод основан на соотношении (19).

Для обобщенных коэффициентов Тальми (17) можно получить рекуррентную формулу по орбитальным моментам типа полученной в [17, 18] для случая $\varphi=\pi/4$. Эта формула имеет вид[7]

$$\begin{aligned}
[N\lambda' n\mu' \,|\, n_1\lambda n_2\mu+1]^\varphi_L &= \frac{2\mu+3}{\sqrt{\mu+1}}\sum_{L'=L,L\pm1}(2L'+1)\begin{Bmatrix}\lambda\mu & L'\\ 1L & \mu+1\end{Bmatrix}\times\\
&\times\Big\{\cos\varphi\Big[F(\mu'+1,\lambda';\,L',L)[N\lambda' n-1\mu'+1\,|\,n_1\lambda n_2\mu]^\varphi_{L'}-\\
&-F(\mu',\lambda';\,L,L')[N\lambda' n\mu'-1\,|\,n_1\lambda n_2\mu]^\varphi_{L'}\Big]+\\
&+(-1)^{L-L'}\sin\varphi\Big[F(\lambda'+1,\mu';\,L',L)[N-1\lambda'+1n\mu'\,|\,n_1\lambda n_2\mu]^\varphi_{L'}-\\
&-F(\lambda',\mu';\,L,L')[N\lambda'-1n\mu'\,|\,n_1\lambda n_2\mu]^\varphi_{L'}\Big]\Big\}.
\end{aligned}\tag{44}$$

Здесь

$$F(a,b;\,c,d)=\sqrt{a}\begin{Bmatrix}b & a-1 & d\\ 1 & c & a\end{Bmatrix}. \tag{45}$$

Умножим соотношение (44) на $(-1)_1^{N+n}$, просуммируем по N, n и используем соотношение (19). Получаем рекуррентную формулу для искомых коэффициентов (12)

$$\begin{aligned}
[\lambda'\mu'\,|\,\lambda\mu+1]^\varphi_{K+1,L} &= \frac{2\mu+3}{\sqrt{\mu+1}}\sum_{L'=L,L\pm1}(2L'+1)\begin{Bmatrix}\lambda\mu & L'\\ 1L & \mu+1\end{Bmatrix}\times\\
&\times\Big\{\cos\varphi\Big[F(\mu'+1,\lambda';L',L)[\lambda'\mu'+1\,|\,\lambda\mu]^\varphi_{KL'}-F(\mu',\lambda';L,L')[\lambda'\mu'-1\,|\,\lambda\mu]^\varphi_{KL'}\Big]-\\
&-(-1)^{L-L'}\sin\varphi\Big[F(\lambda'+1,\mu';L',L)[\lambda'+1\mu'\,|\,\lambda\mu]^\varphi_{KL'}+F(\lambda',\mu';L,L')[\lambda'-1\mu'\,|\,\lambda\mu]^\varphi_{KL'}\Big]\Big\}.
\end{aligned}\tag{46}$$

[6] Отметим, что при выводе формулы [16], выражающей обобщенные коэффициенты Тальми через обыкновенные, использовались, по существу, близкие по идее соображения (см. [8, 16]), но сам вывод чересчур громоздок. Упомянутую формулу проще сразу получить, записывая осцилляторные функции в представлении операторов рождения и действуя как при выводе (43): переходим от операторов по переменным $\xi'_{1,2}$ к операторам по переменным $\mathbf{Z}=\xi_2+i\xi_1$; $\mathbf{Z}^*$ — коэффициенты этого преобразования совпадают [8] с точностью до фазы с обыкновенными коэффициентами Тальми; производим преобразование (14), что сводится к умножению на $\exp(i2\nu\varphi)$; переходим от операторов по $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^*$ к операторам по $\xi_{1,2}$.

[7] В (44), как и во всех формулах, приводимых ниже, коэффициенты, содержащие отрицательные параметры, считаются равными нулю.

Из соотношения (46), используя свойство симметрии (49г), легко получить и соответствующую рекуррентную формулу по параметру λ.

Далее, для коэффициентов Тальми наряду с формулой (44) имеется также рекуррентная формула по радиальным квантовым числам. Из этой рекуррентной формулы (типа формулы работы [9] для $\varphi = \pi/4$), записанной в форме, данной в работе [19], получаем тем же способом, что и выше, еще одну рекуррентную формулу для коэффициентов (12):

$$\begin{aligned}[][\lambda'\mu'|\lambda\mu]^{\varphi}_{K+2,L} = \cos 2\varphi[\lambda'\mu'|\lambda\mu]^{\varphi}_{KL} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big\{[\lambda'-1,\mu'-1|\lambda\mu]_{KL}\,\alpha_L(\lambda',\mu') - \\ - [\lambda'+1,\mu'+1|\lambda\mu]^{\varphi}_{KL}\,\alpha_L(\lambda'+1,\mu'+1) + [\lambda'+1,\mu'-1|\lambda\mu]^{\varphi}_{KL}\times \\ \times\beta_L(\lambda',\mu') - [\lambda'-1,\mu'+1|\lambda\mu]_{KL}\,\beta_L(\mu',\lambda')\Big\}. \end{aligned} \tag{47}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_L(p,q) &= \left[\frac{(p+q+L)(p+q+L+1)(p+q-L)(p+q-L-1)}{(2p-1)(2p+1)(2q-1)(2q+1)}\right]^{1/2}, \\ \beta_L(p,q) &= \left[\frac{(L+p-q+1)(L+p-q+2)(L+q-p)(L+q-p-1)}{(2p+1)(2p+3)(2q-1)(2q+1)}\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{48}$$

Соотношение (46) вместе с аналогичным соотношением по параметру λ дает возможность вычислить все искомые коэффициенты, начиная с коэффициентов (26), для которых $\mu = 0$. Соотношение (47) дает возможность вычислить все коэффициенты, начиная с коэффициентов (28), для которых $K = \lambda + \mu$. Соотношение (47) удобно своей алгебраической простотой; (46) может быть полезно в задачах [2], где нужны коэффициенты с малыми λ, μ.

Отметим также, что формулы (46) и (47) содержатся как частные случаи в общем соотношении (37).

6. Свойства симметрии

$$\langle\lambda'\mu'|\lambda\mu\rangle^{\varphi}_{KL} =$$

$$= \langle\lambda\mu|\lambda'\mu'\rangle^{\varphi}_{KL} = \tag{49а}$$

$$= (-1)^{\lambda+L+(K-\lambda'-\mu')/2}\langle\mu'\lambda'|\lambda\mu\rangle^{\pi/2-\varphi}_{KL} = \tag{49б}$$

$$= (-1)^{\lambda'+L+(K-\lambda-\mu)/2}\langle\lambda'\mu'|\mu\lambda\rangle^{\pi/2-\varphi}_{KL} = \tag{49в}$$

$$= (-1)^{(\lambda+\lambda'-\mu-\mu')/2}\langle\mu'\lambda'|\mu\lambda\rangle^{\varphi}_{KL} = \tag{49г}$$

$$= (-1)^{\lambda+\lambda'}\langle\lambda'\mu'|\lambda\mu\rangle^{-\varphi}_{KL} = \tag{49д}$$

$$= (-1)^{K}\langle\lambda'\mu'|\lambda\mu\rangle^{\pi+\varphi}_{KL}. \tag{49е}$$

Соотношение (49а) следует из общих свойств преобразования (7). Если обозначить матрицу (8) $T_{\lambda'\mu';\lambda\mu}(\varphi)$, то имеем

$$T_{\lambda'\mu';\lambda\mu}(\varphi) = T^{-1}_{\lambda'\mu';\lambda\mu}(\varphi) = T^{*}_{\lambda\mu;\lambda'\mu'}(\varphi) = T_{\lambda\mu;\lambda'\mu'}(\varphi), \tag{50}$$

что и дает (49а). Соотношение (49б) получаем, переписав тождественно преобразование (6) в виде

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\xi_2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\xi_1, \\ -\xi_2' &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\xi_2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\xi_1. \end{aligned} \tag{51}$$

Вследствие (51) одновременно с разложением (7) можно записать

$$u^{\lambda\mu}_{KLM}(\xi'_1, -\xi'_2) = \sum_{\lambda'\mu'} \langle\lambda'\mu'|\lambda\mu\rangle^{\pi/2-\varphi}_{KL}\, u^{\lambda'\mu'}_{KLM}(\xi_2, \xi_1). \tag{52}$$

Сравнение разложений (7) и (52) приводит к (49б).

7. Диагонализация матриц

Дадим еще один удобный способ вычисления коэффициентов (8). Рассмотрим уравнение на собственные значения

$$(a\widehat{\lambda}_0^2 + b\widehat{\mu}_0^2)\Psi_{KLM} = \varepsilon_n \Psi_{KLM}, \tag{53}$$

где λ_0, μ_0 — орбитальные моменты по переменным $\xi'_{1,2}$:

$$\widehat{\lambda}_0 = -i\left[\xi'_1 \frac{\partial}{\partial \xi'_1}\right], \quad \widehat{\mu}_0 = -i\left[\xi'_2 \frac{\partial}{\partial \xi'_2}\right]. \tag{54}$$

Все собственные значения уравнения (53) имеют вид

$$\varepsilon_n = a\lambda_0(\lambda + 1) + b\mu_0(\mu_0 + 1). \tag{55}$$

Постоянные a и b выберем произвольно, потребовав лишь, чтобы спектр (55) был невырожденным. Будем искать решение уравнения (53) в виде разложения по функциям (1) (от переменных ξ_1, ξ_2), при этом (53) сведется к матричному уравнению для коэффициентов этого разложения. Тогда коэффициенты, образующие решение уравнения (53) и отвечающие нормированным Ψ_{KLM}, будут совпадать при $\lambda_0 = \lambda$, $\mu_0 = \mu$ с коэффициентами (8) (с точностью до общей фазы, не зависящей от λ' и μ' [8])). Описанный способ нахождения коэффициентов (8) аналогичен предложенному в работе [20] для нахождения коэффициентов Тальми.

Для реализации этого способа нужно иметь матричные элементы (м. э.) операторов $\widehat{\lambda}_0^2$ и $\widehat{\mu}_0^2$ в базисе функций (1) с заданными орбитальными моментами по переменным ξ_1 и ξ_2. Такие м. э. будем обозначать [9])

$$W = \langle\lambda\mu|\widehat{\lambda}_0^2|\lambda'\mu'\rangle^{\varphi}_{KL}, \tag{56а}$$

$$W' = \langle\lambda\mu|\widehat{\mu}_0^2|\lambda'\mu'\rangle^{\varphi}_{KL}. \tag{56б}$$

Прямое вычисление м. э. (56) весьма трудоемко. Заметим, что в работе [20] с помощью метода производящих функций были вычислены соответствующие м. э.

$$\langle\Psi^{n_1\lambda n_2\mu}_{LM}|\widehat{\lambda}_0^2|\Psi^{n'_1\lambda' n'_2\mu'}_{LM}\rangle^{\varphi}_{KL}, \quad \langle\Psi^{n_1\lambda n_2\mu}_{LM}|\widehat{\mu}_0^2|\Psi^{n'_1\lambda' n'_2\mu'}_{LM}\rangle^{\varphi}_{KL} \tag{57}$$

в осцилляторном базисе

$$\Psi^{n_1\lambda n_2\mu}_{LM} = \sum_{M_1+M_2=M} (\lambda M_1 \mu M_2|LM)\, \Psi_{n_1\lambda M_1}(\xi_1)\, \Psi_{n_2\mu M_2}(\xi_2). \tag{58}$$

---

[8]) Значение этой общей фазы обычно несущественно. При необходимости ее можно установить, например, производя сравнение с коэффициентом, транспонированным к (25).

[9]) В формулах (56), в отличие от формулы (8), предполагается, что λ, μ, как и λ', μ' — моменты по переменным ξ_1, ξ_2.

Хотя вычисление [20] м. э. (57) также весьма трудоемко, результаты удалось привести к довольно компактной форме. Для получения м. э. (56) мы можем использовать эти результаты [20], воспользовавшись тем обстоятельством, что м. э. (56а) можно выразить через м. э. (57) с помощью формулы [15]

$$\langle\lambda'\mu'|\widehat{\lambda}_0^2|\lambda\mu\rangle_{KL}^{\varphi}=\frac{a_{K\lambda\mu}}{a_{K\lambda'\mu'}}\sum_{\substack{e_1'e_2'\\ e_1'+e_2'=e_1+e_2=K}}(-1)^{n_1+n_1'}\frac{A_{n_1'\lambda'}A_{n_2'\mu'}}{A_{n_1\lambda}A_{n_2\mu}}\langle\Psi_{LM}^{n_1'\lambda'n_2'\mu'}|\widehat{\lambda}_0^2|\Psi_{LM}^{n_1\lambda n_2\mu}\rangle_{KL}^{\varphi} \tag{59}$$

и аналогично для (56б). В (59) обозначено $e_i=2n_i+l_i,\ldots$, величины $a_{K\lambda\mu}$ и A_{pq} определены согласно (13) и (17).

М. э. (56) отличны от нуля только для следующих значений $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda$, $\Delta\mu=\mu'-\mu$: $\Delta\lambda=0,\pm2$, $\Delta\mu=0,\pm2$ либо $|\Delta\lambda|=|\Delta\mu|=1$. Учитывая правила отбора [20] для м. э. (57), в случае $|\Delta\lambda|=0$ или 2, $|\Delta\mu|=0$ или 2, суммирование в формуле (59) нужно производить по значениям $\Delta e_1=-\Delta e_2=0,\pm2$, а в случае $|\Delta\lambda|=|\Delta\mu|=1$ — по значениям $\Delta e_1=-\Delta e_2=\pm1$. Производя это суммирование[10] (и убеждаясь, что результат суммирования не зависит от значений n_1 и n_2 в отдельности, как и должно быть [15]), получаем для искомых м. э. (56а) следующие формулы:

Для $\Delta\lambda=\Delta\mu=0$:

$$W=\lambda(\lambda+1)\cos^4\varphi+\mu(\mu+1)\sin^4\varphi+\left[\frac{3}{2}(Q-S)-\frac{1}{3}(S-2)R\right]\sin^2\varphi\cos^2\varphi, \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned}Q&=L(L+1)-\lambda(\lambda+1)-\mu(\mu+1),\\ R&=K(K+4)-\lambda(\lambda+1)-\mu(\mu+1),\\ S&=\frac{3Q(Q+1)-4\lambda(\lambda+1)\mu(\mu+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda+3)(2\mu-1)(2\mu+3)}.\end{aligned} \tag{61}$$

Для $|\Delta\lambda|=|\Delta\mu|=1$:

$$W=\sin\varphi\cos\varphi\left\{\frac{\Phi}{\left[(J^2-1)(j^2-1)\right]}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\begin{cases}\left((\mu+1)\sin^2\varphi-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right)\left[(K-\lambda-\mu)(K+\lambda+\mu+4)\right]^{1/2}\\ \qquad\text{при }\ \Delta\lambda=\Delta\mu=1,\\ (\mu\sin^2\varphi-\lambda\cos^2\varphi)\left[(K-\lambda-\mu+2)(K+\lambda+\mu+2)\right]^{1/2}\\ \qquad\text{при }\ \Delta\lambda=\Delta\mu=-1,\\ \left((\lambda+1)\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi\right)\left[(K-\lambda+\mu+1)(K+\lambda-\mu+3)\right]^{1/2}\\ \qquad\text{при }\ \Delta\lambda=1,\ \ \Delta\mu=-1,\\ \left(\lambda\cos^2\varphi+(\mu+1)\sin^2\varphi\right)\left[(K+\lambda-\mu+1)(K-\lambda+\mu+3)\right]^{1/2}\\ \qquad\text{при }\ \Delta\lambda=-1,\ \ \Delta\mu=1.\end{cases} \tag{62}$$

[10] При суммировании в формулах [20] следует сделать замены $L\to\lambda$, $l\to\mu$, $N\to n_1$, $n\to n_2$, $\alpha\to\cos\varphi$, $\beta\to\sin\varphi$. Заметим также, что в работе [20] м. э. (16) приведен с опечаткой; из последней скобки $\{\ldots\}$ нужно извлечь квадратный корень.

Для $|\Delta\lambda| = |\Delta\mu| = 2$:

$$W = \frac{1}{4}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\left\{\frac{\Phi}{\left[J^2(J^2-4)\,j^2(j^2-4)\right]}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\begin{cases} \left[(K-\lambda-\mu)(K-\lambda-\mu-2)(K+\lambda+\mu+4)(K+\lambda+\mu+6)\right]^{1/2} \\ \qquad \text{при}\ \ \Delta\lambda=\Delta\mu=2, \\ \left[(K-\lambda-\mu+2)(K-\lambda-\mu+4)(K+\lambda+\mu)(K+\lambda+\mu+2)\right]^{1/2} \\ \qquad \text{при}\ \ \Delta\lambda=\Delta\mu=-2, \\ \left[(K+\lambda-\mu+3)(K+\lambda-\mu+5)(K-\lambda+\mu-1)(K-\lambda+\mu+1)\right]^{1/2} \\ \qquad \text{при}\ \ \Delta\lambda=2,\ \ \Delta\mu=-2, \\ \left[(K-\lambda+\mu+3)(K-\lambda+\mu+5)(K+\lambda-\mu-1)(K+\lambda-\mu+1)\right]^{1/2} \\ \qquad \text{при}\ \ \Delta\lambda=-2,\ \ \Delta\mu=2. \end{cases} \tag{63}$$

Для $|\Delta\lambda| = 0$, $|\Delta\mu| = 2$:

$$W = \frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\left\{\frac{\Phi}{\left[(J^2-4)^2\,j^2(j^2-4)\right]}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\begin{cases} \left[(K-\lambda-\mu)(K+\lambda-\mu+1)(K-\lambda+\mu+3)(K+\lambda+\mu+4)\right]^{1/2} \\ \qquad \text{при}\ \ \Delta\mu=2, \\ \left[(K-\lambda-\mu+2)(K-\lambda+\mu+1)(K+\lambda-\mu+3)(K+\lambda+\mu+2)\right]^{1/2} \\ \qquad \text{при}\ \ \Delta\mu=-2. \end{cases} \tag{64}$$

Для $|\Delta\lambda| = 2$, $|\Delta\mu| = 0$:

$$W = -\frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\left\{\frac{\Phi}{\left[(J^2-4)(j^2-4)^2\right]}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\begin{cases} \left[(K-\lambda-\mu)(K-\lambda+\mu+1)(K+\lambda-\mu+3)(K+\lambda+\mu+4)\right]^{1/2} \\ \qquad \text{при}\ \ \Delta\lambda=2, \\ \left[(K-\lambda-\mu+2)(K+\lambda-\mu+1)(K-\lambda+\mu+3)(K+\lambda+\mu+2)\right]^{1/2} \\ \qquad \text{при}\ \ \Delta\lambda=-2. \end{cases} \tag{65}$$

В (62)–(65) использованы обозначения [20]

$$J \equiv J(\lambda,\lambda') = \lambda+\lambda'+1, \quad j \equiv j(\mu,\mu') = \mu+\mu'+1, \tag{66}$$

$$\Phi \equiv \Phi(\lambda,\lambda',\mu,\mu',L) = p(\lambda+\mu+L+1,\ \lambda'+\mu'+L+1)\times$$
$$\times\, p(\lambda+\mu-L,\ \lambda'+\mu'-L)\,p(\lambda-\mu+L,\ \lambda'-\mu'+L)p(\mu-\lambda+L,\ \mu'-\lambda'+L), \tag{67}$$

где

$$p(m,n) = \begin{cases} 1, & m=n, \\ m(m-1)\ldots(n+1), & m>n, \\ n(n-1)\ldots(m+1), & n>m. \end{cases} \tag{68}$$

Отметим, что при $\lambda = \lambda' = 0$ м. э. (64) равны нулю вследствие равенства нулю функции (67), как и м. э. (65) при $\mu = \mu' = 0$. М. э. (56б) получаются из м. э. (56а) заменой $\sin\varphi \rightleftarrows \cos\varphi$ и, кроме того, изменением знака в случае (62).

Отметим в заключение, что в этой статье ставилась задача получения формул для коэффициентов (8) общего вида. Для коэффициентов же вида (8) с малыми λ, μ, наиболее важных для трехчастичных расчетов [2], можно, кроме того, получить аналитические выражения типа (25).

После того как статья поступила в редакцию, появилась работа Рейналя [21], в которой реализуется еще один способ вычисления коэффициентов (8). Результаты, дополняющие в другом плане результаты работ [13, 21], описаны в работе [15].

Мы благодарны д-ру Ж. Рейналю за присылку препринта его работы.

Приложение

Запишем аналог формулы (25) для функций от произвольного числа векторов Якоби $\boldsymbol{\xi}_i$ (частиц). Пусть $1 \leqslant i \leqslant R$. Введем обозначения L_i для орбитального момента по вектору ξ_i, $\widetilde{L}_m$ и $\widetilde{K}_m$ — соответственно для полного орбитального момента и глобального момента в подпространстве векторов $\boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\xi}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_R$ ($\widetilde{K}_1 \equiv K$, $\widetilde{K}_R \equiv L_R$). Рассмотрим систему гиперсферических функций типа «деревьев», характеризуемых квантовыми числами $\widetilde{K}_\gamma$ $(2 \leqslant \gamma \leqslant R-1)$, L_α $(1 \leqslant \alpha \leqslant R)$, $\widetilde{L}_\beta$ $(2 \leqslant \beta \leqslant R-1)$, K, L, M. При этом моменты связываются в полный момент L по схеме связи

$$(\ldots((L_R, L_{R-1})\widetilde{L}_{R-1}, L_{R-2})\widetilde{L}_{R-2} \ldots \widetilde{L}_2, L_1)L$$

(соответствующие функции, например, для $R = 3$ записаны в [2], формула (21)). Пусть задано (псевдо) ортогональное преобразование координат

$$\boldsymbol{\xi}'_i = \sum_{j=1}^{R} c_{ij}\boldsymbol{\xi}_j. \qquad \text{(П.1)}$$

Введем параметризацию[11]:

$$c_{11} = \sin\varphi_1, \quad c_{12} = \sin\varphi_1\cos\varphi_2, \quad \ldots,$$

$$c_{1,R-1} = \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{R-2}\cos\varphi_{R-1}, \quad c_{1R} = \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{R-2}\sin\varphi_{R-1}; \qquad \text{(П.2)}$$

$$0 \leqslant \varphi_i \leqslant \pi, \quad i \neq R-1; \quad 0 \leqslant \varphi_{R-1} \leqslant 2\pi. \qquad \text{(П.3)}$$

Аналог коэффициента (25) при преобразовании (П. 1)

$$\langle L_\alpha \widetilde{L}_\beta \widetilde{K}_\gamma \,|\, L_1 = L;\ \widetilde{K}_\gamma = \widetilde{L}_\beta = 0\rangle_{KL}^{\{\varphi_i\}}$$

равен величине

$$\sqrt{\Omega_{n-3}}(4\pi)^{(3-n)/6}(-1)^{\sum_{i=2}^{R-1}\widetilde{L}_i+(K+L)/2}\left(\frac{K-L}{2}\right)!\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\left[N^n_{K;L_0}\Gamma\left(\frac{K-L+n-3}{2}\right)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\prod_{i=1}^{R}[L_i]\prod_{i=2}^{R-1}[\widetilde{L}_i]\right]^{1/2}\begin{pmatrix} L & L_1 & \widetilde{L}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{L}_2 & L_2 & \widetilde{L}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times\ldots\times\begin{pmatrix} \widetilde{L}_{R-2} & L_{R-2} & \widetilde{L}_{R-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \widetilde{L}_{R-1} & L_{R-1} & L_R \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Psi^n_{K;L_1\widetilde{K}_2}(\varphi_1)\Psi^{n-3}_{\widetilde{K}_2;L_2\widetilde{K}_1}(\varphi_2)\times\ldots\times\Psi^6_{\widetilde{K}_{R-1};L_{R-1}L_R}(\varphi_{n-1}). \qquad \text{(П.4)}$$

---

[11] Эта параметризация отличается от параметризации (6), (14) заменой cos на sin , что сделано с целью использования в (П. 4) стандартных обозначений [2] типа (3).

Здесь $n = 3R$, $\Psi^m(\varphi)$ задаются формулой (10) работы [2], причем области определения их аргументов расширены до областей (П. 3), $N^n_{K;L_0}$ получается из формулы (10) [2], $\Omega_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$. Формула (П. 4) аналогична соответствующим формулам [2] для $R = 2, 3$. Явная формула (П. 4) может быть полезна для проверки правильности коэффициентов преобразования, вычисленных рекуррентным способом [3].

Литература

1. *Виленкин Н. Я., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **2**, 906, 1965.
2. *Эфрос В. Д.* ЯФ, **15**, 226, 1972.
3. *Кильдюшов М. С.* ЯФ, **16**, 217, 1972.
4. *Raynal J., Revai J.* Nuovo Cim., **A68**, 612, 1970.
5. *Юцис А. И., Бандзайтис А. А.* Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс, 1965.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведении. Физматгиз, 1903.
7. *Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф.* Нуклонные ассоциации в легких ядрах. Наука, 1969.
8. *Мошинский М.* Гармонический осциллятор в современной физике: от атомов до кварков. Мир, 1972.
9. *Bargmann V., Moshinsky M.* Nucl. Phys., **18**, 697, 1960.
10. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. Наука, 1965.
11. *Хамермеш М.* Теория групп. Мир, 1966.
12. *Смородинский Я. А., Эфрос В. Д.* Препринт ИАЭ-2009, 1970.
13. *Эфрос В. Д.* ЯФ, **13**, 1318, 1971.
14. *Симонов Ю. А.* ЯФ, **3**, 630, 1966.
15. *Эфрос В. Д.* Препринт ИАЭ-2233, 1972.
16. *Gal A.* Ann. Phys. (N. Y.), **49**, 341, 1968.
17. *Arima A., Terasawa T.* Progr. Theor. Phys., **23**, 416, 1960.
18. *Baranger M., Davies K. T. B.* Nucl. Phys., **79**, 403, 1966.
19. *Efros V. D.* Nucl. Phys. (to be published).
20. *Talman J. D., Landé A.* Nucl. Phys., **A163**, 249, 1971.
21. *Raynal J.* Preprint D. Ph-T/Doc/72/37, submitted to Nuovo Cim.

Симметричный базис в задаче трех тел

Ю. Нири, Я. А. Смородинский

1. Введение

В теории представлений групп $O(n)$ обычно рассматривается каноническая цепочка Гельфанда—Цейтлина $O(n) \supset O(n-1) \supset \ldots$ Такая цепочка, однако, неудобна, когда мы имеем дело с задачей многих тел, в которой более естественной является цепочка $O(n) \supset O(n-3) \supset \ldots$, отвечающая понижению числа частиц на единицу (т. е. числа степеней свободы на три). Кроме того, в задаче многих тел целесообразно следить за схемами сложения угловых моментов и заботиться о том, чтобы при всех поворотах сохранялся полный угловой момент J и его проекция M. При этом, естественно, уменьшается число параметров группы (число углов Эйлера), так как достаточно рассматривать не все вращения, а лишь те из них, которые не перепутывают компоненты разных векторов.

В задаче трех тел исходные два вектора $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$ порождают группу $O(6)$. Из этой группы, согласно сказанному, надо выделить группу $O(3)$, чтобы в число наблюдаемых включать угловой момент J. Тогда из 15 углов группы $O(6)$ остаются лишь 5, характеризующие положение двух векторов $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$ в шестимерном пространстве. Три угла задают положение плоскости векторов $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$ в трехмерном пространстве, еще два определяют угол между этими векторами и их длину (при условии $\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$).

В разных работах, наших [1–3] и других авторов (например, [4–6]), делались попытки построить полные системы собственных функций для задачи трех тел. Построение этих функций основывалось на инвариантности лапласиана относительно $O(6)$. При этом выбирались разные пути конкретного счета. В одном из них собственные функции отвечают классификации трехчастичных состояний согласно цепочке

$$O(3) \supset SU(3) \supset O(6),$$

характеризуемой пятью квантовыми числами. Четыре из них — K, J, M, ν, где K — шестимерный «угловой момент», соответствующий собственному значению 6-лапласиана; J — обычный трехмерный момент количества движения и M — его проекция; ν — число, характеризующее перестановочную симметрию. К заданному набору K, J, M, ν принадлежит, вообще говоря, несколько состояний системы. Пятое квантовое число Ω, которое снимает кратность состояний, вводится как собственное значение эрмитового оператора $\widehat{\Omega}$, коммутирующего с генераторами $O(3)$. (Оператор O впервые введен Рака [7]; его явный вид получен в декартовых координатах Бадалян (частное сообщение), а в полярных координатах он получен в работе [8].) Нахождение собственных функций $\Phi_{\nu\Omega}^{KLM}$, соответствующих этому выбору квантовых чисел, требует при $K \geqslant 8$ совместного решения громоздких уравнений $\Delta\Phi = -K(K+4)\Phi$ и $\widehat{\Omega}\Phi = \Omega\Phi$.

Другой способ построения системы функций основан на графическом методе деревьев. С помощью простого алгоритма строится функция с квантовыми числами K, J, M, j_1, j_2. В этом случае $\Phi_{KJM}^{j_1 j_2}$ по определению являются собственными функциями шестимерного лапласиана $O(6)$, но не имеют определенных свойств перестановочной симметрии. Поэтому от полученной системы собственных функций

надо перейти к функциям, просто преобразующимся при перестановках координат частиц, т. е. к системе с квантовыми числами K, J, M, ν, Ω. Вычислить коэффициент перехода в явном виде еще не удалось. Однако, используя результат предыдущей работы [9], можно сделать частичное преобразование, которое приводит к системе с квантовыми числами K, J, M, ν, $(j_1 j_2)$. Эта система, вообще говоря, еще не ортонормирована. Ортонормированность достигается либо каким-нибудь стандартным путем, либо составлением из функций $\Phi_{KJM}^{\nu(j_1 j_2)}$ собственных функций оператора $\widehat{\Omega}$. Решение соответствующих уравнений не вызывает трудностей. Эти уравнения, однако, оказываются алгебраическими уравнениями высокого порядка (кроме уравнений для первых собственных значений). Поэтому вряд ли можно представить их решения в явном виде.

Решение, полученное в настоящей статье, является естественной записью базиса для трех частиц.

2. Групповые свойства. Параметризация

Групповые свойства, а также выбор координат и параметризация описывались в более ранних наших работах [1, 2] довольно подробно. Выпишем еще раз найденные формулы в несколько измененном виде.

Для системы трех частиц радиус-векторы $\mathbf{x}_i$, $(i = 1, 2, 3)$ фиксируются условием

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0. \tag{1}$$

Для одинаковых масс координаты Якоби вводятся в виде

$$\boldsymbol{\xi} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \qquad \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \tag{2}$$

при этом

$$\xi^2 + \eta^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2, \tag{3}$$

где ρ — радиус пятимерной сферы.

Мы рассматриваем такие базисные функции, для которых существует квантовое число ν, связанное с перестановочной симметрией. Перестановки перепутывают компоненты $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$, поэтому полезно рассматривать шестимерный вектор $X = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$, для которого

$$P_{12}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta \\ \xi \end{pmatrix},$$

$$P_{13}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} P_{12}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$P_{14}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & \sin\frac{4\pi}{3} \\ -\sin\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} P_{12}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Далее, вводится комплексный вектор

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}, \tag{5}$$

для которого перестановки выражаются особенно просто:

$$\begin{aligned} P_{12}z &= z^*, \quad P_{13}z = e^{2/3\pi i}z^*, \quad P_{23}z = e^{4/3\pi i}z^*, \\ P_{12}z^* &= z, \quad P_{13}z^* = e^{4/3\pi i}z, \quad P_{23}z^* = e^{2/3\pi i}z^*. \end{aligned} \tag{6}$$

Переход от векторов $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$ к векторам $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^*$ можно представить как произведение двух преобразований

$$\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \tag{7}$$

или, введением $\boldsymbol{\zeta} = i\boldsymbol{\eta}$,

$$\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(Первая из матриц, очевидно, описывает поворот на угол $\pi/4$.)

На векторах $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}^*$ можно построить две группы: $O(6)$ и $SU(3)$. Генераторы этих групп выражаются соответственно как

$$a_{ik} = X_i \frac{\partial}{\partial X_k} - X_k \frac{\partial}{\partial X_i} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, 6) \tag{9}$$

и

$$A_{ik} = iz_i \frac{\partial}{\partial z_k} - iz_k^* \frac{\partial}{\partial z_i^*} \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Вектор $\mathbf{z}$ параметризован следующим образом:

$$\mathbf{z} = \rho e^{-i\lambda/2}\left(\cos\frac{a}{2}\mathbf{l}_1 + i\sin\frac{a}{2}\mathbf{l}_2\right). \tag{11}$$

Удобно воспользоваться тем, что три вектора $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ образуют треугольник. Тогда a и λ характеризуют форму этого треугольника, вершины которого определены положением трех частиц. Положение плоскости треугольника в пространстве определяется единичными векторами $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$, лежащими в плоскости треугольника; вместе с третьим вектором $\mathbf{l} = [\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2]$ они образуют подвижную систему координат. Ориентация векторов $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ и $\mathbf{l}$ по отношению к неподвижной системе координат задается с помощью углов Эйлера φ_1, θ, φ_2. Отметим, что пять параметров (углов) — φ_1, θ, φ_2 и a, λ — задают вращение на пятимерной сфере.

Наконец, для полноты приведем генераторы $O(3)$

$$J_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) = \frac{1}{2}\left(iz_i\frac{\partial}{\partial z_k} - iz_k\frac{\partial}{\partial z_i} + iz_i^*\frac{\partial}{\partial z_k^*} - iz_k^*\frac{\partial}{\partial z_i^*}\right), \tag{12}$$

генераторы группы деформаций неподвижного треугольника

$$B_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}) = \frac{1}{2}\left(iz_i\frac{\partial}{\partial z_k} + iz_k\frac{\partial}{\partial z_i} - iz_i^*\frac{\partial}{\partial z_k^*} - iz_k^*\frac{\partial}{\partial z_i^*}\right) \tag{13}$$

и скалярный оператор

$$N = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,A = \frac{1}{2}\sum_k\left(z_k\frac{\partial}{\partial z_k} - z_k^*\frac{\partial}{\partial z_k^*}\right), \tag{14}$$

собственным значением которого является квантовое число ν.

29 Зак. 198

3. Базисные функции

Разному выбору параметризации соответствуют системы базисных функций, характеризуемые разными наборами квантовых чисел. Симметризованные по перестановкам собственные функции удобно рассматривать в пространстве $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}^*$, а функции $\Phi^{j_1 j_2}_{KJM}$ определены в пространстве $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$. Последние хорошо известны: это функции деревьев (по терминологии работы [10])

$$\Phi^{j_1 j_2}_{KJM}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{m_1+m_2=M} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \Phi^{j_1 j_1 m_1 m_2}_{K}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = Y^{j_1 j_2}_{JM}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \Psi_{K j_1 j_2}(\Phi). \qquad (15)$$

Здесь

$$Y^{j_1 j_2}_{JM}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \sum_{m_1 m_2} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} Y_{j_1 m_1}(\mathbf{m}) Y_{j_2 m_2}(\mathbf{n}), \qquad (16)$$

где

$$\mathbf{m} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\eta}, \quad \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi},$$

а j_1 и j_2 — моменты, связанные с векторами $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$. Считая в дальнейшем для простоты $\rho = 1$ (т. е. $\xi^2 + \eta^2 = 1$), вводим угол Φ:

$$\cos\Phi = \boldsymbol{\xi}, \quad \sin\Phi = \boldsymbol{\eta}.$$

$$\Psi_{K j_1 j_2}(\phi) = N_{K j_1 j_2} (\sin\Phi)^{j_1} (\cos\Phi)^{j_2} P^{(j_1+1/2, j_2+1/2)}_{(K-j_1-j_2)/2}(\cos 2\Phi). \qquad (17)$$

Нормирующий множитель, известный из теории полиномов Якоби, равен

$$N_{K j_1 j_2} = \left[\frac{2(K+2)\,\Gamma((K-j_1-j_2)/2+1)\,\Gamma((K+j_1+j_2)/2+2)}{\Gamma((K-j_1+j_2)/2+3/2)\,\Gamma((K+j_1-j_2)/2+3/2)} \right]^{1/2}. \qquad (18)$$

Вместо полинома Якоби можно вводить d-функцию Вигнера[1] По определению [11]

$$P^{(\alpha,\beta)}_k(\cos 2\theta) = (-1)^{b-a} \left[\frac{(l-b)!(l+b)!}{(l-a)!(l+a)!} \right]^{1/2} (\sin\theta)^{b-a} (\cos\theta)^{-b-a} d^l_{ab}(\cos 2\theta),$$
$$l = k + \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad a = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad b = \frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (19)$$

[1] При переходе от полинома Якоби к d-функции Вигнера уместно обратить внимание на некоторое расхождение в обозначениях. В отличие от (19) в книге [12] дано определение

$$P^{\alpha,\beta}_k(\cos 2\theta) = i^{b-a} \left[\frac{(l-b)!(l+b)!}{(l-a)!(l+a)!} \right]^{1/2} (\sin\theta)^{b-a} (\cos\theta)^{-b-a} d^l_{ab}(\cos 2\theta).$$

Появление i объясняется тем, что унитарные матрицы в [12] задаются в виде

$$u(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix},$$

в котором средняя матрица унитарна, в то время как в [11] она ортогональна:

$$u(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}.$$

В терминах d-функции собственная функция (15) принимает вид

$$\Phi^{j_1 j_2}_{KJM}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = 2(K+2)^{1/2}(-1)^{-j_1-1/2} \times$$
$$\times \sum_{m_1 m_1} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} Y_{j_1 m_1}(\mathbf{m}) Y_{j_2 m_2}(\mathbf{n}) \frac{1}{(\sin 2\Phi)^{1/2}} d^{(K+1)/2}_{(j_1+j_2+1)/2,\,(j_2-j_1)/2}(\cos 2\Phi). \qquad (20)$$

Фактор $(\sin 2\Phi)^{-1/2}$ возникает из-за разной нормировки по углу Φ полинома Якоби и d-функции. Полином Якоби нормирован в шестимерном пространстве, элемент объема здесь

$$\cos^2\Phi \sin^2\Phi \, d\Phi = \frac{1}{4} \sin^2 2\Phi \, d\Phi;$$

для d-функции же, нормированной в обычном трехмерном пространстве, мера $\sin 2\Phi d \sin 2\Phi$.

Переход к базисной функции, построенной на паре векторов $\boldsymbol{\eta}'$, $\boldsymbol{\xi}'$, связанной с $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$ преобразованием

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}' \\ \boldsymbol{\xi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

совершается с помощью коэффициента $\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\varphi}_{KJM}$, полученного в работах [13, 14]:

$$\Phi^{j_1 j_2}_{KJM}(\boldsymbol{\eta}', \boldsymbol{\xi}') = \sum_{j_1' j_2'} \langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\varphi}_{KJM} \Phi^{j_1' j_2'}_{KJM}(\boldsymbol{\eta}, \xi). \qquad (22)$$

Сравнивая (21) и (8), видим, что для перехода базисной функции от $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$ к функции от вектора $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}^*$, надо воспользоваться коэффициентом $\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\varphi}_{KJM}$ при значении $\varphi = \pi/4$, предварительно заменив $\boldsymbol{\eta}$ на $\boldsymbol{\zeta}$. В дальнейшем будет показано, каким образом полученная функция $\Phi^{j_1 j_2}_{KJM}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)$ преобразуется к $\Phi^{\nu(j_1 j_2)}_{KJM}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)$. Сначала, однако, остановимся подробнее на коэффициенте преобразования (22).

4. Коэффициент преобразования $\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\varphi}_{KJM}$

В работе [13] коэффициент преобразования определен как интеграл перекрытия $\Phi^{j_1' j_2'}_{KJM}(\boldsymbol{\eta}, \xi)$ и $\Phi^{j_1 j_2}_{KJM}(\boldsymbol{\eta}', \xi')$:

$$\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\varphi}_{KLM} = \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m_1' m_2'}} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{JM}_{j_1' m_1' j_2' m_2'} \int \left(\Phi^{j_1' j_2' m_1' m_2'}_{K}(\boldsymbol{\eta}, \xi)\right)^* \Phi^{j_1 j_2 m_1 m_2}_{K}(\boldsymbol{\eta}', \xi')\, d\boldsymbol{\eta}\, d\boldsymbol{\xi}. \qquad (23)$$

Как это отмечалось выше, преобразование происходит при заданных J, M. Явный вид коэффициента здесь вычисляется с помощью производящей функции для $\phi^{j_1 j_2 m_1 m_2}_{K}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$.

В [14] вычисление проводится в два этапа. Сначала рассматривается коэффициент, соответствующий представлению, в котором вектор $\boldsymbol{\eta}$ разложен по двум «новым» векторам $\boldsymbol{\xi}'$ и $\boldsymbol{\eta}'$, а потом делается то же самое для второго вектора $\boldsymbol{\xi}$. Как показано в [14], коэффициент преобразования, соответствующий переходу $\phi^{j_1 0}_{K_1 j_1 m_1}(\boldsymbol{\eta}, 0)$ в $\Phi^{pq}_{K_1 j_1 m_1}(\boldsymbol{\eta}', \boldsymbol{\xi}')$, имеет вид

$$\langle pq|j_1 0\rangle^{\varphi}_{Kj_1m_1} = (-1)^{(K_1+j_1)/2}\cdot 2^{(K_1-j_1)/2}\times$$
$$\times\left[\frac{\left(\frac{K_1-p-q}{2}\right)!\left(\frac{K_1+p+q}{2}+1\right)!\left(\frac{K_1-j_1}{2}\right)!(K_1+j_1+1)!!}{(K_1-p+q+1)!!(K_1+p-q+1)!!\left(\frac{K_1+j_1}{2}+1\right)!(K_1-j_1+1)!!}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} p & q & j_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\left[(2p+1)(2q+1)\right]^{1/2}(\cos\varphi)^p(\sin\varphi)^q P^{(p+1/2,q+1/2)}_{(K_1-p-q)/2}(-\cos 2\varphi) \qquad (24)$$

и является на самом деле функцией деревьев в $O(6)$. Формула (24) похожа на формулу, описывающую $O(2)$-вращение, которая преобразует полином Лежандра с помощью функции $D^J_{0M}=P_{JM}$, являющейся функцией деревьев в $O(2)$. Такая же процедура должна быть проделана для коэффициента преобразования $\Phi^{0j_2}_{K_2j_2m_2}(0,\xi)$ в $\Phi^{sr}_{K_2j_2m_2}(\eta',\xi')$, после чего, собрав моменты $p+r=j_1'$ и $q+s=j_2'$ (с полным моментом J и заданным $K=K_1+K_2$), получим общий вид коэффициента

$$\langle j_1'j_2'|j_1j_2\rangle^{\varphi}_{KJM} = \frac{\pi}{4}(-1)^{J+(K+j_1+j_2)/2}\times$$
$$\times\left(\frac{K_1-j_1}{2}\right)!\left(\frac{K_1+j_1+1}{2}\right)!\left(\frac{K_2-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K_2+j_2+1}{2}\right)!\times$$
$$\times\left[\frac{\left(\frac{K-j_1'-j_2'}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1'+j_2'}{2}+1\right)!(K+j_1'+j_2'+1)!!(K+j_1'-j_2'+1)!!}{\left(\frac{K-j_1-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K-j_1+j_2}{2}+1\right)!(K-j_1+j_2+1)!!(K+j_1-j_2+1)!!}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\sum_{prqs}\left\{\!\!\left\{\begin{matrix} p & r & j_1'\\ q & s & j_2'\\ j_1 & j_2 & J\end{matrix}\right\}\!\!\right\}\left[\Gamma\left(\frac{K_1-p+q}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_1+p-q}{2}+\frac{3}{2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\Gamma\left(\frac{K_2-r+s}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_2+r-s}{2}+\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}(\cos\varphi)^{p+s}(\sin\varphi)^{q+r}\times$$
$$\times P^{(p+1/2,q+1/2)}_{(K_1-p-q)/2}(-\cos 2\varphi)P^{(s+1/2,r+1/2)}_{(K_2-s-r)/2}(-\cos 2\varphi). \qquad (25)$$

Здесь введено обозначение

$$\left\{\!\!\left\{\begin{matrix} p & r & j_1'\\ q & s & j_2'\\ j_1 & j_2 & J\end{matrix}\right\}\!\!\right\} = \left[(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_1'+1)(2j_2'+1)\right]^{1/2}(2p+1)(2q+1)(2s+1)\times$$
$$\times(2r+1)\begin{pmatrix} p & q & j_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & r & j_2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r & j_1'\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & s & j_2'\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} p & r & j_1'\\ q & s & j_2'\\ j_1 & j_2 & J\end{Bmatrix}, \qquad (26)$$

которое подчеркивает способ преобразования моментов.

В работах [13] и [14] отличаются друг от друга не только техника вычислений, но и вид конечных формул. Поэтому целесообразно найти явную связь обеих форм коэффициентов преобразования $\langle j_1'j_2'|j_1j_2\rangle^{\varphi}_{KJM}$ и продемонстрировать их тождественность. Это и было сделано в работе [9]. При этом был найден более простой способ вывода этого коэффициента — замена интеграла перекрытия матричным элементом некоторой экспоненциальной функции, равной на самом деле единице.

Вместо вычисления матричного элемента от экспоненты мы разложим ее в ряд по степеням $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и преобразуем этот ряд в ряд по полиномам Якоби — собственным функциям лапласиана. Разложение это удобно проводить в два этапа: сначала разложить экспоненту по сферическим функциям Бесселя, а потом собирать эти функции в полиномы Якоби. Так как этот способ вычисления коэффициента преобразования может оказаться полезным и для других коэффициентов в теории угловых моментов, мы его приведем подробно.

Возьмем шестимерный вектор

$$\begin{pmatrix} P_i \\ iQ_i \end{pmatrix}.$$

Вычислим матричный элемент по J и M экспоненциальной функции

$$\exp\left[-2\left(P_i^2+Q_i^2\right)\right], \tag{27}$$

на которую в конце будет наложено условие $P_i^2-Q_i^2=0$. Преобразуем один из множителей в P_i^2 и Q_i^2, выразив P_i и Q_i через P_k и Q_k с помощью преобразования (21). Тогда имеем

$$\begin{aligned}&\langle j_1'j_2'\,|\exp\left[-2(P_i^2+Q_i^2)\right]|\,j_1j_2\rangle_{KJM}=\\&=\langle j_1'j_2'\,|\exp\left[-2P_iP_k\cos\varphi-2Q_iP_k\cos\varphi+2iQ_iP_k\sin\varphi+2iP_iQ_k\sin\varphi\right]|\,j_1j_2\rangle_{KJM}.\end{aligned}\tag{28}$$

Матричный элемент в явном виде пишется как

$$\begin{aligned}\sum_{m_1m_2}C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2}C^{JM}_{j_1'm_1'j_2'm_2'}\int&\exp\left[-2P_iP_k\cos\varphi-2Q_iQ_k\cos\varphi+2iQ_iP_k\sin\varphi+2iP_iQ_k\sin\varphi\right]\times\\&Y^*_{j_1'm_1'}(\widehat{P}_k)Y^*_{j_2'm_2'}(\widehat{Q}_k)Y_{j_1m_1}(\widehat{P}_i)Y_{j_2m_2}(\widehat{Q}_i)d\widehat{P}_i\,d\widehat{Q}_i\,d\widehat{P}_k\,d\widehat{Q}_k,\end{aligned}\tag{29}$$

где $\widehat{P}_i$, $\widehat{Q}_i$, $\widehat{P}_k$ и $\widehat{Q}_k$ — обычные трехмерные полярные углы. (Заметим, что выражение (29) с точностью до нормировки совпадает с формулой для коэффициента преобразования в [13].) Если теперь выделить в этой сумме член с собственными функциями, которые характеризуются квантовыми числами j_1, j_2, j_1', j_2', то этот член (с точностью до нормировки) будет равен искомому коэффициенту, поскольку интеграл перекрытия по определению есть матричный элемент от единицы в смешанном представлении.

Далее, используя хорошо известное разложение плоской волны

$$e^{ipx}=\sum_{\lambda\mu}i^{\lambda}j_{\lambda}(px)Y^*_{\lambda\mu}(p)Y_{\lambda\mu}(x)$$

и разлагая в ряд подынтегральную экспоненту в (29), приходим к длинному, но простому по форме выражению

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m_1m_2\\m_1'm_2'}}C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2}C^{JM}_{j_1'm_1'j_2'm_2'}\int\sum_{\substack{prqs\\\pi\rho\kappa\sigma}}&(-1)^{(p+r+q+s)/2}j_p(2iP_iP_k\cos\varphi)j_r(2Q_iP_k\sin\varphi)\times\\&\times j_q(2P_iQ_k\sin\varphi)\,j_s(2iQ_iQ_k\cos\varphi)Y^*_{p\pi}(\widehat{P}_i)Y^*_{q\kappa}(\widehat{P}_i)Y_{j_1m_1}(\widehat{P}_1)Y^*_{r\rho}(Q_i)Y^*_{s\sigma}(Q_i)\times\\&\times Y_{j_2m_2}(Q_i)Y_{p\pi}(\widehat{P}_k)Y_{r\rho}(\widehat{P}_k)Y^*_{j_1'm_1'}(\widehat{P}_k)Y_{q\kappa}(\widehat{Q}_k)Y_{s\sigma}(\widehat{Q}_k)Y^*_{j_2'm_2'}(\widehat{Q}_k)d\widehat{P}_i\,d\widehat{Q}_i\,d\widehat{P}_k\,d\widehat{Q}_k.\end{aligned}\tag{30}$$

Используя известные свойства шаровых функций

$$Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)=(-1)^mY_{l-m}(\vartheta,\varphi)$$

и

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta Y_{l_1m_1}(\vartheta,\varphi)Y_{l_2m_2}(\vartheta,\varphi)Y^*_{l_3m_3}(\vartheta,\varphi) = \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}\right]^{1/2} C^{l_30}_{l_10l_20}C^{l_3m_3}_{l_1m_1l_2m_2}$$

(см. [11], с. 124, ф. (1) и с. 131 ф. (5)), перепишем (30) в виде

$$\frac{\pi^2}{16}\sum_{\substack{prqs\\ \pi\rho\kappa\sigma}}\sum_{\substack{m_1m_2\\ m_1'm_2'}} C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2}C^{JM}_{j_1'm_1'j_2'm_2'}C^{j_1m_1}_{p\pi q\kappa}C^{j_2m_2}_{r\rho s\sigma}C^{j_1'm_1'}_{p\pi r\rho}C^{j_2'm_2'}_{q\kappa s\sigma}C^{j_10}_{p0q0}C^{j_20}_{r0s0}C^{j_1'0}_{p0r0}C^{j_2'0}_{q0s0} \times$$
$$\times\frac{(2p+1)(2r+1)(2q+1)(2s+1)}{[(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_1'+1)(2j_2'+1)]^{1/2}}\, j_p(2iP_iP_k\cos\varphi)\times$$
$$\times\, j_r(2Q_iP_k\sin\varphi)j_q(2P_iQ_k\sin\varphi)\, j_s(2iQ_iQ_k\cos\varphi)(-1)^{m_1+m_2-j_1-j_2+1/2(p+r+q+s)}. \quad (31)$$

Суммирование коэффициентов Клебша — Гордана дает $9j$-коэффициент

$$\sum_{m_im_{ik}} C^{j_{12}m_{12}}_{j_1m_1j_2m_2}C^{j_{34}m_{34}}_{j_3m_3j_4m_4}C^{jm}_{j_{12}m_{12}j_{34}m_{34}}C^{j_{13}m_{13}}_{j_1m_1j_3m_3}C^{j_{24}m_{24}}_{j_2m_2j_4m_4}C^{j'm'}_{j_{13}m_{13}j_{24}m_{24}} =$$
$$= \delta_{jj'}\delta_{mm'}\left[(2j_{12}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)(2j_{34}+1)\right]^{1/2}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12}\\ j_3 & j_4 & j_{34}\\ j_{13} & j_{24} & j\end{Bmatrix}.$$

Поэтому в (31) мы можем избавиться от ряда сумм, вводя $9j$-коэффициент, выделив таким образом квантовые числа j_1, j_2, j_1', j_2', J:

$$\frac{\pi^2}{16}\sum_{prqs}\begin{Bmatrix} p & r & j_1'\\ q & s & j_2'\\ j_1 & j_2 & J\end{Bmatrix} C^{j_1'0}_{p0r0}C^{j_2'0}_{q0s0}C^{j_10}_{p0q0}C^{j_20}_{r0s0}(2p+1)(2r+1)(2q+1)(2s+1)\times$$
$$\times(-1)^{1/2(p+r+q+s)}j_p(2iP_iP_k\cos\varphi)j_r(2Q_iP_k\sin\varphi)j_q(2P_iQ_k\sin\varphi)\, j_s(2iQ_iQ_k\cos\varphi). \quad (32)$$

Для дальнейших преобразований используем формулу разложения произведения двух функций Бесселя в сумму гипергеометрических функций (см. [15]). При этом заменим в стандартных формулах гипергеометрические функции полиномами Якоби (или d-функциями Вигнера). Заменяя еще длины векторов P_i, P_k, Q_i, Q_k единицами, можем написать

$$j_p(2i\cos\varphi)\, j_q(2\sin\varphi) = \frac{\pi}{4}\sum_{K_1} P^{(p+1/2,q+1/2)}_{(K_1-p-q)/2}(-\cos 2\varphi)\times$$
$$\times\frac{(i)^{K_1-q}(\cos\varphi)^p(\sin\varphi)^q}{\Gamma\left(\frac{K_1+p-q}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_1-p+q}{2}+\frac{3}{2}\right)}j_s(2i\cos\varphi)j_r(2\sin\varphi) =$$
$$= \frac{\pi}{4}\sum_{K_2} P^{(s+1/2,r+1/2)}_{(K_2-s-r)/2}(-\cos 2\varphi)\frac{(i)^{K_2-r}(\cos\varphi)^s(\sin\varphi)^r}{\Gamma\left(\frac{K_2+s-r}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_2-p+q}{2}+\frac{3}{2}\right)}. \quad (33)$$

Выбирая из этих сумм только член с определенным $K = K_1 + K_2$, приходим к выражению

$$\frac{1}{(16)^2}\sum_{prqs}\left\{\begin{Bmatrix} p & r & j_1' \\ q & s & j_2' \\ j_1 & j_2 & J\end{Bmatrix}\right\}\frac{(-1)^{K/2}}{\Gamma\left(\frac{K_1-p+q}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_1+p-q}{2}+\frac{3}{2}\right)}\times$$
$$\times\left[\Gamma\left(\frac{K_2-r+s}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_2+r-s}{2}+\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times(\cos\varphi)^{p+s}(\sin\varphi)^{q+r}P^{(p+1/2,q+1/2)}_{(K_1-p-q)/2}(-\cos 2\varphi)P^{(s+1/2,r+1/2)}_{(K_2-s-r)/2}(-\cos 2\varphi). \qquad (34)$$

Формула (34) совпадает с общим видом коэффициента $\langle j_1'j_2'|j_1j_2\rangle^{\varphi}_{KJM}$, данным в работе [14].

Наконец, приведем ортонормированный коэффициент преобразования в терминах d-функций, что облегчает интерпретацию разных формул с помощью шестимерных вращений:

$$\langle j_1'j_2'|j_1j_2\rangle^{\varphi}_{KJM}=\frac{\pi}{2}(-1)^{J+1}\left(\frac{K_1-j_1}{2}\right)!\left(\frac{K_1+j_1+1}{2}\right)!\left(\frac{K_2-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K_2+j_2+1}{2}\right)!\times$$
$$\times\frac{a_{Kj_1'j_2'}}{a_{Kj_1j_2}}\sum_{prqs}\left[\left(\frac{K_1-p+q+1}{2}\right)!\left(\frac{K_1+p-q+1}{2}\right)!\left(\frac{K_1-p-q}{2}\right)!\left(\frac{K_1+p+q}{2}+1\right)!\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{K_2-s+r+1}{2}\right)!\left(\frac{K_2+s-r+1}{2}\right)!\left(\frac{K_2-r-s}{2}\right)!\left(\frac{K_2+r+s}{2}\right)!\right]^{1/2}\times$$
$$\times\left\{\begin{Bmatrix} p & r & j_1' \\ q & s & j_2' \\ j_1 & j_2 & J\end{Bmatrix}\right\}\frac{1}{\sin 2\varphi}d^{(K_1+1)/2}_{(q+p+1)/2,(p-q)/2}(2\varphi)\,d^{(K_2+1)/2}_{(r+s+1)/2,(s-r)/2}(2\varphi), \qquad (35)$$

где

$$a_{Kj_1j_2}=\left[\left(\frac{K-j_1-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1+j_2}{2}+1\right)!\left(\frac{K-j_1+j_2+1}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1-j_2+1}{2}+1\right)!\right]^{1/2}.$$

Ввиду того, что нормировки полиномов Якоби и d-функций известны, по ходу вычислений нет необходимости следить за нормировкой. Напомним еще раз, что множитель $(\sin 2\varphi)^{-1}$ связан с шестимерной нормировкой.

Написанная формула (35) похожа на формулу «трех d-функций» в $SU(2)$: она выражает разложение одной из d-функций $O(6)$ по произведениям двух d-функций специального вида. Как обычно в выражениях такого типа, в этой формуле существует произвол в выборе K_1 или K_2 $(K_1+K_2=K)$. Удобно выбрать, например, K_2 так, чтобы верхний индекс стал равным одному из нижних, т. е. положить $K_2=r+s=j_2$; в этом случае d-функция вырождается в одночлен.

5. Применение $\langle j_1'j_2'|j_1j_2\rangle^{\varphi}_{KJM}$ в задаче трех тел

Используем полученные формулы для вычисления коэффициентов перехода от функции $\Phi^{j_1'j_2'}_{KJM}(\eta,\xi)$ к функции $\Phi^{j_1j_2}_{KJM}(\mathrm{z},\mathrm{z}^*)$. Как было указано, этого достигаем применением коэффициента преобразования при значении $2\varphi=\pi/2$, заменив сначала η на $i\eta=\zeta$. (Аргументом d-функций в (35) является 2φ. Повороты на $\pi/2$ — их называют коэффициентами Вейля — входят во многие формулы теории представлений $O(n)$). Функция от новых аргументов

$$\Phi^{j_1j_2}_{KJM}(\mathrm{z},\mathrm{z}^*)=\sum_{j_1'j_2'}\langle j_1'j_2'|j_1j_2\rangle^{\pi/4}_{KJM}\Phi^{j_1'j_2'}_{KJM}(\zeta,\xi) \qquad (36)$$

пишется в следующем явном виде:

$$\Phi^{j_1 j_2}_{KJM}(z, z^*) = \frac{\pi}{2}(-1)^{J+1}\left(\frac{K_1 - j_1}{2}\right)!\left(\frac{K_1 + j_1 + 1}{2}\right)!\left(\frac{K_2 - j_2}{2}\right)!\left(\frac{K_2 + j_2 + 1}{2}\right)! \times$$
$$\times \sum_{\substack{j_1' j_2' \\ m_1' m_2'}} C^{JM}_{j_1' m_1' j_2' m_2'} N_{K j_1' j_2'} \frac{a_{K j_1' j_2'}}{a_{K j_1 j_2}} \sum_{prqs}\left[\left(\frac{K_1 - p + q + 1}{2}\right)!\left(\frac{K_1 + p - q + 1}{2}\right)! \times\right.$$
$$\left.\times \left(\frac{K_1 - p - q}{2}\right)!\left(\frac{K_1 + p + q}{2} + 1\right)!\right]^{-1/2}\left[\left(\frac{K_2 - s + r + 1}{2}\right)!\left(\frac{K_2 + s - r + 1}{2}\right)! \times\right.$$
$$\left.\times \left(\frac{K_2 - r - s}{2}\right)!\left(\frac{K_2 + r + s}{2} + 1\right)!\right]^{-1/2}\left\{\begin{matrix} p & r & j_1' \\ q & s & j_2' \\ j_1 & j_2 & J \end{matrix}\right\} d^{(K_1+1)/2}_{(q+p+1)/2,\,(p-q)/2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times$$
$$\times\, d^{(K_2+1)/2}_{(r+s+1)/2,\,(s-r)/2}\left(\frac{\pi}{2}\right) Y_{j_1' m_1'}(z) Y_{j_2' m_2'}(z^*) \frac{1}{z^2 - z^{*2}}\, d^{(K+1)/2}_{(j_1'+j_2'+1)/2,\,(j_1'-j_2')/2}\left(z^2 + z^{*2}\right), \qquad (37)$$

где использованы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(z^2 + z^{*2}\right) &= \xi^2 - \eta^2, \\ z^2 - z^{*2} &= 2i \sin 2\Phi = 4i\xi\eta, \qquad (38) \\ zz^* &= \xi^2 + \eta^2. \end{aligned}$$

Как было отмечено в предыдущем разделе, в (37) удобно положить $K_2 = r + s$.

Ряд (37) есть ряд по степеням z и z^*. В каждом члене этого ряда степень z равна $p + q$, а степень z^* равна $r + s$. Обращаясь к параметризации z (11), мы видим, что каждая степень z вносит множитель $\exp(-i\lambda/2)$, а каждая степень z^* — множитель $\exp(i\lambda/2)$. Поэтому любой член ряда (37) будет содержать множитель $\exp(-i\lambda(p + q - r - s)/2)$. Ряд этот можно перестроить теперь в ряд Фурье по $\exp(-i\nu\lambda)$, если собрать вместе все члены ряда с заданным значением

$$p + q - r - s = 2\nu. \qquad (39)$$

Тогда каждый член нового ряда будет иметь определенное значение ν; таким образом, ряд Фурье будет в то же время рядом по собственным функциям оператора N. Мы приходим к функциям, характеризуемым набором K, J, M, ν, $(j_1 j_2)$. Нормировка их легко устанавливается по нормировке d-функций. Остается еще переход от $(j_1 j_2)$ к Ω, о котором говорилось выше. Хотя кратность уравнений практически появляется только при больших K, тем не менее вопрос о построении удобных формул заслуживает дальнейших усилий.

6. d-функция группы $O(6)$

Коэффициент $\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\varphi}_{KJM}$ описывает повороты в шестимерном пространстве. Очевидно, что из этих поворотов можно построить произвольный поворот. Обычно повороты $O(n)$ составляются из $n(n-1)/2$ поворотов во всех координатных плоскостях [16]. С помощью вычисленных коэффициентов можно реализовать поворот в любой плоскости, характеризуемой двумя произвольными векторами — $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$. Иначе можно сказать, что эти коэффициенты совершают одновременный поворот в трех двумерных плоскостях (η_x, ξ_x), (η_y, ξ_x) и (η_z, ξ_z) и весьма существенно сокращают объем вычислений.

Представляет интерес обобщить изложенные соображения на группы $O(n)$ $(n > 6)$, а также перейти от векторов к тензорам более высокой размерности.

Литература

1. *Нири Ю., Смородинский Я. А.* ЯФ, **9**, 882, 1969.
2. *Нири Ю., Смородинский Я. А.* ЯФ, **12**, 202, 1970.
3. *Nyiri J.* Preprint KFKI-72-3.
4. *Пустовалов В. В., Симонов Ю. А.* ЖЭТФ, **51**, 345, 1966.
5. *Dragt A. J.* J. Math. Phys., **6**, 533, 1965.
6. *Пустовалов В. В., Смородинский Я. А.* ЯФ, **10**, 1287, 1970.
7. *Racah G.* Rev. Mord. Phys., **21**, 494, 1949.
8. *Nyiri J., Smorodinsky Ya. A.* Preprint E2-4809, JINR, 1968.
9. *Нири Ю., Смородинский Я. А.* Препринт Р2-11427, ОИЯИ, 1978.
10. *Виленкин Н. Я., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* ЯФ, **2**, 906, 1965.
11. *Варшалович Д. А., Москалев Л. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Наука, 1975.
12. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции в теории представлений групп. Наука, 1965.
13. *Raynal J., Revai J.* Nuovo Cim., **A68**, 612, 1970.
14. *Смородинский Я. А., Эфрос В. Д.* ЯФ, 17, 210, 1973.
15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
16. *Wong M. K. P.* J. Math. Phys., **19**, 713, 1978.

28 Зак 198

Слабые взаимодействия и нейтринная физика

Введение

В. Н. Ораевский*

В области нового направления в физике слабых взаимодействий — физики нейтрино в среде — Я. А. Смородинский опубликовал 7 работ [1–7], внеся в них свое глубокое понимание различных направлений теоретической физики — от электродинамики сплошных сред до физики элементарных частиц.

Неожиданные аналогии из классической физики, найденные им и помогавшие объяснению новых понятий «на-пальцах», постоянный контроль нарушений симметрий в среде и предельного перехода к известной электромагнитной структуре нейтрино в вакууме сняли многие неизбежные для первого исследования вопросы, которые уже не возникали в работах зарубежных коллег, проверивших, в частности, независимым способом индуцированный электрический заряд нейтрино в среде.

Давнее обсуждение Я. А. Смородинского с Я. Б. Зельдовичем введенного последним анапольного момента нейтрино в вакууме (1957) натолкнуло на поиск полной электромагнитной структуры нейтрино в среде (1989) и привело, в частности, к вычислению индуцированного анапольного момента нейтрино в ферромагнетике (1988).

Замечания Я. А. об аналогии появления геометрической фазы во взамодействии нейтрино с магнитным полем с эффектом Ааронова—Бома стимулировали появление известной работы о резонансном переходе $v_L \leftrightarrow v_R$ в среде с вращающимся магнитным полем [8], что снимает подавление переходов дираковского нейтрино в среде с постоянным магнитным полем.

Я. А. постоянно был в курсе новостей не только ядерной физики, что было естественно, но знал и умел предельно ясно сопоставлять совершенно различные области знания, наталкивая слушателя на неожиданный поворот в рассуждениях и поиск новых решений.

У него дома, на улице Чкалова, можно было встретить самых различных специалистов, желающих проверить свою идею и выслушать первую критику. Доброжелательность, непредвзятость и объективность суждений, а также личное обаяние привлекали к нему людей. Мы были счастливы работать вместе. Для одного из соавторов Я. А. многолетнее общение с ним было настоящей школой физики.

Литература

1. *Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A.* JETP Letters, **43**, 709, 1986.
2. *Oraevsky V. N., Plakhov A. Yu., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A.* Soviet Physics JETP, **66**, 890, 1987; Erratum: Ibid., **68**, 20.
3. *Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A.* Phys. Lett., **B 227**, 255, 1989.
4. *Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A.* Sov. Phys. JETP, **68**, 20, 1989.

* Академик РАЕН.

5. *Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A.* JETP Letters, **48**, 399, 1988.
6. *Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A.* Proceedings of the Seminar «Physics of Neutron Stars». Leningrad, 1988. P. 161.
7. *Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A.* Sov. J. Part. Nucl., **25**, 129, 1995.
8. *Смирнов А. Ю.* Письма в ЖЭТФ, **53**, 280, 1991.

Нейтрино и плотность материи во Вселенной

Б. М. Понтекорво, Я. А. Смородинский

Введение

До сих пор не существует обоснованных оценок плотности нейтрино и антинейтрино в пространстве. Так как эти частицы ничтожно мало поглощаются в плотных веществах и условия их рождения в прошлом неизвестны, их число могло бы достичь очень больших величин. Хотя общепринято считать, что материя во Вселенной представлена в основном водородом, возникает естественный вопрос: не может ли энергия, приходящаяся на нейтрино и антинейтрино во Вселенной, оказаться сравнимой или даже большей полной энергии водорода?

Зарядовая асимметрия мира и флуктуационная гипотеза

Предположение о большом количестве ν и $\bar{\nu}$ во Вселенной возникает, например, при обсуждении вопроса о зарядовой (точнее, PC) асимметрии Вселенной. В литературе неоднократно обсуждалась возможность существования антимиров, возникших в результате флуктуаций в зарядово-симметричной Вселенной. Хотя сейчас не существует никаких экспериментальных оснований, указывающих на реальное существование антимиров, нам кажется интересным отметить, что флуктуационная гипотеза требует, чтобы во Вселенной существовал (сейчас или когда-то в прошлом) большой зарядово-симметричный «фон». Такой фон в принципе должен был бы состоять в значительной степени из ν и $\bar{\nu}$, плотность которых одинакова. Поэтому флуктуационная гипотеза в принципе приводит к следствию, которое могло бы быть проверено в «земных» условиях. Заметим сразу же, что если бы такой фон существовал сегодня, то измерение потоков энергии ν и $\bar{\nu}$ дало бы значение очень важного параметра — средней плотности энергии во Вселенной. Сейчас плотность энергии во Вселенной оценивается по «размазыванию» галактик. Все астрономические оценки сейчас сходятся на том, что средняя плотность таких «размазаных» галактик не превышает 10^{-29} г/см^3 (10^{-2} MeV/см^3) или меньше 10^{-5} протонов в 1 см^3 [1] [1)].

Из уравнений общей теории относительности следует, что средняя энергия релятивистских частиц (нейтрино, в нашем случае) падает пропорционально кривизне пространства a^{-1} (плотность энергии этих частиц падает как a^{-4}). Иными словами, в прошлом средняя энергия нейтрино должна быть больше современной энергии

[1)] Вопрос о плотности материи во Вселенной особенно важен для выбора космогонической модели мира. Величина средней плотности, отвечающей плоской Вселенной (переход от закрытой модели к открытой), составляет $\sim 5 \cdot 10^{-29}$ г/см^3 [2]. В связи с тем, что в последнее время шкала космических расстояний увеличилась более чем в два раза, эту величину надо уменьшить примерно до $2 \cdot 10^{-29}$ г/см^3, что близко к приведенной оценке плотности. Величина нейтринной компоненты, таким образом, может оказаться определяющей.

во столько раз, во сколько раз была больше кривизна. Поэтому в прошлом, когда плотность материи была колоссальной, плотность энергии нейтрино могла на много порядков превышать плотность энергии нуклонов. Это и могли быть условия, при которых происходили флуктуации. При этом механизм флуктуаций не обсуждается, в частности остается открытым вопрос о «первичности» $\nu\bar{\nu}$ пар. По крайней мере сейчас мы не можем ничего об этом сказать. Заметим только, что с нашей точки зрения никак не исключается присутствие антивещества в нашей галактике.

Ясно, что оценка плотности энергии ν и $\bar{\nu}$ во Вселенной зависит в сильной степени от конкретной космогонической модели. Подчеркиваем еще раз, что флуктуационная гипотеза требует, чтобы во Вселенной сейчас или когда-то существовал большой симметричный фон нейтральных частиц.

Если сейчас плотность энергии ν и $\bar{\nu}$ оказалась бы малой по сравнению с плотностью энергии нуклонов (что довольно правдоподобно), все же не возникло бы никакого противоречия с флуктуационной гипотезой.

В то же время существующие экспериментальные данные, которые обсуждаются ниже, не исключают даже больших (т. е. сравнимых с плотностью энергии нуклонов) значений энергетической плотности ν и $\bar{\nu}$ при этом и большие величины ($\gtrsim$100 MeV) средней энергии не исключены априори. Поэтому представляется важным проверить, не является ли вклад нейтрино в общую плотность энергии во Вселенной существенным даже и в настоящее время (с другой точки зрения на важность этой задачи было указано в [3, 4]).

Универсальное слабое взаимодействие и перекачивание энергии в $\nu\bar{\nu}$-компоненту

Если серьезно обсуждать возможность существования плотности энергии ν и $\bar{\nu}$, сравнимой с 10^{-2} MeV/см^3, то естественно возникает вопрос, почему же во Вселенной нет интенсивного потока γ-лучей с энергией и плотностью энергии, сравнимой с энергией предполагаемого лептонного потока? Сразу можно ответить, что энергия от аннигиляционных фотонов (от распада π-мезонов) естественно деградирует в условиях заметных плотностей вещества благодаря их взаимодействию, что и объясняет отсутствие высокоэнергичных фотонов. Однако эта «деградированная» энергия не может исчезать и, на первый взгляд, должна появляться во Вселенной в виде тепловой энергии, фотонной энергии и т. д. в количестве, не меньшем, чем энергия, связанная с массой покоя нуклонов. Однако известно, что плотность тепловой и фотонной (т. е. «симметричной») энергии во Вселенной мала по сравнению с плотностью («несимметричной») энергии, связанной с массой покоя, и это кажется трудно объяснимым (если плотность ν и $\bar{\nu}$ сравнима сегодня с плотностью нуклонов). Такое возражение может быть ликвидировано, если существует рассеяние нейтрино электронами (как это, например, должно быть в теории универсального взаимодействия Ферми). Тогда в электромагнитных процессах вместо испускания фотонов становится возможным испускание пары $\nu\bar{\nu}$ (через виртуальную или реальную пару e^+e^- [5]). При очень высоких температурах и плотностях (тем более, при условиях, которые нас теперь интересуют) испускание пар $\nu\bar{\nu}$ становится единственным эффективным механизмом излучения энергии плотными телами [5–8].

Существующие сведения о плотности энергии ν и $\bar{\nu}$

Обсудим теперь экспериментальные данные о плотности энергии ν и $\bar{\nu}$ в пространстве. Прямые сведения о максимальных плотностях ν и $\bar{\nu}$ можно получить

из предположения, что в опытах Райнса и Коуэна [9] и Девиса [10], выполненных при помощи реактора, эффект, который наблюдали при выключенном реакторе, обусловлен целиком нейтральными лептонами из космического пространства. В опыте Райнса и Коуэна могли регистрироваться антинейтрино с энергией 3–10 MeV; из опыта следует, что поток антинейтрино с энергией от 3 до 10 MeV космического пространства не может заметно превышать 10^{13} см$^{-2}\cdot$ с$^{-1}$. Это соответствует максимальной энергетической плотности антинейтрино, имеющих энергию от 3 до 10 MeV, по порядку величины равной 10^3 MeV/см^3.

Что же касается антинейтрино высокой энергии, то отбор событий типа $\bar{\nu}+p \to n + e^+$ в опыте Райнса и Коуэна намеренно не дал возможности регистрировать $\bar{\nu}$ с энергией $\gg 10$ MeV, и поэтому опыт не дает никаких сведении о $\bar{\nu}$ высокой энергии.

В опытах Девиса показано, что

$$c\int_0^\infty \rho(E)\sigma(E)dE \lesssim 1{,}1\cdot 10^{-33}\ \text{c}^{-1},$$

где $\rho(E)$ — плотность космических нейтрино с энергией E (включая нейтрино от солнца) в единицах MeV$^{-1}\cdot$см$^{-3}$ и $\sigma(E)$ — сечение реакции $\nu + \text{Cl}^{37} \to \text{Ar}^{37} + e^-$. Это сечение, грубо говоря, пропорционально квадрату энергии нейтрино в области от нескольких MeV до нескольких десятков MeV. Из анализа опыта Девиса следует, что плотность энергии нейтрино космического пространства с энергией в несколько MeV не может превышать нескольких десятков MeV в 1 см^3. Для нейтрино же с энергией порядка 1 BeV, которые будут вызывать расщепления аргона, опыт Девиса явно не может дать никаких сведений. Что же касается нейтрино с энергией до 100 MeV, то оценка плотности энергии этих нейтрино получается при предположении, что детектор Девиса был облучен моноэнергетичными нейтрино с энергией, равной максимальной энергии, при которой отдача нуклона не мешает образованию Ar^{37} (скажем, $E \sim 70$ MeV). И в этом крайнем случае максимальная (т. е. допустимая опытом) плотность энергии этих нейтрино порядка нескольких MeV в 1 см^3 и значительно превышает W_H^max — максимальную величину плотности энергии водорода ($W_\text{H}^\text{max} \sim 10^{-2}$ Mev/см^3) во Вселенной.

Рассмотрим теперь, какие сведения можно получить из опытов, выполненных под землей. На больших глубинах нейтрино и антинейтрино от космического пространства будут рождать заряженные лептоны, распределяющиеся изотропно с не зависящей от глубины интенсивностью. Если их энергия значительно превышает энергию покоя мюона, то ν и $\bar{\nu}$ будут эффективно образовывать мюоны. Последние должны замедляться и останавливаться, и в условиях равновесия число образованных мюонов равняется числу остановившихся. Из измерений [11] на глубине 6 000 г/см^3 следует, что число остановившихся в эмульсиях мюонов, приходящих в эмульсию из нижней полусферы, $\sim 10^{-8}$ с$^{-1}\cdot$см$^{-3}$. Это число можно рассматривать как максимально возможное число мюонов, образованных космическими нейтрино (поскольку приходящие в эмульсию из нижней полусферы мюоны, конечно, могут возникать от распада пионов, испускаемых в звездах, образованных проникающей компонентой). Из этого следует, что

$$c\int_0^\infty \rho(E)\sigma(E)\,dE \lesssim 10^{-32}\ \text{c}^{-1},$$

где $\sigma(E)$ — нейтринно-нуклонное сечение. Для нейтрино и антинейтрино с энергией ~ 1 BeV значение σ находится в интервале $10^{-38} \div 10^{-39}$ см^2 [12], так что подземные измерения интенсивности медленных мюонов требуют, чтобы плотность энергии ν и $\bar{\nu}$ с энергией ~ 1 BeV была $\lesssim 10^{-1}$ MeV/см^3. Эта величина довольно близка к величине $W_{\text{H}}^{\max}$.

Даже меньший предел возможной плотности энергии ν и $\bar{\nu}$ с энергией порядка 1 BeV получится, если исходить из результатов опытов, выполненных [13] при помощи телескопа счетчиков при глубине $\sim 10^5$ г/см$^{-2}$. Эти данные, однако, трудно интерпретировать с нашей точки зрения, так что можно только сделать вывод о том, что максимальная плотность энергии ν и $\bar{\nu}$, с энергией больше или равной 1 BeV, не может сильно превышать $W_{\text{H}}^{\max}$ и, вероятно, меньше $W_{\text{H}}^{\max}$. Во всяком случае, при современных условиях техники эксперимента вполне реальной становится задача регистрации потока нейтрино и антинейтрино, по порядку величины равного 10^5 см$^{-2} \cdot$ с$^{-1}$ и имеющего энергию ~ 1 BeV. Эта задача представляется гораздо менее сложной, чем широко обсуждавшаяся в последнее время задача — зарегистрировать нейтрино от ускорителя (вопрос обсуждался, в частности, на конференциях по физике высоких энергий в Киеве и Рочестере). В таком потоке будет рождаться внутри Земли $10 \div 100$ изотропно распределенных заряженных частиц (электроны и мюоны) в день на тонну вещества.

Необходимо подчеркнуть, что при энергиях ν и $\bar{\nu}$ порядка или меньше $m_\mu c^2$ образование мюонов нейтрино невозможно; подземные измерения никак не исключают энергетической плотности ν и $\bar{\nu}$ больше, чем $W_{\text{H}}^{\max}$.

Опыты по регистрации ν и $\bar{\nu}$ в составе космических лучей обсуждались ранее [14], причем предполагалось, что эти частицы образуются в столкновениях «протонов космического излучения» с земной атмосферой или с межзвездным веществом. Ясно, что в этом случае число нейтрино очень невелико, и это видно сразу хотя бы из-за крайне малой интенсивности высокоэнергетичных γ-лучей от распада π^0-мезонов.

Заключение

Из сказанного выше следует, что априори нельзя отвергнуть возможность того, что во Вселенной плотность энергии нейтрино и антинейтрино сравнима или больше средней плотности энергии, связанной с массой покоя протонов. Это должно быть проверено опытом.

В заключение заметим, что в условии очень больших плотностей и энергии преобладание «симметричной» формы энергии в виде пар $\nu\bar{\nu}$ над другими симметричными формами энергии есть довольно общее свойство, связанное с рассеянием нейтрино электронами, и может представлять интерес даже вне связи с флуктуационной гипотезой. Вообще механизм «перекачивания» энергии в нейтринную компоненту мог бы привести к значительной плотности ν и $\bar{\nu}$ во Вселенной. Существование этого механизма поставит под сомнение оценки плотности материи во Вселенной, сделанные с учетом только «видимой» формы материи.

Следует подчеркнуть, что экспериментальное опровержение гипотезы о существовании данной плотности энергии $\int \rho(E) E\, dE$ нейтрино и антинейтрино во Вселенной становится тем труднее, чем меньше их средняя энергия. Грубо говоря, плотность энергии ν и $\bar{\nu}$, которую можно экспериментально обнаружить, обратно пропорциональна квадрату энергии нейтральных лептонов в области энергий больших, чем несколько MeV. При меньших энергиях трудность их регистрации колоссальна. Так, например, гипотезу о существовании плотности ν и $\bar{\nu}$, равной

или большей W_H^{max}, нетрудно проверить на опыте (ее, может быть, уже опровергают существующие данные о подземной интенсивности мюонов), если энергия нейтрино $\gtrsim 1$ MeV. Если же ν и $\bar{\nu}$ имеют энергию ~ 100 MeV, проверка гипотезы реальна, но встречается со значительными трудностями. При энергии нейтрино ~ 1 MeV трудно опровергнуть в опытах существование плотностей энергии ν и $\bar{\nu}$, даже на много порядков превышающих W_H^{max} [2].

Для измерения потоков нейтральных лептонов с энергией 1 BeV удобнее всего регистрировать вторичные мюоны, образованные нейтрино [14, 16]. В области энергий ν и $\bar{\nu}$ в интервале от нескольких MeV до нескольких сотен MeV постановки опытов Райнса—Коуэна и Девиса вполне приемлемы. Что же касается регистрации ν и $\bar{\nu}$ с энергией $\lesssim 1$ MeV, нам представляется, что единственная возможность — использование нейтринно-электронного рассеяния. К сожалению, сегодня это только принципиальная возможность.

Авторы благодарят А. Г. Масевич и С. Б. Пикельнера за ценные обсуждения.

Литература

1. *Аллен С. В.* Астрофизические величины. ИИЛ, 1960.
2. *Смородинский Я. А.* Труды 7-го совещания по космогонии. М., 1957.
3. *Харитонов В. М.* Совещание по физике элементарных частиц. Ереван, 1960.
4. *Marx G., Menyhard N.* Science, **131**, 299, 1960.
5. *Понтекорво Б.* ЖЭТФ, **36**, 1615, 1959.
6. *Гандельман Г. М., Пинаев В. С.* ЖЭТФ, **37**, 1072, 1959.
7. *Chiu H. Y., Morrison P.* Phys. Rev. Lett., **5**, 573, 1960.
8. *Chiu H. Y., Stabler R.* Neutrino Emission Processes and Stellar Evolution. Preprint, 1960.
9. *Reines F., Cowan C. L.* Proc. of the 2-nd Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958.
10. *Davis R.* Bull. Amer. Phys. Soc., **4**, 217, 1959.
11. *George G. E. P., Evans I.* Proc. Phys. Soc., **A63**, 1248, 1950; **A64**, 193, 1951.
12. *Lee T. D., Yang L. N.* Phys. Rev. Lett., **4**, 307, 1960; *Gabbibo N., Gatto R.* Nuovo Cim., **15**, 304, 1960.
13. *Mieżowicz M., Tugkiewicz L., Massalski T. M.* Phys. Rev., **77**, 380, 1950.
14. *Markov M. A.* Proc. of the 1960 Ann. Int. Conf. on High Energy Physics at Rochester. Univ. of Rochester, 1960. P578, 580, 874.
15. *Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **41**, 9, 1961.

[2] Однако плотность нейтрино $W \gg$ H противоречит космологическим данным [15].

Радиационные поправки в распадах π-мезонов

Я. А. Смородинский, Ху Ши-кэ

Радиационные поправки в слабых взаимодействиях были предметом целого ряда работ [1–9]. В этих работах было обнаружено, что поправки разным образом проявляются в различных процессах. В β-распаде, в котором в конечном состоянии возникают две заряженные частицы одинаковой спиральности, их взаимодействие (вместе с влиянием собственных масс) приводит к интегралам, расходящимся на верхней границе. В процессе μ-распада, в котором заряженные частицы имеют также одинаковую спиральность, но одна из них исчезает в начале, а другая появляется в конце процесса, аналогичные интегралы сокращаются [1)] и поправки могут быть вычислены.

В отличие от первого случая, где расходимость связана, по-видимому, с общими трудностями четырехфермионного взаимодействия, во втором случае мы должны ожидать, что главная часть эффекта связана с реальным излучением фотонов сравнительно малых энергий и величина поправки должна определяться в основном просто вероятностью такого распада. При этом естественно, что излучение кванта будет сравнительно сильно влиять на угловое и энергетическое распределения продуктов реакции и слабее — на величину полной вероятности. Так, в случае μ — e-распада параметр Мишеля, определяющий спектр электронов, изменяется при учете радиационных поправок на 5 %, в то время как время жизни μ-мезона изменяется лишь на 0,5 %. Аналогичную роль должны играть радиационные поправки к отношению двух возможных типов распада π-мезона.

Исследования последних лет распада π-мезона показали [10, 11], что экспериментальное значение отношения e-распада и μ-распада π-мезона лежит вблизи значения, предсказываемого теорией Фейнмана—Гелл-Манна. Именно, без учета радиационных поправок, теория дает [12]:

$$R_0 = \frac{(W_{e\nu})_0}{(W_{\mu\nu})_0} = \frac{\left(m_\pi^2 - m_e^2\right)^2}{\left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)^2}\frac{m_e^2}{m_\mu^2} = 1{,}282 \cdot 10^{-4}, \tag{1}$$

где $(W_{e\nu})_0$ и $(W_{\mu\nu})_0$ — соответственно неисправленные вероятности e-распада и μ-распада π-мезона. Радиационные поправки к обоим типам распада были вычислены Берманом [6] (а также Киношитой [8]), который показал, что величина поправки к отношению (1) неожиданно велика и достигает 14 %.

Берман вычислял, как обычно, сумму «радиационной поправки» и «вероятности излучения реальных мягких квантов». Эта величина зависит от границы обрезания энергии кванта или, что то же, наблюдаемой на опыте потери энергии электронов ΔE (приведенный выше вычисленный результат отвечает $\Delta E = 0{,}25$ MeV). Очевидно, что в этом случае поправка может быть велика, если форма спектров фотонов в обоих распадах сильно различна. В этом случае обрезание будет выделять

---

1) Если рисовать так, что распад описывается как превращение одной заряженной частицы в другую (μ в e, p в e), то расходящийся интеграл возникает тогда, когда спиральность заряженной частицы изменяется.

разную часть спектра лептонов. Как видно из вычислений, это в действительности и является главной причиной большой величины поправки. На это обстоятельство было указано также и в работе Киношиты [8], который, однако, не дал всех формул.

В настоящей работе повторены все вычисления, при этом формула для поправки к вероятности распада несколько отличается от формулы Киношиты (хотя численное значение поправки, вычисленной Киноштой, почти не изменилось). Кроме того, даны формулы для спектров фотонов. Спектр лептонов, полученный нами, совпадает со спектром, вычисленным Иоффе и Рудиком [14], Ваксом и Иоффе [15] и Бладменом и Рудерманом [16].

Вычисления велись стандартным методом. При этом пренебрегалось излучением виртуальных нуклонов, так как они содержат массу нуклона в знаменателе (ср., например, [17]). Если выбрать систему координат, где π-мезон в начале покоился, то радиационная вероятность распада равна [8]

$$\frac{W_{e\nu\gamma}}{(W_{e\nu})_0} = \frac{\alpha}{\pi}\left\{ b(\mu)\left[\ln\frac{\lambda}{m_\pi} - \ln(1-\mu^2) - \frac{1}{2}\ln\mu + \frac{3}{4}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\mu^2(10-7\mu^2)}{2(1-\mu^2)^2}\ln\mu + \frac{2(1+\mu^2)}{1-\mu^2}L(1-\mu^2) + \frac{15-21\mu^2}{8(1-\mu^2)}\right\}, \quad (2)$$

$$L(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2} \quad (|x \leqslant 1|), \quad b(\mu) = 2\left(\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}\ln\mu + 1\right). \quad (3)$$

В этих формулах λ — предел инфракрасного обрезания, μ — отношение массы лептона к массе пиона.

Спектры фотонов и лептонов описываются формулами:

$$dW_{e\nu\gamma}(\varepsilon_\gamma) = (W_{e\nu})_0\frac{\alpha}{\pi}\left\{-\frac{2}{\varepsilon_\gamma} + \frac{(4-5\mu^2-2\varepsilon_\gamma)}{(1-\mu^2)^2} + \frac{\mu^2}{(1-2\varepsilon_\gamma)(1-\mu^2)^2} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{(1+\mu^2)}{(1-\mu^2)}\frac{1}{\varepsilon_\gamma} - \frac{2(1-\mu^2-2\varepsilon_\gamma)}{(1-\mu^2)^2}\right]\ln\frac{1-2\varepsilon_\gamma}{\mu^2}\right\}d\varepsilon_\gamma, \quad (4)$$

$$dW_{e\nu\gamma}(\varepsilon_e) = (W_{e\nu})_0\frac{\alpha}{\pi}\left\{\frac{4}{(1-\mu^2)(1+\mu^2-2\varepsilon_e)}\left[\varepsilon_e\ln\frac{\varepsilon_e+\sqrt{\varepsilon_e^2-\mu^2}}{\varepsilon_e-\sqrt{\varepsilon_e^2-\mu^2}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\sqrt{\varepsilon_e^2-\mu^2}\right] + \frac{(1+\mu^2-2\varepsilon_e)}{(1-\mu^2)^2}\ln\frac{\varepsilon_e+\sqrt{\varepsilon_e^2-\mu^2}-\mu^2}{\varepsilon_e-\sqrt{\varepsilon_e^2-\mu^2}-\mu^2}\right\}d\varepsilon_e, \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_\gamma = \frac{E_\gamma}{m_\pi}, \quad \varepsilon_e = \frac{E_e}{m_\pi}.$$

Формула (5) совпадает с формулой Бладмена и Рудермана [16].

При учете всех фейнмановских диаграмм с испусканием виртуального фотона до порядка e^2 мы получаем вероятность безрадиационного e-распада (или μ-распада) π-мезона:

$$W_{e\nu} = (W_{e\nu})_0\left\{1 + \frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{3}{2}\ln\frac{L}{m_\pi} - b(\mu)\left(\ln\frac{\lambda}{m_\pi} - \frac{1}{2}\ln\mu + \frac{3}{4}\right) + \frac{(3-2\mu^2)}{(1-\mu^2)}\ln\mu - \frac{3}{8}\right]\right\}, \quad (6)$$

где L и λ — соответственно верхний и нижний пределы энергии виртуальных фотонов. Формула в работе Киношиты [8] отличается от этой тем, что вместо члена $-3/8$ в ней стоит $-1/4$ (после внесения поправки на массу).

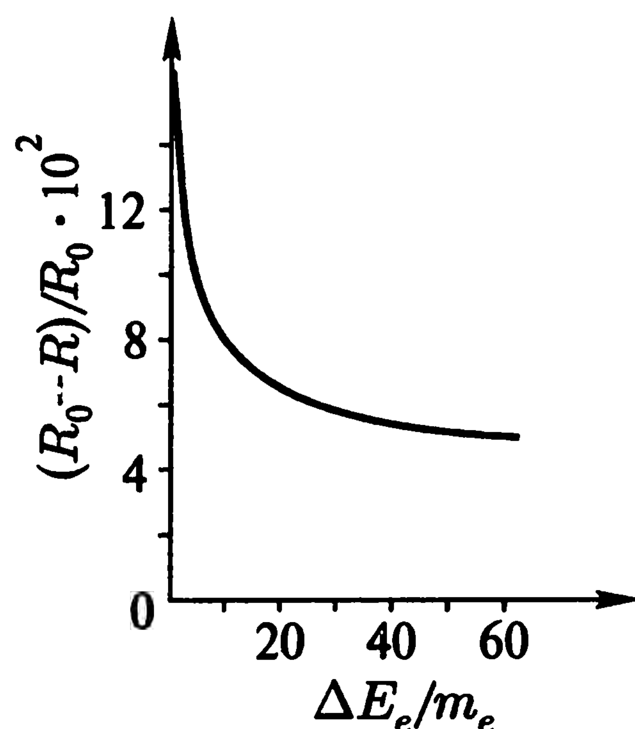
Суммируя (2) и (6), найдем полную (радиационную + безрадиационную) вероятность распада пиона:

$$\frac{W_{e\nu}+W_{e\nu\gamma}}{(W_{e\nu})_0}=1+\frac{\alpha}{\pi}\left\{-\frac{3}{2}\ln\frac{L}{m_\pi}-b(\mu)\ln\left(1-\mu^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(6-20\mu^2+11\mu^4\right)}{2\left(1-\mu^2\right)^2}\ln\mu+\frac{2\left(1+\mu^2\right)}{\left(1-\mu^2\right)}L\left(1-\mu^2\right)+\frac{\left(6-9\mu^2\right)}{4\left(1-\mu^2\right)}\right\}. \quad (7)$$

В работе Киношиты [8] вместо последнего слагаемого стоит (после внесения поправки на массу) $(13-19\mu^2)/8(1-\mu^2)$. Из формулы (7) мы можем вычислить радиационную поправку к (1).

Для вероятности излучения лептона с энергией меньше $E_{\max}-\Delta E$, получаем

$$\frac{W_{e\nu\gamma}(E_{\max}-\Delta E)}{(W_{e\nu})_0}=\frac{\alpha}{\pi}\left\{-b(\mu)\left(\ln\frac{m_\pi}{2\Delta E}+2\ln\left(1-\mu^2\right)-\frac{3}{4}\right)+\right.$$
$$+\frac{2\left(1+\mu^2\right)}{\left(1-\mu^2\right)}\left[L(1-\mu^2)-L\left(\frac{2}{1-\mu^2}\frac{\Delta E}{m_\pi}\right)\right]-\left[\frac{\mu^2\left(10-7\mu^2\right)}{2\left(1-\mu^2\right)^2}+\frac{4\left(1-3\mu^2\right)}{\left(1-\mu^2\right)^3}\frac{\Delta E}{m_\pi}\right]\ln\mu+$$
$$\left.+\left[\frac{\left(15-21\mu^2\right)}{8\left(1-\mu^2\right)}-\frac{4\left(1+2\mu^2\right)}{\left(1-\mu^2\right)^2}\frac{\Delta E}{m_\pi}\right]\right\}. \quad (8)$$



Кривая зависимости отношения $(R_0-R)/R_0$ от границы обрезания

Если пренебречь членами линейными в ΔE, то формула (8) переходит в формулу Киношиты [8].

Теперь можно выписать формулу для поправки к отношению вероятностей e- и μ-распадов, при которой лептоны имеют энергию, отличающуюся от максимальной не больше, чем на ΔE. Подставляя значение постоянных, получим

$$R(\Delta E)=R_0\left\{1-\left(4{,}647\cdot 10^{-3}\right)\left[30{,}12-\right.\right.$$
$$\left.\left.-4{,}611\left(\ln\frac{2\Delta E_e}{m^e}-\frac{2\Delta E_e}{m_\pi}\right)-L\left(\frac{2\Delta E_e}{m_\pi}\right)\right]\right\}. \quad (9)$$

Численные значения и сравнение с работой Бермана [6] и Киношиты [8] приведены в таблице:

$\Delta E_e/m_e$		0,5	10	20	30	Полная область энергии
$\left(\frac{R_0-R}{R_0}\right)\cdot 10^2$	Берман	13,9	7,6	6,1	5,3	3,9 [8]
	Эта работа	14,0	7,8	6,5	5,8	3,93

Для иллюстрации приведем кривую зависимости отношения от границы обрезания ΔE_e. Отметим, что для значения $\Delta E_e = 10$ MeV, которое было принято в опытах [11], $R = 1{,}198\cdot 10^{-4}$ (экспериментальная величина $R=(1{,}18\pm 0{,}08)\cdot 10^{-4}$).

Мы выражаем благодарность Л. Окуню, Чжу Хун-юаню, Чжоу Гуан-чжао, Хэ Цзо-сю, Сянь Дин-чану и Ван-жуну за полезное обсуждение этой работы.

Литература

1. *Behrends R. E., Finkelstein R. J., Sirlin A.* Phys. Rev., **101**, 866, 1956.
2. *Kinoshita T., Sirlin A.* Phys. Rev., **107**, 593, 638, 1957.
3. *Kinoshita T., Sirlin A.* Phys. Rev., **113**, 1652, 1959.
4. *Kinoshita T., Sirlin A.* Phys. Rev. Lett., **2**, 177, 1959.
5. *Berman S. M.* Phys. Rev., **112**, 267, 1958.
6. *Berman S. M.* Phys. Rev. Lett., **1**, 468, 1958.
7. *Смородинский Я. А., Хэ Цзо-сю.* ЖЭТФ, **38**, 1007, 1960.
8. *Kinoshita T. K.* Phys. Rev. Lett . **2**, 177, 1959.
9. *Durand L., Landovitz L. F., Marr R. B.* Phys. Rev. Lett., **4**, 620, 1959.
10. *Вайсенберг А. О.* УФН, **70**, 429, 1960.
11. *Fujii T. et all.* Bull. Amer. Soc., **5**, 71, 1960.
12. *Окунь Л. Б.* УФН, **68**, 449, 1959.
13. *Feynman R. P., Gell-Mann M.* Phys. Rev., **109**, 193, 1958.
14. *Иоффе Б. Л., Рудик А. И.* ДАН СССР, **82**, 359, 1952.
15. *Вакс В. Г., Иоффе Б. Л.* ЖЭТФ, **35**, 221, 1958.
16. *Bludman S. A., Ruderman M. A.* Phys. Rev., **101**, 910, 1956.
17. *Kwo She-hung.* Acta Phys. Sinica, **16**, 299, 1960.

О верхнем пределе плотности нейтрино, гравитонов и барионов во Вселенной

Я. Б. Зельдович, Я. А. Смородинский

1. Как было указано Понтекорво и одним из авторов [1], определение космической плотности нейтрино является весьма трудным опытом, вследствие очень слабого взаимодействия нейтрино с материей. Известны опыты Рейнеса и Коуэна по определению потока антинейтрино из котла [2] и опыты Дэвиса, показавшего отсутствие в этих условиях реакций, требующих нейтрино [3]. Из этих опытов следует, в частности, что поток космических ν и $\bar{\nu}$ меньше $W = 10^{12} \div 5 \cdot 10^{11}$ см$^{-2} \cdot$ с$^{-1}$ [4] для ν и $\bar{\nu}$ с энергией порядка 2–3 MeV. Такому потоку соответствует плотность частиц $W/c = \rho_{\nu,\bar{\nu}} \sim 20$ см$^{-3}$ и плотность массы $E\rho/c^2 \sim 10^{-25}$ г/см^3. Эту величину следует сравнить со средней плотностью нуклонов во Вселенной, которая принимается в настоящее время равной 10^{-29} г/см^3 (что соответствует $\sim 10^{-5}$ протон/см^3).

Таким образом, прямой опыт не исключает возможности того, что плотность массы-энергии в виде нейтрино в $10^4 - 10^5$ раз больше плотности массы-энергии покоя в обычном виде.

Как отмечается Рейнесом [4], а также в [1], эти оценки в действительности зависят от предположения о спектре нейтрино. При высоких энергиях сечение взаимодействия растет как E^2, поэтому при пересчете на другую энергию ν максимальный поток изменится $\sim 1/E^2$, а максимальная плотность массы-энергии изменится как $1/E$. Однако даже для ν и $\bar{\nu}$ с энергией ~ 1 BeV максимальная плотность массы-энергии остается больше плотности нуклонов.

С другой стороны при малых энергиях, меньших порога соответствующих реакций, эффективность регистрации нейтрино современными методами резко падает; порог составляет $\sim 1{,}8$ MeV для $\bar{\nu} + p = n + e^+$ и ~ 1 MeV для $\nu + \mathrm{Cl} = \mathrm{Ar} + e^+$. Если есть два сорта нейтрино — «электронные» и «μ-мезонные» [5], то для второго сорта порог реакций

$$\bar{\nu}_\mu + p = n + \mu^+, \quad \nu + n = p + \mu$$

порядка 100 MeV. Подпороговые нейтрино могут быть обнаружены только по ионизации, вызванной упругим ударом, поэтому для них оценки космической плотности, совместимой с опытом, возрастают еще на несколько порядков.

2. Другой подход к определению верхней границы космической плотности слабо взаимодействующих частиц основан на рассмотрении их гравитационного действия [1)]. Преимущество такого подхода заключается в том, что оценка не зависит от вида спектра, сечения взаимодействия и в принципе относится также ко всем возможным еще неизвестным в настоящее время слабовзаимодействующим полям, а также к плотности высокочастотных колебаний гравитационного поля (гравитонов) [2)].

---

1) Идея такого подхода содержится уже в лекциях Эйнштейна [6].

2) Из-за слабости гравитационного взаимодействия все сечения гравитонов настолько малы, что детектирование их практически безнадежно (см., например, вычисление Гандельмана и Пинаева [7], согласно которым тормозное излучение гравитонов в 10^{10} раз меньше излучения ν—$\bar{\nu}$-пар).

Сущность предлагаемой оценки заключается и том, что при известном современном состоянии Вселенной (характеризующемся определенным значением константы Хэббла h, $v = hr$, где v — скорость, r — расстояние) плотность ρ всех видов материи-энергии определяет прошлое Вселенной. Так, при $\rho \to 0$ расстояние между каждой парой далеких объектов линейно меняется со временем и состояние максимальной плотности имело место в момент $T_0 = -1/h$, т. е. приблизительно 10^{10} лет тому назад.

При ρ, отличном от нуля, расширение Вселенной с течением времени замедляется, средняя скорость расширения от момента максимальной плотности до настоящего момента больше, чем известная экспериментально мгновенная скорость, а следовательно, момент максимальной плотности в прошлом был ближе к настоящему моменту[3)].

Введем величину критической плотности $\rho_к$. Это понятие соответствует границе перехода от открытой модели к закрытой модели Вселенной; физически это соответствует качественно различным предсказаниям о будущем Вселенной: при $\rho < \rho_к$ расширение будет продолжаться неограниченно, при $\rho > \rho_к$ расширение сменится с течением времени сжатием. Существование особенности и характер решения для прошлого качественно не зависит от соотношения между ρ и $\rho_к$.

Приведем значение интервала времени T от момента максимальной плотности в прошлом до настоящего момента в зависимости от суммарной плотности всех видов материй энергии в безразмерных величинах $\tau = Th = T/T_0$ в зависимости от $q = \rho/2\rho_к$:

q	0	0,5	2	5	20	100
τ	1	0,67	0,47	0,35	0,21	0,10
τ'	1	0,50	0,33	0,24	0,14	0,07

Величина τ здесь вычислена для покоящейся материи с давлением p, равным нулю. Для τ' вычисление проведено (в соответствии с замечанием Л. Д. Ландау) для случая, когда массой покоя можно пренебречь, частицы движутся со скоростью света и $p = \varepsilon/3$, где ε — плотность энергии. Различие между τ и τ' невелико.

Отметим, что отличие в поведении двух моделей (с $p = 0$ и $p = \varepsilon/3$) связано с уменьшением энергии релятивистских частиц при адиабатическом расширении. Это понятие можно применять несмотря на то, что нейтрино не взаимодействует ни с какими частицами и не «производит работы». В действительности с течением времени в данную точку приходят нейтрино, испущенные из все более далеких областей, т. е. испытавшие все более сильное красное смещение, допплеровскую потерю энергии. Вот эта допплеровская потеря энергии и является физическим механизмом, осуществляющим уменьшение средней энергии нейтрино по мере расширения Вселенной.

Для справки приводим соответствующие формулы:

$$\tau = k^{-2}\left[(k + k^{-1})\operatorname{arctg} k - 1\right], \quad k = (2q - 1)^{1/2}; \quad \tau' = \left[1 + (2q)^{1/2}\right]^{-1}.$$

Принимаем $T_0 = 10^{10}$ лет, чему соответствует $\rho_к = 2 \cdot 10^{-29}$ г/см^3. Полагая, что время T не меньше геологического времени существования Земли, которое порядка $4 \cdot 10^9$ лет, находим, что $\tau > 0{,}4$. Отсюда $q < 5$ и $\rho < 2q\rho_к = 2 \cdot 10^{-28}$ г/см^3.

[3)] Вопрос о соотношении между возрастом галактик и величиной $1/h$ рассматривался также Хойлем [8].

Другая возможность судить о прошлом Вселенной заключается в рассмотрении далеких галактик, так как при этом по существу мы наблюдаем их в давно прошедшем состоянии. В теории расширяющейся Вселенной получается нелинейная зависимость скорости расширения от расстояния $v = \chi(r)$, постоянная Хэббла характеризует лишь первую производную, $h = \chi'(0)$; значение второй производной $\chi''(0)$ зависит от плотности. В настоящее время $\chi''(0)$ надежно не определено, но верхняя граница χ'' также ограничивает q: $q < 10$; таким образом, имеются две независимые, согласующиеся оценки верхней границы (ср. [9]).

Наконец, заметим, что один из способов, которым получена наблюденная средняя плотность $\bar{\rho} = 10^{-29}$ г/см^3, заключается в том, что по движению звезд в галактике определяется масса галактики, а затем средняя во всей Вселенной плотность определяется как средняя масса галактики M, деленная на объем V, приходящийся во Вселенной на одну галактику. Очевидно, что в такой оценке в массу галактики включена и масса нейтрино, находящихся внутри галактики. Плотность нейтрино должна быть одинаковой внутри галактики и в межгалактическом пространстве. Поэтому еще один способ дать верхнюю оценку плотности нейтрино заключается в предположении, что вся масса галактики, определяющая ее гравитационное поле, есть масса нейтрино.

Имеем таким образом, $\rho_\nu \leqslant M/V_0$, где V_0 — собственный объем галактики. Отсюда

$$\rho_\nu \leqslant \left(\frac{M}{V}\right)\left(\frac{V}{V_0}\right) = \frac{\bar{\rho}V}{V_0} \approx \frac{0{,}1}{\bar{\rho}},$$

так как в среднем объем галактики составляет ~10% всего объема Вселенной. Следовательно, по порядку величины и эта третья оценка согласуется с предыдущими.

Таким образом, плотность нейтрино, гравитонов и т. п. во Вселенной, хотя и может превосходить наблюдаемую среднюю плотность нуклонов (10^{-29} г/см^3), но не более чем в 10–20 раз.

Предположение о том, что плотность энергии в ненаблюденной форме в несколько раз больше плотности обычной материи, представляется удивительным, и все же его в настоящее время нельзя отбросить. Напомним, что гравитационная оценка при всем ее несовершенстве все же во много раз чувствительнее оценки по ядерно-физическим опытам.

Отклоняясь от темы статьи, отметим впечатляющую, не объясненную до сих пор близость критического значения $\rho_к$ и наблюденной плотности $\bar{\rho}$ обычной материи ($2 \cdot 10^{-29}$ и 10^{-29} г/см^3). Это может означать, например, что возраст Вселенной сравнительно мал. В этом случае все три модели ведут себя почти одинаково и $\rho \sim \rho_к$. Связь между постоянной Хэббла и возрастом τ определяется формулой $\tau = 2/3h$. В приведенных оценках мы исходили из гипотезы изотропной модели Вселенной и отвергали введение в уравнения космологической константы, а также отвергали предположение о спонтанном рождении энергии.

3. Обратимся теперь к вопросу о плотности нуклонов во Вселенной. На первый взгляд определение средней плотности массы во Вселенной дает также с той точностью, с которой его удается произвести, и среднюю плотность нуклонов или точнее барионов[4)]. Если плотность массы нейтрино сравнима с плотностью массы нуклонов, то плотность массы нуклонов также меньше принятой величины $\sim 10^{-29}$ г/см^3, что соответствует числу нуклонов в единице объема $\sim 10^{-5}$ г/см$^{-3}$.

[4)] С учетом того, что при сверхвысокой плотности возможно частичное превращение нуклонов в странные частицы [10, 11].

Здесь мы хотим обратить внимание на принципиальную возможность того, что плотность числа нуклонов может быть существенно больше этой величины. В принципе можно представить себе звезду, находящуюся после гравитационного коллапса в таком состоянии, когда ее гравитационный дефект массы ΔM близок к M_0 сумме масс покоя нуклонов, составляющих звезду. Тогда ее масса может быть гораздо меньше M_0

$$M = M_0 - \Delta M \ll M_0 = N m_0,$$

и гравитационное поле, создаваемое такой звездой, дает резко заниженную оценку числа нуклонов в звезде, $M/m_0 \ll N$.

Существование гравитационного дефекта масс в общей теории относительности не вызывает сомнения. Так, например, когда разреженное облако водородных атомов превращается в плотное нейтронное ядро, расчет по классической ньютоновской теории тяготения показывает, что при достаточной массе облака процесс является энергетически выгодным; выделение гравитационной энергии превышает затрату энергии на превращение атомов водорода в более тяжелые нейтроны. Такой процесс должен проходить с выделением энергии наружу в виде света и нейтрино. Нет сомнения, что при этом общая масса звезды уменьшается, в соответствии с той энергией, которую она отдала. Между тем масса покоя частиц, составляющих звезду, увеличилась при превращении $H \to n$. Уменьшение массы звезды (и ее гравитационного поля на большом расстоянии) есть как раз результат гравитационного дефекта массы, т. е. того, что масса тела меньше суммы масс составляющих его частей на величину, равную энергии гравитационного взаимодействия этих частиц (деленного на c^2).

Итак, качественно существование гравитационного дефекта массы очевидно, и вычисление его для слабых гравитационных полей элементарно. Однако для того, чтобы дефект масс был близок к массе покоя, необходимо чтобы гравитационный потенциал был порядка c^2, и в этой области следует пользоваться точными уравнениями общей теории относительности. Необходимо также знать уравнение состояния, т. е. зависимость давления и энергии от плотности нуклонов. В настоящее время теория такого состояния звезд не разработана. Известны лишь приближенные оценки минимального числа нуклонов, необходимого для того, чтобы был возможен гравитационный коллапс; в книге Ландау и Лифшица [12] для критической массы приводится значение, равное 0,76 массы Солнца.

В настоящее время неизвестно, существует ли во Вселенной хотя бы одна коллапсировавшая звезда. Тем не менее, чтобы оценить среднюю плотность нуклонов во Вселенной, необходимо дать верхнюю границу количества коллапсировавших звезд, потухших и потерявших свою массу, но сохранивших первоначальное число нуклонов (мы стоим на точке зрения неограниченной справедливости закона сохранения числа нуклонов или, точнее, барионного заряда). Такую оценку можно сделать, если предположить, что эти звезды произошли путем эволюции из обычных горячих звезд — скоплений водорода. Тогда энергия, соответствующая разности начальной массы звезды (в разреженном состоянии) и конечной массы (в коллапсированном состоянии), должна быть отведена от звезды в той или иной форме.

Поскольку в стадии выделения главной части энергии плотность звезды весьма велика, вероятно главным механизмом энергии является испускание нейтрино и антинейтрино (ср. [7, 13–15]). Но независимо даже от конкретной формы, в которой выделяется энергия, энергия не теряется и может быть обнаружена по ее гравитационному действию. Таким образом, можно использовать оценки предыдущего раздела и сделать вывод, что средняя по Вселенной плотность нуклонов в коллапсировавших звездах не может превышать известное значение плотности обычных нуклонов более чем в 10–20 раз.

К сделанным ранее оговоркам о предположениях, лежащих в основе вывода (изотропная модель и т. д.), нужно добавить только одну: а именно — что коллапс произошел не слишком рано, иначе за время от момента коллапса до настоящего момента энергия нейтрино могла уменьшиться в ходе адиабатического расширения нейтринного газа в расширяющейся Вселенной; тогда оценка верхней границы количества нуклонов в коллапсировавших звездах изменится в бóльшую сторону.

Литература

1. *Понтекорво Б. М., Смородинский Я. А.* ЖЭТФ, **41**, 239, 1961.
2. *Reines F., Cowan C. L., Harrison Jr. F. B., McCuire A. D., Kruse H. W.* Phys. Rev., **117**, 159, 1960.
3. *Davis R. , Harmer D. S.* Bull. Amer. Phys. Soc., II, **4**, 217, 1959.
4. *Reines F.* Ann. Rev. Nucl. Sci., 10, 1, 1960.
5. *Понтекорво Б. М.* ЖЭТФ, **37**, 1751, 1959.
6. *Эйнштейн А.* Сущность теории относительности. ИИЛ, 1955. С. 108.
7. *Гандельман Г. М., Пинаев В. С.* ЖЭТФ, **37**, 1072, 1959.
8. *Hoyle F.* Proc. Phys. Soc., 77, 1, 1961.
9. *Смородинский Я. А.* Труды VII совещания по космогонии. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 131.
10. *Зельдович Я. Б.* ЖЭТФ, **37**, 568, 1959.
11. *Амбарцумян В. А., Саакян Г. С.* Астрофиз. ж., **37**, 193, 1960.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Гостехиздат, 1951. С. 353.
13. *Понтекорво Б. М.* ЖЭТФ, **36**, 1615, 1959.
14. *Chin H. Y., Morrison P.* Phys. Rev. Lett., **5**, 573, 1960.
15. *Gell-Mann M.* Phys. Rev. Lett., **6**, 70, 1961.

Поляризационные потери и индуцированный электрический заряд нейтрино в плазме

В. Н. Ораевский, В. Б. Семикоз, Я. А. Смородинский

В вакууме нормировка $F_\nu^{vac}(0) = 0$ отвечает строгому равенству нулю электрического заряда нейтрино, что должно выполняться в любом порядке теории возмущений и проверено в электрослабой теории [1] на уровне однопетлевых радиационных поправок (RC) [4].

В диспергирующей среде, например, в изотропной плазме взаимодействие нейтрино с макроскопическим самосогласованным электромагнитным полем можно описать с помощью электрического формфактора [1)]

$$F_\nu^{\text{med}}(\omega, k) = \frac{G_F(1 + 4\sin^2\theta_w)q^2}{4\pi\sqrt{2}\alpha}(\varepsilon_l(\omega, k) - 1), \tag{1}$$

в котором продольная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{\Pi_{00}(\omega, k)}{k^2} \tag{2}$$

определяется Π_{00} — компонентой тензора поляризации среды и вакуума $\Pi_{\mu\nu}(\omega, k)$ [5]. В формуле (1) G_F — константа слабого взаимодействия Ферми (M_Z — масса Z-бозона), θ_W — угол Вайнберга [1], e — заряд электрона ($e^2 = 4\pi\alpha$, $\alpha = 137^{-1}$). Формфактор (1) существенно превышает вакуумный для одних и тех же переданных импульсов q^2 ($\approx$ в $137 = \alpha^{-1}$ раз).

Ограничение вкладом лептонных петель в поляризацию среды и вакуума является достаточным приближением в диапазоне малых переданных импульсов $|q^2|/M_{Z,W}^2 \ll 1$. Ионы считаются неподвижными, обеспечивающими электронейтральность однородной системы.

В отличие от вакуума, формфактор (1) имеет другую нормировку

$$\lim_{k\to 0} F_\nu^{\text{med}}(0, k) = -\frac{G_F(1 + 4\sin^2\theta_w)}{4\pi\sqrt{2}\alpha r_D^2} \equiv \frac{e_\nu^{\text{инд}}}{e}, \tag{3}$$

определяющую ненулевой электрический заряд нейтрино $e_\nu^{\text{инд}}$ в плазме с дебаевским радиусом r_D (в вакууме $r_D \to \infty$). Заряд $e_\nu^{\text{инд}}$ возникает вследствие слабого притяжения к нейтрино электронов среды.

В целом система остается электронейтральной, т. е. глобальная калибровочная инвариантность не нарушается благодаря отталкиванию зарядов противоположного знака (позитронов) или индуцированию на границе системы (на бесконечности в неограниченной среде) в точности равного компенсирующего заряда (ионов), изотропно распределенных по границе поверхности («конденсатор»).

[1)] Используется: система единиц $\hbar = c = 1$; феймановская метрика $q^2 = q_\mu\, q^\mu = \omega^2 - \mathbf{k}^2$; $\mu = 0, 1, 2, 3$; стандартное представление γ-матриц Дирака, причем $\gamma_5 = \gamma_5^+ = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Без учета заряженных токов индуцированный электрический заряд нейтрино получен ранее в [2, 3]. Новая зависимость от угла Вайнберга θ_W появилась в (3) при использовании полной борновской амплитуды низкоэнергетического νe-рассеяния

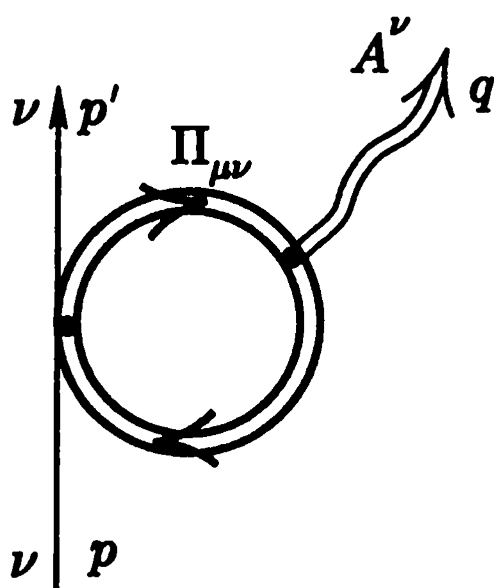
$$M_{Z+W} \sim \sqrt{2}G_F\left(\bar{\nu}\gamma_\mu\frac{(1-\gamma_s)}{2}\nu\right)\left(\bar{e}\gamma^\mu\frac{(1+4\sin^2\theta_W-\gamma_s)}{2}e\right)^6.$$

В таком матричном элементе источником электромагнитных возбуждений среды, сохраняющих четность, может быть только векторная часть слабого тока электронов, пропорциональная $\sim (1+4\sin^2\theta_W)$. В результате заряд (3) не исчезает ни при каком значении угла θ_W, что только усиливает предсказанные в [2, 3] эффекты.

Рассмотрим матричный элемент поляризационного излучения продольных плазмонов[2)] безмассовым нейтрино

$$\langle p'q|S|p\rangle = -i(2\pi)^4\left(4\varepsilon_p,\ \varepsilon_p\left|q^2\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_l}{\partial\omega}\right|\right)^{1/2}\delta^{(4)}(p'+q-p)J_\mu^{(\nu)}e^\mu, \tag{4}$$

отвечающий диаграмме, изображенной на рисунке.



Фейнмановская диаграмма поляризационного излучения нейтрино. Двойной петлей обозначен поляризационный тензор $\Pi_{\mu\nu}$ в среде

Здесь сохраняющийся электромагнитный ток нейтрино ($J_\mu^{(\nu)}q^\mu = 0$) с учетом известных определений продольного тензора поляризации в статистической КЭД [5] $\Pi_{\mu\nu}^{(l)} = -q^2(\varepsilon_l(\omega,k)-1)e_\mu e_\nu/4\pi$ и единичного ($e^2=-1$)/4-вектора поляризации продольного плазмона $e_\mu = (k,\omega\mathbf{k})/\sqrt{q^2}$ может быть записан в виде

$$J_\mu^{(\nu)} = eF_{\mathrm{med}}^{(\nu)}(\omega,k)\,\bar{\nu}(p')\gamma_\mu\frac{(1-\gamma_s)}{2}\nu(p), \tag{5}$$

где формфактор $F_{\mathrm{med}}^{(\nu)}(\omega,k)$ автоматически принимает вид (1).

Независимым способом формфактор (1) получен в работе [7], в которой последовательно, методом Боголюбова, получено квантовое кинетическое уравнение для нейтрино с учетом вклада самосогласованного поля, определяемого амплитудой νe-рассеяния.

Поляризационные потери энергии безмассового ($\varepsilon_p = p$) нейтрино, определяемые с помощью (4), сводятся к однократному интегралу

$$\frac{dW_{\mathrm{polar}}^{(\nu)}}{dl} = \frac{G_F^2(1+4\sin^2\theta_W)^2}{\pi e^2}\int\limits_{k_{\min}}^{k_{\max}}\frac{\omega_j(k)\,q_j^4dk}{k\left|\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_l}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_j}}\left[1-\frac{\omega_j(k)}{p}+\frac{q_j^2}{4p^2}\right], \tag{6}$$

в котором частоты излучения продольного плазмона (решения дисперсионного уравнения $\varepsilon_l(\omega_j,k)=0$) удовлетворяют закону сохранения энергии $\omega_j = p - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|$, сводящемуся в квазиклассическом приближении ($k \ll p$) к условию Вавилова—Черенкова $\omega = \mathbf{kc}$. Для ленгмюровского плазмона ($\omega_j \approx \omega_{\mathrm{pe}}$) нижний предел равен $k_{\min} = \omega_{\mathrm{pe}}$, а верхний (для относительно жестких нейтрино $p > r_D^{-1}$) равен $k_{\max} \approx r_D^{-1}$.

[2)] Для фотонов в среде (плазмонов) «масса» q^2 отлична от нуля ($q^2 \neq 0$).

В этом случае из (6) получим потери нейтрино.

$$\frac{dW^{(\nu)}_{\text{polar}}}{dl} \approx \frac{G_F^2\left(1 + 4\sin^2\theta_W\right)^2\omega_{\text{pe}}^2}{2\alpha r_D^4}, \quad \left(\omega_{\text{pe}} = \sqrt{\frac{4\pi\alpha n_0}{m_e}}, \quad n_0 = \frac{p_F^3}{3\pi^2}\right). \tag{7}$$

Численно для металлов величина (7) составляет $\sim 10^{-25}$ эВ/см.

Сравним коллективные потери (7) со столкновительными для мягких нейтрино в вырожденной изотропной плазме металлов ($p_{F_e} \ll m_e$), имеющими вид

$$\frac{dW^{\nu}_{\text{coll}}}{dl} \cong \frac{3G_F^2}{8\pi^2}\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\alpha}\frac{p_{F_e}^2\varepsilon_\nu^3}{m_e}, \quad r_D^{-1} < \varepsilon_\nu \ll m_e. \tag{8}$$

Отношение потерь (7) и (8) равно $\frac{dW^{\nu}_{\text{polar}}/dl}{dW^{\nu}_{\text{coll}}/dl} \sim \alpha^2(m_e/\varepsilon_\nu)^3$. Для нейтрино от тритиевого источника ($\varepsilon_\nu \sim$ КэВ) поляризационные потери на два порядка превышают столкновительные, что указывает на важность учета коллективных механизмов во взаимодействии нейтрино со средой (рассмотренный канал не является единственно возможным). Для жестких нейтрино($\varepsilon_\nu \gg m_e$) соотношение потерь уже в пользу столкновительных (в металле $10\alpha^2(m_e/\varepsilon_\nu)^2 \ll 1$).

Отметим в заключение, что играющие важную роль в динамике коллапса звезд столкновительные потери энергии нейтрино существенно меньше их потерь на электромагнитное излучение (в диапазоне энергий $\omega_{\text{pe}} \ll \varepsilon_\nu \ll p_{F_e}$).

Литература

1. *Weinberg S.* Phys. Rev. Lett., **19**, 1264, 1967; *Salam A.* In: Elementary Particle physics. Almguist and Wiksells, Stockholm, 1968. P. 367.
2. *Ораевский В. Н., Семикоз В. Б.* ЖЭТФ, **86**, 796, 1984.
3. *Ораевский В. Н., Семикоз В. Б.* ЯФ, **42**, 705, 1985.
4. *Bardeen D. Yu., Christova P. Ch., Fedorenko O. M.* Nucl. Phys., **B197**, 1, 1982; *Aliev T. M., Vysotsky M. I.* ITEP-37 (preprint), 1981.
5. *Фрадкин Е. С.* Труды ФИАН, **29**, 7, 1965.
6. *Окунь Л. Б.* Лептоны и кварки. М.: Наука, 1984.
7. *Semikoz V. B.* Preprint IZMIRAN, **A53**, 527, 1984.

Анапольный момент нейтрино в диспергирующей среде

В. Б. Семикоз, Я. А. Смородинский*

1. Различные по C, P, T-свойствам симметрии взаимодействия дираковских и майорановских нейтрино с электромагнитным полем можно характеризовать различными электромагнитными мультипольными моментами. Общим типом мультиполей, а для нейтрино Майорана единственным видом является анаполь, вводившийся Зельдовичем [1], как электромагнитная характеристика для T-инвариантного, но нарушающего в отдельности P, C взаимодействия $\mathbf{G}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}$. Здесь $\mathbf{B}$ — магнитное поле, псевдовектор $\mathbf{G}$ является собственным дипольным моментом фермиона ($s = 1/2$) в системе его покоя:

$$\mathbf{G} = eG^{vac}(0)\varphi^+\vec{\sigma}\varphi, \tag{1}$$

характеризуемым величиной анаполя $G^{vac}(0)$, спином $\mathbf{s} = \varphi^+\vec{\sigma}\varphi$ и электрическим зарядом e электрона ($\alpha = e^2 = 137^{-1}$ [1]), $\vec{\sigma}$ — матрицы Паули; φ — спинор в системе покоя).

Соответствующая часть сохраняющегося электромагнитного тока любой спинорной частицы ($q^\mu J_\mu = 0$), а для нейтрино Майорана весь электромагнитный ток в вакууме имеет вид:

$$J_\mu(q) = \frac{eG^{vac}(q^2)}{2\sqrt{E_pE_{p'}}}\bar{u}(\mathbf{p}')\left[q^2\gamma_\mu - q_\mu\widehat{q}\right]\gamma_5 u(\mathbf{p}),$$

где $G^{vac}(q^2)$ — формфактор (анапольный), зависящий от переданного 4-импульса $q_\mu = p'_\mu - p_\mu$; $E_p = (m^2 + p^2)^{1/2}$.

Из вида тока (2) очевидна указанная еще в работе [1] невозможность электромагнитного излучения анаполем в вакууме (отсюда название «анаполь») [2]. Имеется только возможность локального взаимодействия тока (2) с внешним током — источником внешнего электромагнитного поля.

Вычисление формфактора $G^{vac}(q^2)$ в однопетлевом приближении стандартной вакуумной модели электрослабых взаимодействий является задачей, нерешенной, по-видимому, до сих пор.

В заключение вводной части укажем связь тока (2) с анапольным моментом (1). Мы не будем при этом пользоваться мультипольным разложением тока по полному набору ортонормированных решений волнового уравнения, как это делалось в [2]. Напомним, что все собственные мультипольные моменты элементарной частицы

---

* Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова.

1) Используется система единиц $\hbar = c = 1$; фейнмановская метрика $q^2 = q_\mu q^\mu = \omega^2 - \mathbf{k}^2$; $\mu = 0, 1, 2, 3$; стандартное представление γ-матриц Дирака, причем $\gamma_5 = \gamma_5^+ = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$; латинские индексы $i, m, n = 1, 2, 3$.

2) Кроме условия Лоренца $\partial A_\mu/\partial x_\mu = 0$ для вакуумных фотонов выполнено условие калибровочной инвариантности второго рода, т. е. их спектр безмассовый, $q^2 = 0$ ($\Box A_\mu = 0$). В среде, где $q^2 \neq 0$, излучение в принципе возможно.

определяются в системе ее покоя, формально совпадающей с системой Брейта, в которой отсутствует энергетическая компонента переданного импульса ($\omega = 0$, если $\mathbf{p}+\mathbf{p}' = 0$). Последнее свойство позволяет ввести 3-мерное распределение плотности точечного анапольного момента $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{kr}} \mathbf{G}(-k)^2$. Для покоящегося анаполя связь плотности с (1) имеет вид

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}\delta^3(\mathbf{r}), \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{G} = \lim_{k\to 0} \mathbf{G}(-k^2).$$

Поэтому наиболее общая форма искомой связи фурье-образа $\mathbf{G}(-k^2)$ с поперечным 3-током $\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \frac{eG^{\nu ac}(-k^2)}{2E_p}\bar{u}(-\mathbf{p})\left[-k^2\vec{\gamma} + \mathbf{k}(\mathbf{k}\vec{\gamma})\right]u(\mathbf{p})$ (см. (2)) имеет вид[3)]

$$G_m(-k)^2 = a\frac{\partial^2 J_n(\mathbf{k})}{\partial k_m \partial k_n} + b\frac{\partial^2 J_m(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2}. \tag{3}$$

Два требования позволяют определить коэффициенты a, b в формуле (3). Во-первых, необходимо, чтобы в системе покоя ($\mathbf{k} = -2\mathbf{p} = 0$) величина (3) равнялась (1), т. е. $G_m = \frac{e}{2m_\nu} G^{\nu ac}(0)\, \bar{u}(0)\gamma_m\gamma_5 u(0)$.

Это условие дает уравнение $2a - 4b = 1$. Во-вторых, продольный ток $\mathbf{J}_{\|} = \nabla\varphi$ — источник электрических мультиполей, не должен давать вклад в анапольный момент $\mathbf{G} = \int d^3\, r\mathbf{g}(\mathbf{r})$ с плотностью $g_m(\mathbf{r}) = -\left[ar_m(\mathbf{rJ}(\mathbf{r})) + br^2 J_m(\mathbf{r})\right]$, отвечающей (3). Из этого требования следует уравнение $2a + b = 0$.

Получаемые коэффициенты $a = 1/10$, $b = -1/5$ отвечают так называемому тороидному дипольному моменту с плотностью $-\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \left[(\mathbf{Jr})\mathbf{r} - 2r^2\mathbf{J}(\mathbf{r})\right]/10$, [2]. Окончательно из (3) следует общая формула для анапольного момента в среде и в вакууме:

$$G_m = \frac{e}{20m_\nu}\bar{u}(0)\left[\frac{\partial^2\Gamma_n(0,\mathbf{k})}{\partial k_m \partial k_n} - 2\frac{\partial^2\Gamma_m(0,\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2}\right]_{\mathbf{k}=0} u(0), \tag{3'}$$

где в случае среды, покоящейся как целое, аргументы электромагнитной вершины $\Gamma_\mu(\omega, k)$ выбираются в зависимости от частотного спектра внешнего поля, воздействующего на среду.

Формула (3′) справедлива для статического поля, причем предполагается, что частица (нейтрино) покоится (останавливается в среде).

2. Подстановка в формулу (3′) электромагнитной вершины нейтрино в изотропной среде [3] дает нулевой результат $G_m = 0$. В магнитоупорядоченной среде, например, в ферромагнетике статическая электромагнитная вершина нейтрино Дирака имеет вид [4]

$$\Gamma_n(0,\mathbf{k}) = \frac{G_V(1+\gamma_5)\gamma_i}{8\pi\alpha\sqrt{2}} e_{imp}\, e_{kln}\, k_m\, k_l\left(\mu_{pk}^{-1}(0,\mathbf{k}) - \delta_{pk}\right) + \\ + \frac{G_F m_e(1+\gamma_5)\gamma_i}{4\pi\alpha\sqrt{2}} e_{nkp}\, k_p\left(\mu_{ik}^{-1}(0,\mathbf{k}) - \delta_{ik}\right), \tag{4}$$

где $G_F = 10^{-5}/m_p^2$ — константа слабого взаимодействия Ферми, m_p — масса протона, $\mu_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ — тензор магнитной проницаемости ферромагнетика; $G_V = G_F(1+4\xi)$; $\xi = \sin^2\theta_w$, θ_w — угол Вайнберга.

---

3) Учитывая зависимость вершины от $\mathbf{k} = -2\mathbf{p}$, аргумент $\mathbf{k}$ можно опустить в биспинорах $u(p)$, нормировочном множителе ($E_p \to m_\nu$) и в формфакторе $G^{\nu ac}(-k)^2$. В этом случае величина (3) уже не зависит от k, что соответствует точечному анаполю.

Второе слагаемое в (4) (обозначим $\vec{\Gamma}_2(0,\mathbf{k})$) происходит от статистического усреднения псевдовекторного тока электронов $\langle\bar{\psi}_e\gamma_\mu\gamma_5\psi_e\rangle$ и определяет индуцированный магнитный момент нейтрино в ферромагнетике [4]. Соответствующий 3-ток $\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\bar{u}(0)\vec{\Gamma}_2(0,\mathbf{k})\,u(0)/2m_\nu$ равен $\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\vec{\mu}(\mathbf{r})$, т. е. является круговым током («листок»), генерирующим магнитный момент $\vec{\mu} = \int d^3\,\mathbf{r}\vec{\mu}(\mathbf{r}) = -2\sqrt{2}G_F m_e^2\mu_Б\varphi^+\vec{\sigma}\varphi/4\pi\alpha$ (ср. [3]). Вершина $\vec{\Gamma}_2(0,\mathbf{k})$ не дает вклада в анапольный момент (3′) из-за четной зависимости тензора $\mu_{ik}(0,k)$, $(=\delta_{ik}\mu^{-1}(0,k))$, от волнового вектора k.

Первое слагаемое в (4) (обозначим $\vec{\Gamma}_1(0,\mathbf{k})$) происходит от статистического усреднения векторного тока $\langle\bar{\psi}\gamma_\mu\psi_e\rangle$ и в простейшем предположении диагональности тензора $\mu_{ik}^{-1} = \mu^{-1}\delta_{ik}$ приводит к плотности индуцированного в ферромагнетике анапольного момента

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{eG_V\varphi^+\vec{\sigma}\varphi}{8\pi\alpha\sqrt{2}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\left(1-\mu^{-1}(0,k)\right), \tag{5}$$

связанной с плотностью тороидального тока $\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\bar{u}(0)\vec{\Gamma}_1(0,\mathbf{k})\,u(0)/2m_\nu$ соотношением $J_1(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{g}(\mathbf{r})$. (Ток образует витки, «навитые» на тор с осью вдоль спина нейтрино[4].)

Величина индуцированного анапольного (тороидного) момента $\mathbf{G} = \int\mathbf{g}(\mathbf{r})\,d^3r = eG_{\mathrm{med}}^{\mathrm{ind}}\varphi^+\vec{\sigma}\varphi$ равна

$$G_{\mathrm{med}}^{\mathrm{ind}} = \frac{G_V(\mu(0,0)-1)}{8\pi\alpha\sqrt{2}\mu(0,0)}, \tag{6}$$

и в ферромагнетике ($\mu = \mu(0,0) \gg 1$) имеет конечное значение.

Литература

1. *Зельдович Я. Б.* ЖЭТФ, **33**, 1531, 1957.
2. *Дубовик В. М., Чешков А. А.* Физика ЭЧАЯ, **5**, 791, 1974.
3. *Семикоз В. Б.* ЯФ, **46**, 1592, 1987.
4. *Леинсон Л. Б., Ораевский В. Н.* Письма в ЖЭТФ, **48**, 58, 1988.

[4] Точнее, тор, составленный из плотно упакованных круговых токов.

Последние работы (Квантовые алгебры)

Введение

Ю. Ф. Смирнов

Имя Якова Абрамовича Смородинского я услышал впервые в середине 50-х годов, когда, будучи студентом физического факультета МГУ, начал вместе со всеми студентами ядерного отделения изучать теоретическую ядерную физику и узнал, что есть такая теория эффективного радиуса Смородинского, прочел книгу по теории атомного ядра Ландау и Смородинского и т. п.

Личное знакомство с ним относится к более позднему времени, когда я, как и многие другие физики, обращался к нему с различными просьбами — быть оппонентом моей диссертации, рекомендовать к переводу в издательстве «Мир» какую-либо книгу, посодействовать публикации в журнале «Ядерная физика» очередной статьи, отвергнутой рецензентом и т. д. Я искренне благодарен ему за взыскательное, но доброжелательное отношение ко мне, да и ко всей физической молодежи, постоянно окружавшей его.

Достаточно близко мне довелось взаимодействовать с Я. А. в 80-х годах, участвуя в организации совещаний «Методы симметрии в физике», возникших по его инициативе и проходивших первоначально в ФЭИ (Обнинск). Обнаружилась большая общность наших интересов в области применения теории групп в квантовой механике, где Я. А. был признанным и непревзойденным Мастером. Здесь уместно заметить, что Я. А. сделал огромный вклад в теоретико-групповое образование наших физиков в 50–80-х годах. Я имею в виду не только его собственные работы в этой области, его блестящие лекции и обзоры, но также и переводы на русский язык всех основных книг по теории групп в физике: Вигнера, Вейля, Хамермеша, Барута и Рончки, Биденхарна и Лаука и др., которые были изданы по его инициативе, под его редакцией и с его предисловиями. Редакторский и физический вкус Я. А. были безукоризненны. Эти монографии, лучшие в мировой литературе, стали учебниками и настольными книгами нескольких поколений физиков в СССР.

Возвращаясь к 80-м годам, хочу напомнить, что в этот период на сцене появились (трудами Склянина, Кулиша, Решетихина, Фаддеева, Тахталжияна, Дринфельда, Дзимбо и многих других) квантовые алгебры и квантовые группы. Они привлекли к себе пристальное внимание физиков и математиков. Смородинского интересовали как особенности структуры этих новых математических объектов, так и их возможные физические применения. Ему представлялся интересным вопрос о связи различных величин для квантовых алгебр (q-коэффициенты Клебша—Гордана (ККГ), Рака и т. п.) с ортогональными полиномами дискретной переменной. Этот интерес не случаен. Дело в том, что ранее, в работах с С. К. Сусловым и другими учениками и сотрудниками, Я. А. исследовал связь обычных ККГ с ортогональными полиномами на равномерной сетке, конкретно — с полиномами Хана. Случилось так, что он докладывал эти работы у нас на семинаре в НИИЯФе МГУ, и они произвели тогда на меня большое впечатление. У меня в это время уже был

достаточный опыт работы с ККГ и вообще с квантовой теорией углового момента, но, несмотря на это, ККГ казались мне, как может быть и другим теоретикам, в известной степени случайным набором чисел, поскольку в них не чувствовалось какой-либо четкой системы. Например, невозможно было априори предсказать, когда ККГ будет равен нулю, если все правила отбора выполняются. В вопросе о нулях (или корнях) ККГ, коэффициентов Рака и т. п. было что-то мистическое — зануление этих величин казалось спонтанным и объяснялось (начиная с Г. Рака), как правило, с помощью исключительных групп Ли (G_2, F_4 и т. п.). Между тем этот вопрос, который кажется на первый взгляд чисто абстрактным, имеет физическую важность. Дело в том, что в соответствии с теоремой Вигнера—Эккарта квадрат ККГ определяет вероятность тех или иных физических процессов или распадов. Поэтому очень важно предвидеть, когда ККГ равен нулю или очень мал, ибо это указывает, что соответствующий процесс будет запрещен или подавлен. И что важно, этот запрет не связан с обычными правилами отбора! Именно поэтому данный цикл работ Я. А., в которых ККГ рассматривались как полиномиальные решения разностного уравнения на линейной (или квадратной) сетке, показался мне весьма интересным. Если ККГ является полиномами степени n дискретной переменной s, то он должен иметь n нулей. Если какой-либо из этих корней совпадает с узлом сетки, то ККГ точно равняется нулю в этом узле. Если корень попадает между узлами сетки, то ККГ не имеет точного нуля, однако меняет знак в узлах, соседних с корнем. Это означает, что в этих узлах значение ККГ очень близко к нулю, соответствующий процесс (распад) подавлен. Такой полиномиальный подход ставил все на свои места: ККГ как функция s (это может быть полный момент, или проекция m^1 одного из складываемых моментов и т. п.) осциллирует подобно волновой функции частицы в яме. Поэтому можно качественно (а затем и количественно) предсказать, где эти величины велики, а где малы. Под впечатлением этого подхода мы даже написали статью (совместно с С. К. Сусловым и А. М. Широковым), где показали, что ККГ ведут себя асимптотически как волновые функции частицы в потенциале Пешля—Теллера. Все эти вопросы встали вновь и с большей остротой, когда были открыты квантовые алгебры и группы, ибо теория ортогональных полиномов (теперь уже на неравномерных сетках $x(s) = q^s$ и $x(s) = [s] + [s + 1]$) представляла собой одну из альтернативных возможностей более глубокого проникновения в структуру квантовых алгебр и их представлений. Весь этот комплекс вопросов живо интересовал Я. А. в начале 90-х годов. Как раз связь ККГ для квантовой алгебры $SUq(2)$ с q-полиномами Хана была предметом моего, к сожалению, последнего разговора с ним, который состоялся за несколько дней до его неожиданной кончины. Мы обсуждали результаты дипломной работы одного из моих студентов, посвященной этой теме и выполненной незадолго до этого. Я. А. попросил оставить работу у себя, чтобы на будущей неделе встретиться и обсудить ее более детально. Однако этой встрече не суждено было состояться.

Я затронул здесь только одну из многочисленных проблем, интересовавших Я. А. У меня всегда будет в памяти тот энтузиазм, с которым Я. А. воспринимал все новое в физике (и не только в физике). Он остается для нашего поколения примером рыцарского служения науке.

Октябрь 1996 *г.*, *Мехико*

31 Зак. 198

New Developments and Applications of Group Theory

Ya. A. Smorodinsky

During the last few years a new term is circulated among physicists: «quantum groups». This term has appeared in the physical lexicon about 1986 in connection with a quantum inverse problem. Some new type of algebras was introduced by the Leningrad mathematicians [1, 2]. The generators of these algebras satisfy the commutation relations

$$[H, X^{\pm}] = \pm 2X^{\pm}, \quad [X^{+}, X^{-}] = \frac{\mathrm{sh}\,(qH)}{\mathrm{sh}\,(q)}.$$

These expressions are similar to the commutation relations of the components of angular momentum but are not identical to them. Only in the limit $q \to 0$ the right hand side of the second commutator transforms into the third angular momentum component. Such a change of the commutator is called a deformation of the algebra (and a deformation of the corresponding group). It was shown by V. Drinfeld that new algebras belong to the Hopf algebras [3]. In above mentioned papers [1]–[3] the term «a quantum group» had arisen at first. Although the word «quantum» is rather strange in the mathematical terminology (it shows that the origin of these objects is connected with some problems of quantum physics), the further development has given to this term a deeper sense. Another form for the quantum algebra was suggested in the paper of L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan [4], where it was generated by the 2×2 matrices whose four matrix elements are noncommuting with each other. These matrices may be considered as a representation of some «quantum group».

Yu. I. Manin [5] has established some new impressive connection of quantum groups with the noncommutative geometry. There is a number of other examples using nonstandard commutators (see for example the paper [6], which appeared before 1986 but is not elaborated in details). Among attempts to apply the new concept to physical problems the paper of Raychev, Roussey and Smirnov [7] should be noted. This work, that was represented at this Workshop, is devoted to the description of the rotational levels of the deformed atomic nuclei in terms of the $SU_q(2)$ quantum algebra. Also the constructions very close to quantum algebras were realized in the recent paper of Kagramanov, Mir-Kasimov and Nagiev [8] (and private communication) where the relativistic model of the coordinate space was developed. In this model the Schroedinger equation has a finite difference character. Also there is no doubt about the close connection existing between quantum algebras and finite difference schemes [9]. All this opens new directions for investigation. Let us discuss one point concerning deformed commutators that shows more clearly the reason of the appearance of deformed commutators or at least illustrates some consequences of such a deformation. We bear in mind a system of two photons in a singlet state. It should be noted that Bell has considered this problem but with two electrons. However, the substitution of electrons by photons is unessential because the resulting formula describes an arbitrary two level system. The photon system is transformed into the electron system by the simple substitution of the angle θ (for photons) by the angle $\theta/2$ (for electrons). The main property of such a two photon system is their coherent production in an atomic cascade: the $0 \to 0$ transition with emission of two photons. The coherence property of the two created particles

is a specific feature of the relativistic quantum theory. It has no classical analogue and can not be imitated by hidden parameters. It is the physical sense of von Neumann's theorem, a theorem is not free from errors in its proof but correct in essence.

It is unclear why in a large number of papers, devoted to the «explanation» of the Bell inequality, the simple fact is not used that the coherence (i. e. symmetry) of the wave function of the system is conserved at a macroscopic scale. This implies that the «paradox» of the «telepathic» connection in the behavior of two photons is explained by the coherent creation of the photons and not by a fictive exchange of information between them. To support this point of view it is reasonable to consider the measurement of the correlation of the spins of two particles, i. e. the measurement of the expected value of the product of projections of two spins $\langle (s^{(1)a})(s^{(2)}b)\rangle$ on the directions of two unit vectors a and b.

Elementary calculations show that in the classical case the probability of the two spins correlation is less than the quantum correlation. The explanation of this fact is connected with the coherence property of two photons and it was mentioned above. Formally the difference of two results is related with the appearance of the commutator of spin operators in the quantum case. As a result the quantum value of the squared spin is equal to $\frac{3}{4}h^2$ instead of $\frac{1}{4}h^2$ in the classical case. For clearness we note that the expected value of the squared projection of the electron spin on an arbitrarily axis is equal to $\frac{1}{4}h^2$, therefore $\langle s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\rangle = \frac{3}{4}h^2$. However, in this point we meet a surprise! The question arises: can the correlation be more than for its quantum limit? The answer is evident. Because of the deformation of the commutator, in quantum algebra we have for the expected value of squared spin the following result

$$\langle s^2\rangle = \left\langle s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + \left[s_z + \frac{1}{2}\right]^2 - \left(s_z - \frac{1}{2}\right)^2\right\rangle$$

where the square bracket is

$$\left[s_z + \frac{1}{2}\right] = \frac{\mathrm{sh}\,(q(s_z + 1/2))}{\mathrm{sh}\,(q)};$$

the round bracket has the usual sense. It is clear that this correlation is more that Bell's correlation. It may be arbitrarily large for sufficiently big value of q.

Thus, in a quantum q-mechanics ($q > 1$) the correlation is larger than its usual quantum mechanics limit [10]. Also the following question arises: what is quantized in «quantum groups»? In some problems, the deformation is a consequence of the transition from the continuous variables to discrete ones. The most interesting examples in this connection are first the unexpected aspects of the angular momentum presented in the works of Regge and Witten [11]–[15], second, the development of diagram method (of the review [16]).

The last approach allows to visualize some geometric images of Witten's theory. The result of these works is a quantization of the Racah coefficients through the substitution of their numerical values by some quantum ensemble. These efforts are in progress and results will be reported next year, as I hope.

References

1. *Reshetikhin N. Yu, Takhtajan L. A., Faddeev L. D.* Algebra and Analysis, **1**, 178, 1989.
2. *Kulish P. P., Reshetikhin N. Y.* J. Sov. Math., **23**, 2435, 1983.
3. *Drinfield V. G.* Quantum Groups. (Proc. Int. Congr. of Mathem.) Berkley, 1986.
4. *Faddeev L. D., Takhtajan L. A.* Liuville Model on the Lattice. Lect. Notes Physics, **246**, 166, 1986.

5. *Manin Y.* Quantum Groups and Non-Commutative Geometry. Montreal, 1990.
6. *Maslov V. P., Karassiov V. P., Nazaininsky V. E.* Modern Problems of Mathematics, VINITI, **13**, 5, 1979.
7. *Raychev P. P., Roussev R. P., Smirnov Yu. F.* J. Phys., **G16**, 1137, 1990.
8. *Kagramanov E. D., Mir-Kasimov R. M.* J. Math. Phys., **31**, 1733, 1990.
9. *Nikiforov A. F., Suslov S. K., Ouvarov V. B.* Classic orthogonal polynomials on discrete variables. Nauka, M., 1985.
10. *Macfarlane A. J.* J. Phys., **A22**, 4581, 1989.
11. *Rosano G., Regge T.* Spectroscopy and Group Theoretical Methods in Physicsa. Amsterdam, 1968. P. 1.
12. *Bidenharn L. C.* Ibid. P. 59, 1968.
13. *Witten E.* Comm. Math. Phys., **121**, 351, 1989.
14. *Witten E.* Nucl. Phys., **B322**, 629, 1989.
15. *Witten E.* Nucl. Phys., **B330**, 285, 1990.
16. *Smirnov Yu. F., Shitikova K. V.* Fiz. Elem. Chastic. At. Yadra, **8**, 847, 1977.

Работы, посвященные Я. А. Смородинскому

Матрица конечных трансляций в осцилляторном базисе (этюд памяти Я. А. Смородинского)

А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян

Вместо введения. Нынешней осенью исполнится год тому, как ушел из жизни Я. А. Смородинский. Общение с Яковом Абрамовичем играло важную роль для многих физиков и математиков нашего поколения. Диапазон его знаний был необычайно широк, и это всегда поражало. Но было еще что-то, что влекло к нему людей — его отношение ко всему красивому, в том числе в физике. Было видно, что красота доставляет ему истинное наслаждение, и что он увлекает ею своих читателей и собеседников.

Настоящее краткое сообщение является данью глубокого уважения авторов к этому обаятельному и энциклопедически образованному человеку.

Постановка задачи. Пусть требуется вычислить амплитуду вероятности перехода линейного осциллятора под действием внезапно включенного однородного поля $U = -Fx$ из n-го состояния в k-ое. Эта задача интересна, так как она: (a) обобщает одну из задач, изложенных в [1]; (b) искомая амплитуда выражается через функцию Шарлье; (c) решение этой задачи позволяет получить такое представление для функции Шарлье, в котором акцент поставлен не на комбинаторику, а на симметрию; (d) это представление приводит к новым результатам.

После включения поля мы снова имеем линейный осциллятор, но со сдвинутым центром равновесия. Сказанное означает, что в единицах $m = \hbar = \omega = 1$ амплитуда перехода $n \to k$ описывается выражением

$$\mathcal{P}_{kn} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{H}_k(x - F)\overline{H}_k(x)\, dx. \tag{1}$$

Здесь через $\overline{H}_m$ обозначены волновые функции стационарных состояний линейного осциллятора.

При $n = 0$ амплитуда (1) вычисляется кратным интегрированием по частям, после чего получается красивый ответ: вероятность перехода $0 \to k$ определяется распределением Пуассона [1]

$$w_{k0} = \frac{b^k e^{-b}}{k!}, \qquad (2),$$

где $b = F^2/2$. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы вычислить амплитуду (1) при произвольных n.

Метод вычисления. Интеграл (1) не столь безобиден, как может это показаться с первого взгляда. Однако он легко вычисляется, если использовать оператор конечной трансляции и затем обратиться к технике вторичного квантования. В качестве первого шага заметим, что

$$\overline{H}_n(x - F) = e^{-F\partial_x}\overline{H}_k(x).$$

Это позволяет представить амплитуду (1) в виде матрицы оператора конечной трансляции по базису линейного осциллятора[1]. Перейдя к дираковским обозначениям имеем

$$\mathcal{P}_{kn} = \langle n | e^{-F\partial_x} | k \rangle.$$

Введем операторы рождения и уничтожения

$$\widehat{a}^+ = \frac{x - \partial_x}{\sqrt{2}}, \quad \widehat{a} = \frac{x + \partial_x}{\sqrt{2}}.$$

Для нас существенно, что

$$-F\partial_x = \frac{F(\widehat{a}^+ - \widehat{a})}{\sqrt{2}}.$$

Так как $[\widehat{a}, \widehat{a}^+] = 1$, то работает формула Хаусдорфа—Бейкера, т. е.

$$e^{-F\partial_x} = e^{-b/2} e^{\sqrt{b}\widehat{a}^+} e^{-\sqrt{b}\widehat{a}}.$$

Используем теперь полный набор промежуточных осцилляторных состояний и запишем амплитуду в виде

$$\mathcal{P}_{kn} = e^{-b/2} \sum_{m=0}^{\infty} \langle n | e^{\sqrt{b}\widehat{a}^+} | m \rangle \langle m | e^{-\sqrt{b}\widehat{a}} | k \rangle. \tag{4}$$

С помощью известных формул

$$\widehat{a}^+ |\mu\rangle = \sqrt{\mu + 1}\, |\mu + 1\rangle \quad \widehat{a}\, |\mu\rangle = \sqrt{\mu}\, |\mu - 1\rangle$$

легко доказать, что

$$\langle n | e^{\sqrt{b}\widehat{a}^+} | m \rangle = \left(\frac{m!}{n!}\right)^{1/2} \binom{n}{m} (\sqrt{b})^{n-m},$$

$$\langle m | e^{-\sqrt{b}\widehat{a}^+} | k \rangle = \left(\frac{m!}{k!}\right)^{1/2} \binom{k}{m} (-\sqrt{b})^{k-m}.$$

Биноминальные коэффициенты в этих формулах обращаются в нуль при $m > k$ и $m > n$ соответственно, и поэтому сумма в (4) обрывается на минимальном из чисел n и k. В итоге ответ выражается в виде произведения экспоненциального фактора на некий полином.

[1] В работе [2] была развита диаграммная техника вычисления матрицы конечных вращений в базисе многомерного изотропного осциллятора.

Вероятность перехода. Из предыдущего пункта следует, что амплитуда (1) может быть представлена в следующем окончательном виде:

$$\mathcal{P}_{nk} = (-1)^k \bar{C}_n(k, b), \tag{5}$$

где $\bar{C}_n(k, b)$ дается выражением

$$\bar{C}_n(k, b) = \left(\frac{b^{n+k} e^{-b}}{n!k!}\right)^{1/2} C_n(k, b), \tag{6}$$

а $C_n(k, b)$ представляет собой следующий многочлен

$$C_n(k, b) = \sum_m (-1)^m \binom{n}{m} \binom{k}{m} \frac{m!}{b^m}. \tag{7}$$

Многочлен (7) известен в математике как многочлен Шарлье. Он принадлежит классу так называемых ортогональных многочленов дискретной переменной [3]. Многочлен (7) фиксирован, если фиксирован параметр $b > 0$ и один из индексов (второй индекс при этом играет роль дискретной переменной).

Назовем функцию $\bar{C}_n(k, b)$ функцией Шарлье. Помимо очевидной симметрии по индексам n и k функции Шарлье удовлетворяют условию ортонормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_m(k, b) \bar{C}_n(k, b) = \delta_{mn} \tag{8}$$

и рекуррентному соотношению

$$\sqrt{b(n+1)}\, \bar{C}_{n+1}(k, b) + (k - n - b) \bar{C}_n(k, b) + \sqrt{bn}\, \bar{C}_{n-1}(k, b) = 0. \tag{9}$$

В математической литературе принято соотношения (8) и (9) записывать на языке полиномов Шарлье. Обращаясь к вероятности перехода, имеем

$$w_{kn} = \left(\bar{C}_n\left(k, \frac{F^2}{2}\right)\right)^2 \tag{10}$$

Заметим, что при $n = 0$ формула (10) переходит в приведенный выше результат для вероятности w_{k0}, т. е. в распределение Пуассона[2)]. Соотношение ортонормировки (8) позволяет убедиться в правильности формулы (10). Далее, формулы (8) и (9) дают возможность вычислить математическое ожидание и дисперсию для распределения (10). Легко показать, что $\bar{k} = F^2/2 + n$ и $D = \overline{k^2} - \bar{k}^2 = (2n + 1)F/2$. При $n = 0$ отсюда имеем соотношение $\bar{k} = D$, что характерно для распределения Пуассона.

Отметим еще одно любопытное свойство: в пределе $b = 0$ функция Шарлье переходит в символ Кронекера. В самом деле, при $n > k$ ($n < k$) в пределе $b = 0$ главный член в (7) пропорционален $b^{-k}(b^{-n})$, и, как следует из (6), функция Шарлье обращается в нуль. При $n = k$, как легко убедиться, в том же пределе функция Шарлье обращается в единицу.

[2)] Модель с обобщенным распределением Пуассона рассматривалась также в работе [4]. В этой работе распределения выражались через многочлены Лагерра, связь которых с многочленами Шарлье дается формулой $C_n(k, b) = (-b)^n n! L_n^{k-n}(b)$.

Симметрия вместо комбинаторики. Сравнение соотношений (3) и (5) приводит к следующему интересному представлению для функций Шарлье:

$$\bar{C}_n(k,b) = (-1)^k \langle n | e^{-\sqrt{2b}\partial_x} | k \rangle. \tag{11}$$

Если предыдущее определение (6) ставило акцент на комбинаторику, то (11) переводит этот акцент в область симметрий, подчеркивая связь функций Шарлье с конечными трансляциями. Формула (11) утверждает, что функция Шарлье совпадает (с точностью до фазового множителя) с матрицей оператора конечной трансляции в базисе линейного осциллятора. Эта точка зрения может быть положена в основу теории функций Шарлье. Не составляет труда убедиться, что она сразу приводит к перечисленным в предыдущем пункте свойствам функций Шарлье.

Важно, что такой подход — это не только более привычный взгляд на старые вещи. Он может быть использован и для получения новых результатов. Действительно, начнем с очевидного тождества

$$e^{-F_1\partial x} e^{F_2\partial x} = e^{(-F_1+F_2)\partial x}.$$

Переходя в этом тождестве от операторов к матрицам в базисе линейного осциллятора, легко вывести теорему сложения

$$\bar{C}_n\left(k, \left(\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2}\,\right)^2\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{C}_n(m,b_1)\bar{C}_k(m,b_2).$$

Этот результат обобщает условие ортонормировки (8), переходя в него при $b_1 = b_2$.

Рассмотрим еще тождество

$$e^{-F_1\partial x} e^{-F_2\partial x} = e^{-(F_1+F_2)\partial x}.$$

Тогда аналогичным образом легко вывести еще одну теорему сложения

$$\bar{C}\left(k, \left(\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2}\,\right)^2\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \bar{C}_n(m,b_1)\bar{C}_k(m,b_2),$$

из которой в частном случае $b_1 = b_2 = b$ следует формула

$$\bar{C}_n(k,4b) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \bar{C}_n(m,b)\bar{C}_k(m,b).$$

Мы видим, что представление (11) в самом деле не только красиво, но и полезно.

Вместо заключения. Для нас было приятной неожиданностью выйти на многочлены Шарлье, т. е. на один из пяти «кирпичиков» теории ортогональных многочленов дискретной переменной. Известно, что этой теорией в свое время был увлечен Я. А. Смородинский, а это означает, что он знал о ней все, или почти все. Не исключено, что наши результаты вызвали бы у него улыбку человека, которому рассказали хороший анекдот. Вопрос лишь в том, слышал он этот анекдот раньше или нет. Во всех случаях мы сожалеем, что не можем узнать мнение самого Якова Абрамовича обо всем этом.

Литература

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
2. *Pogosyan G. S., Smorodinsky Ya. A., Ter-Antonyan V. M.* J. Phys., **A14**, 769, 1981.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. **2**. М.: Наука, 1974.
4. *Луценко И. В., Сисакян А. Н., Торосян Г. Т.* Сообщения ОИЯИ Р2-13-049, Дубна, 1980.

Subalgebras of Lie Algebras and Their Applications in Physics*

P. WINTERNITZ

1. Introduction

I had the good fortune to arrive to the Joint Institute for Nuclear Research in Dubna, then USSR, in 1963 to work in the research group led by Yakov Abramovich Smorodinsky. The first article he gave me to read was the then not yet published manuscript by N. Ya. Vilenkin and himself on «Invariant Expansions of Relativistic Amplitudes» [1]. This article and its scientific implications had a great influence on my research for quite a few years. The article [1] remains surprisingly topical to this day. Indeed, it made clear the fact that different classes of special functions can come up as basis functions for representations of the same group G, acting on the same homogeneous space G/H. In other words, it raised the question of classifying different possible bases for representations of a given Lie group. This in turn is related to several other problems: that of classifying all subalgebras of a given Lie algebra, of considering complete sets of commuting operators in the enveloping algebra of a given Lie algebra and that of separating variables in Laplace—Beltrami, Hamilton—Jacobi, Schrödinger and other equations.

In this article I plan to review some results on the classification of subalgebras of finite dimensional Lie algebras. This line of research for me started with the realization that the different expansions presented in Ref. 1 correspond to different reductions of the homogeneous Lorentz group $O(3,1)$ to its subgroups. To my surprise, a complete classification of continuous subgroups of $O(3,1)$ was not available, so we started out by providing one [2]. Ten years later, I returned to this problem in much greater generality in a series of articles, written in collaboration with colleagues in Montreal [3–6].

In Section 2 we shall discuss the problem of finding all subalgebras of a given Lie algebra and hence all closed connected subgroups of the corresponding Lie group. Section 3 is devoted to a special class of subalgebras, namely maximal abelian subalgebras of the classical Lie algebras. In Section 4 we briefly discuss two of the many applications of subalgebra classification, namely harmonic analysis on a homogeneous space and symmetry reduction of a system of partial differential equations (the stimulated Raman scattering equations.)

2. How to Classify All Subalgebras of a Given Lie Algebra

Let us consider a given finite-dimensional Lie algebra L and the corresponding Lie group $G_L = \langle \exp L \rangle$. Our aim is to classify all subalgebras $L_i \supseteq L$ into conjugacy classes under the action of the group G_L. In other words, we wish to produce a representative list $S(L)$ of Lie subalgebras of L, such that every subalgebra L_i is G conjugate precisely to one algebra in the list (and hence no two algebras in the list are mutually conjugated).

The methods used to obtain such a list depend on the nature of the algebra L. We shall restrict to Lie algebras over a field F of characteristic zero (more specifically F will be

* In memory of Professor Ya. A. Smorodinsky.

either the reals $\mathbb{R}$, or the complex numbers $\mathbb{C}$). Three different cases, covering all possible Lie algebras will be distinguished, namely

(1) L is simple

(2) L is the direct sum of two nontrivial Lie algebras

$$L = L_1 \oplus L_2, \quad [L_i, L_i] \subseteq L_i, \quad [L_1, L_2] = 0, \\ L_1 \cap L_2 \approx 0, \quad L_i \neq 0. \tag{2.1}$$

(3) L is a semidirect sum of two nontrivial Lie algebras

$$L = F \triangleright N, \quad [F, F] \subseteq F, \quad [N, N] \subseteq N, \\ [F, N] \subseteq N, \; F \cap N \approx 0, \; F \neq 0, N \neq 0. \tag{2.2}$$

Let us discuss the above cases (1) and (2) very briefly and then concentrate on case (3).

If L is simple, we choose some faithful representation $R(L)$. For the classical Lie algebras a convenient choice is the defining representation. We then proceed to determine all inequivalent maximal subalgebras L_M of L. In the chosen representation, the subalgebra L_M can be imbedded reducibly, or irreducibly, i. e. it will, or will not, leave a nontrivial subspace of the representation space invariant, respectively. The reducibly imbedded ones are easy to find. It suffices to classify the subspaces of V according to their dimension for $\mathrm{sl}(n, F)$ algebras, or according to their dimension and signature for algebras acting on a space with an invariant metric. The corresponding subalgebras are then identified as sets of matrices leaving the corresponding representative subspace invariant. This is a problem in linear algebra. Irreducibly imbedded subalgebras must be semisimple, or reductive. The semisimple ones can be extracted from the results of Dynkin [7] (over $\mathbb{C}$), or Cornwell [8] and Komrakov [9] (over $\mathbb{R}$). For simple maximal subalgebras we proceed further in the same manner, i. e. again find their maximal subalgebras. For semisimple (but not simple) subalgebras we use the Goursat method, outlined below. Nonsemisimple subalgebras have a nontrivial Levi decomposition [10] and can be treated using the method for semidirect products, described below.

Now let L be a direct sum, as in eq. (2.1). Subalgebras of L can be either «untwisted», or «twisted» ones. The untwisted ones are themselves direct sums of subalgebras of L_1 and L_2 (classified under $G_1 = \exp L_i$ and $G_2 = \exp L_2$, respectively). The twisted ones are not such direct sums and are not conjugate to them. They are obtained by the Goursat twist method, described elsewhere [11, 12].

Finally, let L be a semidirect sum, as in eq. (2.2). The methods for treating this case were first developed in order to classify all subalgebras of the Poincaré $p(3,1)$ and similitude $\mathrm{sim}(3,1)$ Lie algebras [3]. They were then generalized to the case of F and N arbitrary [3–6].

Let us describe the algorithm step by step, keeping in mind that the procedure is inductive. We assume that the problem in lower dimensions is solved and we proceed to higher ones.

Step 1. Consider the factor algebra $F = L/N$ and classify all of its subalgebras $F_i \supseteq F$ into conjugacy classes under the action of the group $G_F \sim \{\exp F\}$. This is a lower dimensional problem. Form a normalized representative list $S(F)$ of subalgebras of F (including the trivial ones $\{0\}$ and $\{F\}$).

A normalized list is one which contains the normalizer

$$\mathrm{nor}(F_i, F) = \{x \in F \,|\, [x, F_i] \subseteq F_i\}, \tag{2.3}$$

of P_i in F, together with each subalgebra F_i. For each F_i in the list, construct its normalizer in the group G_L

$$\mathrm{Nor}\,(F_i, G_L) = \left\{g \in G_L \,\middle|\, gF_ig^{-1} \subseteq F_i\right\}. \tag{2.4}$$

Step 2. Classify all splitting subalgebras of L, i. e. subalgebras $L_i \supseteq L$ that are semidirect sums of the form

$$L_i \sim F_i \triangleright N_{i,k}, \quad F_i \supseteq F, \quad N_{i,k} \subseteq N. \tag{2.5}$$

To find all splitting subalgebras, we run through all subalgebras $F_i \supseteq F$ of the list $S(F)$ and for each of them, proceed as follows:

1. Find all invariant subalgebras $\widetilde{N}_{i,k} \supseteq N$

$$[F_i, \widetilde{N}_{i,k}] \subseteq \widetilde{N}_{i,k}, \quad \widetilde{N}_{i,k} \subseteq N, \quad [\widetilde{N}_{i,k}, \widetilde{N}_{i,k}] \subseteq \widetilde{N}_{i,k}. \tag{2.6}$$

2. Classify the invariant subalgebras $\widetilde{N}_{i,k}$ into conjugacy classes under the action of the normalizer $\mathrm{Nor}(F_i, G_L,)$ and choose a representative $N_{i,k}$ of each class.

3. Form a normalized representative list $S_1(L)$ of all splitting subalgebras of L

$$S_1(L) = \{L_{i,k} \subseteq L \,|\, L_{i,k} = F_i \triangleright N_{i,k}\}. \tag{2.7}$$

The list $S(F)$ is contained in $S_1(L)$, since we must also include the trivial invariant subalgebra $N_{i,1} = \{0\}$ (and also $N_{i,n} = N$).

4. For each splitting subalgebras $L_{i,k}$ in the list $S_1(L)$ find its normalizer $\mathrm{Nor}(L_{i,k}G_L)$ in the group G_L.

By construction, our list $S_i(L)$ consists of algebras for which we can choose a basis

$$\begin{gathered} L_{i,k} = \{B_a, X_j\}, \quad B_a \in F, \quad X_j \in N \\ a = 1, \dots, f = \dim F_i, \quad j = 1, \dots r = \dim N_{i,k}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Step 3. Classify all ***nonsplitting*** subalgebras of L. A nonsplitting algebra is, by definition, not conjugate to a splitting one. In order to obtain all nonsplitting subalgebras of L we run through the list $S_1(L)$ of splitting ones and for each subalgebra $L_{i,k}$ in the list proceed as follows.

1. Complete the bases of F_i and $N_{i,k}$ in (2.8) to bases for F and N

$$\begin{gathered} F = \{B_1, \dots, B_p, B_{p+1}, \dots B_f\}, \quad N = \{X_1, \dots, X_r, Y_{r+1}, \dots, Y_s\}, \\ f = \dim F, \quad r + s = \dim N, \quad r = \dim N_{i,k}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

2. Form the Lie algebra

$$\widetilde{L}_{i,k} = \left\{ B_a + \sum_{\mu=1}^{s} c_{a\mu} Y_\mu, X_j \right\}, \quad a = 1, \dots, \dim F_i, \quad j = 1, \dots, r, \tag{2.10}$$

where the constants $c_{a\mu}$ are so chosen that $\widetilde{L}_{i,k}$ is indeed a Lie algebra, i. e. satisfies $[\widetilde{L}_{i,k}, \widetilde{L}_{i,k}] \subseteq \widetilde{L}_{i,k}$. To do this we need the commutation relations for L in the appropriate basis

$$\begin{gathered} [B_a, B_b] = f^c_{ab} B_c, \quad [B_a, X_k] = \alpha^l_{ak} X_l, \\ [B_a, Y_\mu] = \rho^\nu_{a\mu} Y_\nu + \sigma^m_{a\mu} X_m, \quad [X_i, X_j] = \omega^m_{ij} X_m, \\ [Y_\mu, Y_\nu] = \beta^\sigma_{\mu\nu} Y_\sigma + \gamma^m_{\mu\nu} X_m, \quad [X_i, Y_\mu] = \lambda^\nu_{i\mu} Y_\nu + \tau^m_{i\mu} X_m. \end{gathered} \tag{2.11}$$

The necessary and sufficient conditions for $\widetilde{L}_{ik}$ to be an algebra is that the coefficients $c_{a\mu}$ should satisfy a system of algebraic relations:

$$c_{b\nu} \rho^\alpha_{b\mu} - c_{a\mu} \rho^\alpha_{b\mu} - c_{ca} f^c_{ab} = -c_{a\mu} c_{b\nu} \beta^\alpha_{\mu\nu}, \quad c_{a\mu} \lambda^\nu_{j\mu} = 0. \tag{2.12}$$

The system (2.12) is nonlinear, because of the right-hand side of the first equation. The problem greatly simplifies if the coefficients $\beta^{\alpha}_{\mu\nu}$ vanish identically. The simplest case occurs if the ideal N is abelian. We then have

$$\beta^{\sigma}_{\mu\nu} = \gamma^{m}_{\mu\nu} = \lambda^{\nu}_{i\mu} = \tau^{m}_{i\mu} = \omega^{m}_{ij} = 0. \tag{2.13}$$

The entire system (2.12) reduces to a homogeneous system of linear equations for the coefficients $c_{a\mu}$:

$$\rho^{\alpha}_{a\nu} c_{b\nu} - \rho^{\alpha}_{b\mu} c_{a\mu} = f^{c}_{ab} c_{c\alpha}. \tag{2.14}$$

This is a Lie algebra cohomology type equation and it means that the coefficients $c_{a\mu}$ form 1-cocycles.

3. Classify the coefficients $c_{a\mu}$, satisfying the system (2.12) (that reduces to (2.14) for $\beta^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$), into conjugacy classes under the group

$$\widetilde{G} \sim \operatorname{Nor}(L_{i,k}, G_L) \triangleright \operatorname{Nor}(N_{i,k}, G_N). \tag{2.15}$$

The classification task is greatly simplified for N abelian, when we have $\operatorname{Nor}(N_{i,k}, G_N) \sim G_N$. In this case we can use the group $G_N = \langle \exp N \rangle$ to generate trivial cocycles: coboundaries. Indeed, for $[N, N] = 0$ we have

$$e^{\lambda_\mu Y_\mu}(B_a + c_{a\alpha} Y_\alpha) e^{-\lambda_\mu Y_\mu} = B_a + \left(c_{a\alpha} - \lambda_\mu \rho^{\alpha}_{a\mu}\right) Y_\alpha - \lambda_\mu \sigma^{m}_{a\mu} Y_m. \tag{2.16}$$

We can hence freely choose the coefficients λ_μ so as to eliminate all the 1-coboundaries from the 1-cocycles.

4. Form the final representative list of all subalgebras of L as the union of the two lists of splitting and nonsplitting subalgebras, respectively,

$$S(L) = S_1(L) \cup S_2(L). \tag{2.17}$$

At this stage it is usually convenient to order the obtained representative subalgebras according to their dimension and isomorphy class.

As an example, let us consider the Lie algebra $p(2,1)$ of the Poincaré group $P(2,1)$ in $2+1$ dimensions [13]. We denote the generators of Lorentz boosts in the x and y directions K_1 and K_2, respectively. Rotations correspond to L_3, translations to P_0, P_1 and P_2. The nonzero commutation relations are

$$\begin{aligned} &[K_1, K_2] = -L_3, && [L_3, K_1] = K_2, && [L_3, K_2] = -K_1, \\ &[L_3, P_1] = P_2, && [L_3, P_2] = -P_1, && [K_1, P_1] = P_0, \\ &[K_1, P_0] = P_1, && [K_2, P_2] = P_0, && [K_2, P_0] = P_2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

The ideal $N = \{P_0, P_1, P_2\}$ is abelian.

Step 1. Subalgebras of $F \sim O(2,1) \sim \{K_1, K_2, L_3\}$. We have:

$$\begin{gathered} F_1 = \{0\}, \quad F_2 = \{L_3\}, \quad F_3 = \{K_1\}, \\ F_4 = \{K_2 + L_3\}, \quad F_5 = \{K_1, K_2 + L_3\}, \quad F_6 = \{K_1, K_2, L_3\}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Algebras F_2, F_3, F_5 and F_6 are self normalizing, and we have $\operatorname{nor}(F_1 F) = F_6$, $\operatorname{nor}(F_4, F) = F_5$.

In the group, we have $\operatorname{Nor}(F_3, G_F) = \exp F_3 \cup \{e^{\pi L_3}\}$.

Step 2. Splitting subalgebras of $p(2,1)$. Let us just list the invariant subspaces $N_{i,k}$ for each subalgebra F_i.

$$\begin{aligned} F_1\colon\ & N_{1,0} = \{0\}, && N_{1,1} = \{P_0\}, && N_{1,2} = \{P_1\}, \\ & N_{1,3} = \{P_0 + P_1\}, && N_{1,4} = \{P_1, P_2\}, && N_{1,5} = \{P_0, P_1\}, \\ & N_{1,6} = \{P_0 + P_1, P_2\}, && N_{1,7} = \{P_0, P_1, P_2\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

We see that the above subspaces (that are automatically subalgebras, since N is abelian) are completely characterized by their dimension and signature.

$$F_2 = \{L_3\}, \quad N_{2,0} = \{0\}, \quad N_{2,1} = \{P_0\}, \tag{2.21}$$
$$N_{2,2} = \{P_1, P_2\}, \quad N_{2,3} = \{P_0, P_1, P_2\}$$

$$F_3 = \{K_1\}, \quad N_{3,0} = \{0\}, \quad N_{3,1} = \{P_2\}, \tag{2.22}$$
$$N_{3,2} = \{P_0 - P_1\}, \quad N_{3,3} = \{P_0, P_1\},$$
$$N_{3,4} = \{P_0 - P_1, P_2\}, \quad N_{3,5} = \{P_0, P_1, P_2\}$$

$$F_4 = \{K_2 + L_3\}, \quad N_{4,0} = \{0\}, \quad N_{4,1} = \{P_0 - P_1\}, \tag{2.23}$$
$$N_{4,2} = \{P_2, P_0 - P_1\}, \quad N_{4,3} = \{P_0, P_1, P_2\},$$

$$F_5 = \{K_1, K_2 + L_3\}, \quad N_{5,0} = \{0\}, \quad N_{5,1} = \{P_0 - P_1\}, \tag{2.24}$$
$$N_{5,2} = \{P_0 - P_1, P_2\}, \quad N_{5,3} = \{P_0 - P_1, P_2\},$$

$$F_6 = \{K_1, K_2, L_3\}, \quad N_{6,0} = \{0\}, \quad N_{6,1} = \{P_0, P_1, P_2\}. \tag{2.25}$$

Thus, we have the list S_1 of all splitting subalgebras of $p(2,1)$.

Step 3. Most of the subalgebras in the list S_1 do not have nonsplitting extensions. Let us just list those that do.

F_2. We put $\tilde{L}_3 = L_3 + aP_0 + bP_1 + cP_2$, however, b and c correspond to coboundaries, since we have

$$e^{\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_0} \tilde{L}_3 e^{-\lambda P_1 - \mu P_2 - \nu P_3} = L_3 + aP_0 + bP_1 + cP_2$$
$$-\lambda P_2 + \mu P_1 = L_3 + aP_0 \quad (\lambda = c, \mu = -b).$$

The nonsplitting subalgebras thus obtained are

$$F_2. \quad NS_{2,1} = \{L_3 + aP_0\}, \quad NS_{2,1} = \{L_3 + aP_0, P_1, P_2\}, \quad a \neq 0. \tag{2.26}$$

$$F_3. \quad NS_{3,1} = \{K_1 + aP_2\}, \quad NS_{3,2} = \{K_1 + aP_2, P_0 - P_1\}, \tag{2.27}$$
$$NS_{3,3} = \{k_1 + aP_2, P_0, P_1\}, \quad a \neq 0.$$

$$F_4. \quad NS_{4,1} = \{K_2 + L_3 + \varepsilon(P_0 + P_1)\}, \tag{2.28}$$
$$NS_{4,2} = \{K_2 + L_3 + \varepsilon(P_0 + P_1), P_0 - P_1\},$$
$$NS_{4,3} = \{K_2 + L_3 + \varepsilon(P_0 + P_1), P_2, P_0 - P_1\}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

$$F_5. \quad NS_{4,1} = \{K_1 + aP_2, K_2 + L_3, P_0 - P_1\}, \quad a \neq 0. \tag{2.29}$$

Step 4. Final representative list of subalgebras of $p(2,1)$. We order the list by dimension, using the notation $A_{p,i}$ where p denotes the dimension and i enumerates subalgebras of the same dimension. If an algebra is decomposable, we present it as a direct sum. For solvable Lie algebras we indicate their nilradical (NR), i.e. their maximal nilpotent ideal. The results are presented in Table 1.

The example of the algebra $p(2,1)$ shows that the classification algorithm is easy to apply and that it can be (and should be) computerized. It also shows that the results are quite intricate, even for a relatively low-dimensional Lie algebra. The classification procedure has been applied to the conformal algebra of Minkowski space $o(4,2)$ and to all of its maximal subalgebras, as well as many other Lie algebras [3–6].

The methods have been generalized to the case of infinite-dimensional Lie algebras, where subalgebras are classified under the action of the corresponding infinite-dimensional Lie groups [14–16]. This has proven to be particularly important in the study of symmetries of soliton type equations in $2+1$ dimensions [6, 14–16].

Table 1

Subalgebras of the Poincaré algebra $p(2,1)$

No	Basis	Range of parameters	Isomorphy class
$A_{6,1}$	$\{K_1, K_2, L_3, P_0, P_1, P_2\}$	—	$p(2,1)$
$A_{5,1}$	$\{K_1, K_2+L_3, P_0, P_1, P_2\}$	—	$NR(A_{5,1}) = A_{4,4}$
$A_{4,1}$	$\{K_1, K_2+L_3, P_0-P_1, P_2\}$	—	$NR(A_{4,1}) = A_{3,7}$
$A_{4,2}$	$\{K_1, P_0, P_1\} \oplus \{P_2\}$	—	$NR(A_{4,2}) = A_{3,9}$
$A_{4,3}$	$\{L_3, P_1, P_2\} \oplus \{P_0\}$	—	$NR(A_{4,3}) = A_{3,9}$
$A_{4,4}$	$\{K_2+L_3, P_0, P_1, P_2\}$	—	Nilpotent
$A_{3,1}$	$\{K_1, K_2, L_3\}$	—	$O(2,1)$
$A_{3,2}$	$\{L_3+aP_0, P_1, P_2\}$	$a \in \mathbb{R}$	$NR(A_{3,2}) = A_{2,7}$
$A_{3,3}$	$\{K_1+aP_2, P_0, P_1\}$	$a \in \mathbb{R}$	$NR(A_{3,3}) = A_{2,8}$
$A_{3,4}$	$\{K_1, K_2+L_3, P_0-P_1\}$	—	$NR(A_{3,4}) = A_{2,3}$
$A_{3,5}$	$\{K_1+aP_2, K_2+L_3, P_0-P_1\}$	$a \neq 0$	$NR(A_{3,5}) = A_{2,3}$
$A_{3,6}$	$\{K_1, P_0-P_1\} \oplus \{P_2\}$	—	$NR(A_{3,6}) = A_{2,9}$
$A_{3,7}$	$\{K_2+L_3, P_2, P_0-P_1\}$	—	Nilpotent
$A_{3,8}$	$\{K_2+L_3+\varepsilon(P_0+P_1), P_2, P_0-P_1\}$	$\varepsilon = \pm 1$	Nilpotent
$A_{3,9}$	$\{P_0, P_1, P_2\}$	—	Abelian
$A_{2,1}$	$\{K_1, +aP_2, P_0-P_1\}$	$a \in \mathbb{R}$	$NR(L) = A_{1,7}$
$A_{2,2}$	$\{K_1, K_2+L_3\}$	—	$NR(L) = A_{1,3}$
$A_{2,3}$	$\{K_2+L_3, P_0-P_1\}$	—	Abelian
$A_{2,3}$	$\{K_1, K_2+L_3, P_0-P_1, P_2\}$	—	Abelian
$A_{2,4}$	$\{K_2+L_3+\varepsilon(P_0+P_1), P_0-P_1\}$	$\varepsilon = \pm 1$	Abelian
$A_{2,5}$	$\{K_1, P_2\}$	—	Abelian
$A_{2,6}$	$\{L_3, P_0\}$	—	Abelian
$A_{2,7}$	$\{P_1, P_2\}$	—	Abelian
$A_{2,8}$	$\{P_0, P_1\}$	—	Abelian
$A_{2,9}$	$\{P_0+P_1, P_2\}$	—	Abelian
$A_{1,1}$	$\{K_1+aP_2\}$	$a \in \mathbb{R}$	—
$A_{1,2}$	$\{L_3+aP_0\}$	$a \in \mathbb{R}$	—
$A_{1,3}$	$\{K_2+L_3\}$	—	—
$A_{1,4}$	$\{K_2+L_3+\varepsilon(P_0+P_1)\}$	$\varepsilon = \pm 1$	—
$A_{1,5}$	$\{P_0\}$	—	—
$A_{1,6}$	$\{P_1\}$	—	—
$A_{1,7}$	$\{P_0-P_1\}$	—	—

A different approach may be preferable if we are interested in specific types of subalgebras of certain classes of algebras. Thus, a problem of considerable mathematical and physical interest is that of classifying the maximal abelian subalgebras of the classical Lie algebras [17–21].

3. Maximal Abelian Subalgebras of the Classical Lie Algebras

Maximal Abelian Subalgebras (MASAs) of a given Lie algebra L are of particular interest among all subalgebras of L. Thus, in classical mechanics they provide complete sets of integrals of motion in involution. In quantum mechanics they provide complete sets of commuting operators. In the study of classical, or quantum Hamiltonian systems, MASAs provide ignorable variables. They provide the most efficient tools for separating

variables in differential equations, or for performing symmetry reduction for nonlinear partial differential equations. They provide a tool for generating integrable systems with nontrivial interactions from free systems in higher-dimensional spaces.

From the mathematical point of view the task of classifying all MASAs of a given Lie algebra L is an extension of that of classifying all elements of L. This is a classical problem, analyzed by Frobenius [22], Schur [23] and others and partly solved by Kravchuk [24] and his school [25] for MASAs of sl $(n, \mathbb{C})$. Maltsev [26] has classified MASAs of maximal dimension of the classical Lie algebras, Kostant [27] and Sugiura [28] have classified all Cartan subalgebras.

We recall that a Cartan subalgebra is a self-normalizing MASA [10] and that complex Lie algebras, as well as compact ones, have only one class of Cartan subalgebras (up to conjugacy), whereas real noncompact ones can have many classes of them.

We have made significant progress in classifying all MASAs of all classical Lie algebras, over both $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$ [17–21].

This is not the place to discuss these results in detail. Let us just give the flavour of the problem and its solution for the symplectic Lie algebras $\mathrm{sp}(2n, \mathbb{R})$ and $\mathrm{sp}(2n, \mathbb{C})$.

The essence is that using several decomposition theorems, we are able to reduce the classification of all MASAs to that of classifying special classes of MASAs, the so-called Maximal Abelian Nilpotent Subalgebras (MANSs). These consist entirely of nilpotent elements in the considered Lie algebra, represented by nilpotent matrices in any finite dimensional representation.

We realize $\mathrm{sp}(2n, F)$ by matrices $x \in F^{2n\times 2n}$ satisfying

$$XK + KX^T = 0, \quad K = -K^T \in F^{2n\times 2n}, \quad \det K \neq 0. \tag{3.1}$$

The results concerning MASAs of $\mathrm{sp}(2n, F)$ are summed up in Fig. 1.

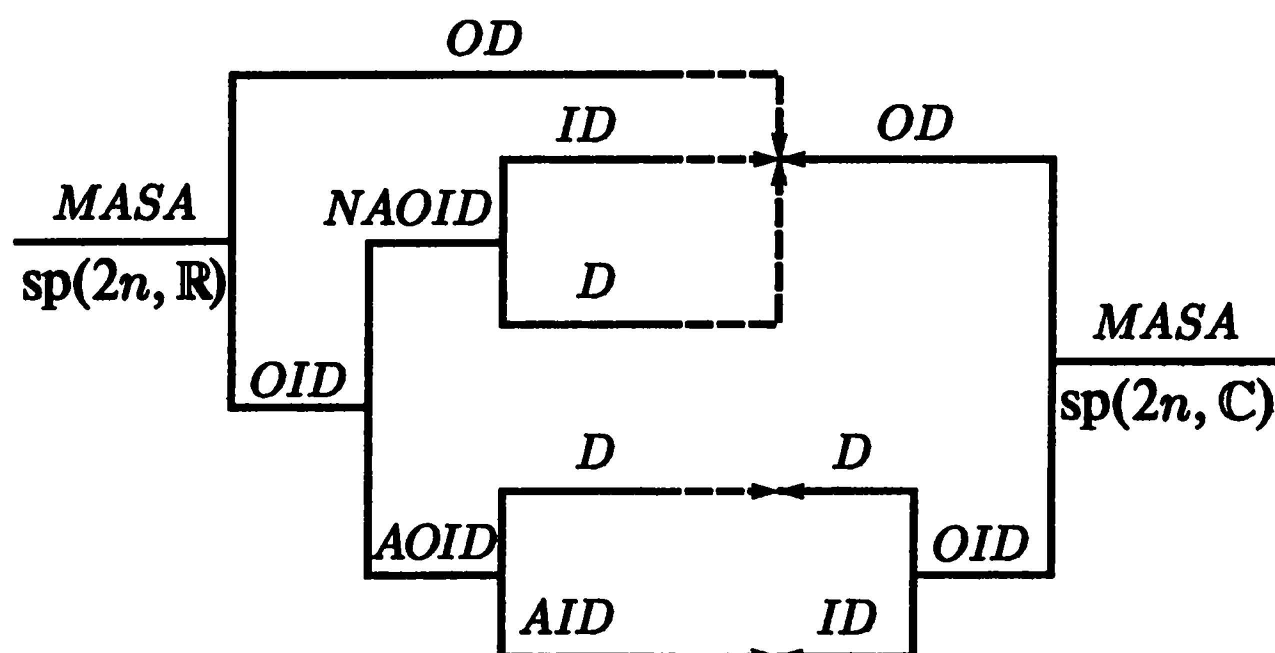


Fig. 1. MASAs of $\mathrm{sp}(2n, F)$

Theorem 1. *The symplectic Lie algebra* $\mathrm{sp}(2n, \mathbb{C})$ *allows* 3 *types of MASAs.*

1. *Orthogonally decomposable MASAs* (*OD*). *They can be represented by matrix sets* (X,K) *satisfying eq.* (3.1) *and of the form*

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_k \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_k \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

where each X_j *represents a MASA of* $\mathrm{sp}(2n_i, \mathbb{C})$, $n_1 + n_2 + n_k = n$, *and at most one of these MASAs is a MANS.*

2. *Orthogonally indecomposable, but decomposable MASAs (OID & D). They can he represented by the matrix sets*

$$X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

where A represents an indecomposable MASA gl(n, ℂ), i. e.

$$A = \mathbb{C}I_n \oplus MANS \ of \ \mathrm{sl}(n, \mathbb{C}). \tag{3.4}$$

3. *Orthogonally indecomposable and indecomposable MASAs (OID& ID). These are MANSs of* sl$(n, \mathbb{C})$.

Theorem 2. *The real symplectic Lie algebra* sp$(2n, \mathbb{R})$ *allows 5 types of MASAs.*

1. *Orthogonally decomposable (OD) MASAs as in eq.* (3.2) *where* X_j *are MASAs of* sp$(2n_i, \mathbb{R})$. *Upon complexification they turn into OD MASAs of* sp$(2n, \mathbb{C})$.

2. *Not absolutely orthogonally decomposable and indecomposable MASAs, (NAOID & ID). They can be represented by matrix sets of the form*

$$X = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_n + MANS \ of \ su(k, n, -k), \ \left[\frac{n+1}{2}\right] \leqslant k \leqslant n-1. \tag{3.5}$$

Upon complexification they become orthogonally decomposable.

3. *Nonabsolutely orthogonally decomposable but decomposable MASA (NAOID & D). Such MASAs exist for n even only and have the form*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \oplus I_{n/2} \oplus MANS \ of \ \mathrm{sl}(n/2, \mathbb{C}),$$

where sl$(n/2, \mathbb{C})$ *is represented by real* $n \times n$ *matrices.*
Upon complexification they also become orthogonally decomposable.

4. *Absolutely orthogonally indecomposable but decomposable MASAs (AOID & D). They have the form of eq.* (3.3) *where A is an indecomposable MASA of* gl$(n, \mathbb{R})$.

5. *Absolutely orthogonally indecomposable and absolutely indecomposable (AOID & AID) MASAs. These are MANSs of* sl$(n, \mathbb{R})$.

Thus, to obtain all MASAs of sp$(2n, \mathbb{C})$ and sp$(2n, \mathbb{R})$ we must classify all MANSs of sl(n, C), sp$(2n, \mathbb{C})$, su(p, q), sl$(n, \mathbb{R})$ and sp$(2n, \mathbb{R})$.
The problem of classifying MANSs is studied elsewhere [17–21, 25].

4. Applications of Subgroup Classifications

4.1. Separation of Variables, Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Expansions of Scattering Amplitudes

The original idea of Ref. 1 was implemented somewhat later [2, 29–31] in a manner that can be viewed as an application of subalgebra (and subgroup) classification. Indeed, two variable expansions of scattering amplitudes for reactions of the type $1+2 \to 3+4$ were introduced first for spinless particles [2, 29, 30], then for arbitrary spins [32, 33]. The expansions are based on the representation theory of the homogeneous Lorentz group $O(3, 1)$ and are written in bases corresponding to different subgroups. Let us review several of them for scalar particles.

1. $O(3,1) \supset O(3) \supset O(2)$. The amplitude is expanded as

$$f(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\int_{0}^{\infty} \rho^2 d\rho A_l(\rho)\frac{1}{\sinh a}P_{-1/2+i\rho}^{-(l+1/2)}(\cosh a)P_l(\cos\theta), \qquad (4.1)$$

where θ is the center-of-mass scattering angle and a is related to the c.m.s. total energy

$$m_3 \cosh a = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \quad s = (p_1 + p_2)^2, \qquad (4.2)$$

(m_i, are the particle masses and p_i their four-momenta). In eq. (4.1) we recognize the standard formulas of phase shift analysis, supplemented by an expansion of the partial wave amplitudes as functions of energy (P_l are Legendre polynomials, P_μ^ν associated Legendre functions). Expansion (4.1) was generalized to the case of arbitrary spins [32, 33] and then successfully applied to analyze the results of nucleon-nucleon scattering experiments over large regions of energies (energy dependent partial wave analysis) [34].

2. $O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(2)$. The expansion

$$f(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} q \tanh \pi q \, dq \int_{0}^{\infty} \rho^2 d\rho \Big\{ A^+(\rho,q)\frac{1}{\sqrt{\cosh\alpha}}P_{-1/2+i\rho}^{iq}(-i\sinh\alpha) + $$
$$+ A^-(\rho,q)\frac{1}{\sqrt{\cosh\alpha}}P_{-1/2+i\rho}^{iq}(i\sinh\alpha)\Big\} P_{-1/2+iq}(\cosh\beta). \qquad (4.3)$$

In eq. (4.2) we recognize the background integral of complex angular momentum theory, together with an expansion of the corresponding Regge amplitude. The variables α and β are related to the invariant energy $s = (p_1+p_2)^2$ and momentum transfer $t = (p_1-p_3)^2$ as in

$$\begin{aligned} m_1 \sinh\alpha &= \frac{t+m_1^2-m_3^2}{2\sqrt{-t}}, \\ \cosh\beta &= -\frac{2t(s-m_1^2-m_2^2)+(t+m_1^2-m_3^2)(t+m_2^2-m_4^2)}{\{[t-(m_1-m_3)^2][t-(m_1+m_3)^2][t-(m_2-m_4)^2][t-(m_2+m_4)^2]\}^{1/2}}. \end{aligned} \qquad (4.4)$$

3. $O(3,1) \supset E(2) \supset O(2)$. The expansions in this case are in terms of Macdonald and Bessel cylindrical functions and can be written as

$$f(\gamma,r) = \int_{0}^{\infty} k\,dk \int_{0}^{\infty} \rho^2\,d\rho\,A(\rho,k)K_{i\rho}(ke^\gamma)J_0(kr). \qquad (4.5)$$

The variables γ and r are again related [29] to the kinematic variables s and t, but we skip the formulas here. Expansion (4.5) can be viewed as an eikonal expansion, supplemented by an expansion of the coefficient in terms of a complementary variable γ.

In the entire approach, the amplitude $f(s,t) = f(\mathbf{u})$ is viewed as a function on an $O(3,1)/O(3)$ hyperboloid (velocity space) with $\mathbf{u}^2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1$. The reductions $O(3,1) \supset O(3) \supset O(2)$; $O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(2)$ and $O(3,1) \supset E(2) \supset O(2)$, correspond to the introduction of spherical

$$\mathbf{u} = (\cosh a,\ \sinh a \sin\theta\cos\phi,\ \sinh a \sin\theta \sin\phi,\ \sinh a \cos\theta),$$

hyperbolic

$$\mathbf{u} = (\cosh\alpha\cosh\beta,\ \cosh\alpha\sinh\beta\cos\phi,\ \cosh\alpha\sinh\beta\sin\phi,\ \sinh\alpha),$$

and horospheric

$$\mathbf{u} = \left(\cosh\gamma + \frac{1}{2}r^2e^{-\gamma},\ re^{-\gamma}\cos\phi,\ re^{-\gamma}\sin\phi,\ \sinh\gamma + \frac{1}{2}r^2e^{-\gamma}\right),$$

coordinates, respectively.

We mention here that other separable coordinates can be used to write expansions. For instance, elliptic coordinates on the hyperboloid correspond to the reduction to a discrete subgroup (reflections in all coordinate planes). They provide crossing symmetric expansions of scattering amplitudes. The basis functions are products of Lame functions [35].

The separation of variables aspect of the subgroup classification has also been extensively developed [2, 36–38].

4.2. Symmetry Reduction for Nonlinear Partial Differential Equations

Let us assume that we are given a system of partial differential equations (PDE)

$$\Delta(x, u, u_{x_i}, u_{x_ix_k}, \ldots 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^q, \Delta \in \mathbb{R}^n. \tag{4.6}$$

We wish to find some particular exact analytic solutions of eq. (4.6). A very general and efficient method of doing this is symmetry reduction [6, 39]. The method consists of several steps:

(1) Find the symmetry group G of local point transformations taking solutions into solutions

$$\tilde{x} = \Lambda_g(x, u), \quad \tilde{u} = \Omega_g(x, u), \tag{4.7}$$

where g denotes the group parameters and the functions Λ and Ω are such that $\tilde{u}(g, \tilde{x})$ is a solution, whenever $u(x)$ is one, and $\tilde{u}(g, \tilde{x})$ exists.

(2) Identify the Lie algebra of G as an abstract Lie algebra and classify its subalgebras L_i into conjugacy classes under the action of G.

(3) Find the invariants of the corresponding subgroups $G_i \subset G$, and reexpress the equation in terms of invariants. There are fewer invariants than original variables (x, u), hence we have a reduction. Typically, for PDEs we reduce to a lower number of independent variables, usually to ordinary differential equations, or even algebraic ones.

(4) Solve the reduced equations.

(5) Do physics with the solutions.

Let us just consider one example here, namely the stimulated Raman scattering equations, describing among other things, an optical pump, used to enhance a signal (the Stokes wave) propagating in an optical fiber (see Ref. [40–42] and references therein).

We write the equations in a normalized form as

$$u_{1,x} + iu_2^*u_3^* = 0, \quad u_{2,x} - iu_3^*u_1^* = 0, \quad u_{3,t} - iu_1^*u_2^* = 0, \tag{4.8}$$

where u_i, are three complex waves ($A_1 = iu_1^*$ is the pump wave, $A_2 = u_2$ the Stokes wave and $X = u_3$ corresponds to material excitation). Dissipation and other secondary phenomena are ignored.

Applying a known algorithm [6, 39] and an appropriate computer program [43], we find the Lie algebra of the symmetry group of eq. (4.8) to be infinite dimensional. A suitable basis is given by:

$$\begin{aligned} P_1 = \partial_x, \quad D &= x\partial_x - \frac{1}{2}(M_1\partial_{M_1} + M_2\partial_{M_2} + 2M_3\partial_{M_3}) \\ V = -\partial_{\alpha_2} + \partial_{\alpha_3}, \quad U(h) &= h(t)(-\partial_{\alpha_1} + \partial_{\alpha_2}) \\ T(f) = f(t)\partial_t &- \frac{1}{2}\dot{f}(t)(M_1\partial_{M_1} + M_2\partial_{M_2}). \end{aligned} \tag{4.9}$$

We have put

$$u_k = M_k e^{i\alpha k}, \quad 0 \leqslant M_k < \infty, 0 \leqslant \alpha_k < 2\pi, \quad k = 1, 2, 3.$$

Above, $f(t)$ and $h(t)$ are arbitrary functions of time and they make the algebra infinite dimensional. Clearly P_1, D and V correspond to x-translations, dilations and constant gauge transformations. The element $U(h)$ generates time dependent gauge transformations and $T(f)$ corresponds to an arbitrary reparametrization of time. If we take $f(t) = 1$, t or t^2, we obtain time translations, dilations and projective transformations, respectively.

We wish to reduce eq. (4.8) to a system of ordinary differential equations. To do this, we require invariance under a one-dimensional subgroup of the symmetry group. Any one-dimensional subalgebra of the algebra (4.9)

$$X = \alpha D + \beta T(f) + \gamma P_1 + \delta U(h) + \mu V, \tag{4.10}$$

acting nontrivially on space-time (x, t), is conjugate to precisely one of the subalgebras:

$$\begin{aligned} A_1(\alpha, \beta) &= D + \alpha T(1) + \beta V, \quad \alpha \neq 0, \\ A_2(h, \beta) &= D + U(h) + \beta V, \\ A_3(\alpha, \beta) &= T(1) - \alpha P_1 + \beta V, \quad \alpha \neq 0, \\ A_4(h, \beta) &= P_1 + U(h) + \beta V, \\ A_5(h) &= T(1) + \beta V. \end{aligned} \tag{4.11}$$

The algebra $A_5(h)$ leads to rather uninteresting plane wave solutions. Algebra $A_4(h, \beta)$ provides «phase wave solutions». Traveling wave solutions are provided by $A_3(\alpha, \beta)$, in particular, solitons and periodic «cnoidal waves». The most interesting solutions are the self-similar ones, called «accordions» [40–42], invariant under the group generated by the algebra $A_1(\alpha, \beta)$. The general form of these solutions is

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{-t/2\alpha} R_1(\xi) e^{i\psi_1(\xi)}, \\ u_2 &= e^{-t/2\alpha} R_2(\xi) e^{i[\psi_2(\xi) - \beta t/\alpha]}, \\ u_3 &= \frac{1}{x} R_3(\xi) e^{i[\psi_3(\xi) + \beta \ln x]}, \\ &\alpha \neq 0, \quad \xi = x e^{-t/\alpha}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

where R_i and ψ_i satisfy

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= -\frac{1}{\xi} R_2 R_3 \sin\psi, \qquad R_1\dot{\psi}_1 = -\frac{1}{\xi} R_2 R_3 \cos\psi, \\ \dot{R}_2 &= \frac{1}{\xi} R_3 R_1 \sin\psi, \qquad R_2\dot{\psi}_2 = \frac{1}{\xi} R_3 R_1 \cos\psi, \\ \dot{R}_3 &= -\alpha R_1 R_2 \sin\psi, \qquad R_3\dot{\psi}_3 = -\alpha R_1 R_2 \cos\psi, \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \beta \ln\xi. \end{aligned} \tag{4.13}$$

The equations allow two first integrals, namely,

$$I_1^2 = R_1^2 + R_2^2, \quad I_2 = R_1 R_2 R_3 \cos\psi - \frac{\beta}{2} R_1^2. \tag{4.14}$$

Using the integrals, and for simplicity setting $\beta = 0$ we decouple the system (4.12) and obtain an equation for $R_1(\xi)$. Setting

$$R_1 = I_1 \left(\frac{W}{W-1} \right)^{1/2}, \tag{4.15}$$

we find that $W(\xi)$ satisfies

$$\ddot{W} = \left(\frac{1}{2W} + \frac{1}{W-1} \right) \dot{W}^2 - \frac{1}{\xi} \dot{W} + \frac{2\alpha}{\xi} I_1 W + \frac{2I_2^2}{I_1^2} \xi^{-2} (W-1)^2 \left(-W + \frac{1}{W} \right). \tag{4.16}$$

In eq. (4.15) we recognize a canonical equation for the fifth Painlevé transcendent [44]

$$W = P_V(a, b, c, d; \xi), \quad a = -\frac{2I_2^2}{I_1^2}, \quad b = \frac{2I_2^2}{I_1^2}, \quad c = -2\alpha I_1, \quad d = 0. \tag{4.17}$$

Thus, we have obtained an explicit expression for the pump amplitude R_1. All the other quantities R_i and ψ_i are easy to obtain from there. The asymptotic behavior of the Painlev'e transcendents is known, as are connection formulas [45]. The behavior described by the explicit formulas (4.14),..., (4.17) is the correct observed one: the pump behaves as a pump, i. e. it boosts the depleted energy of the signal (the Stokes wave) to the original value and the pump signal itself oscillates to zero, as does the material excitation.

5. Conclusions

This article has a somewhat unusual character. Part personal recollections, part review, part original results. Since it is written for a volume dedicated to Ya. A. Smorodinsky, it is perhaps appropriate that it reflects the influence of Ya. A. S. on at least one of his students. One of his statements that made a lasting impression on me, during my formative years as a researcher at the Joint Institute for Nuclear Research in Dubna, is the following (paraphrased from memomy): if one is doing mathematical physics, one must use rigorous, state of the art abstract mathematics. If one is doing theoretical physics, one must see the calculations through to the very end, to make them comparable with experiments, or to use them for a phenomenological analysis of experiments.

Acknowledgements

I thank the editors for their patience and Dr. Naya Ya. Smorodinskaya for her encouragement and help.

The author's research is partly supported by research grants from NSERC of Canada and FCAR du Québec.

References

1. *Vilenkin N. Ya., Smorodinsky Ya. A.* Zh. Eksper. Teoret. Fiz., **46**, 1793, 1964; Sov. Phys., JETP, **19**, 1209, 1964.
2. *Winternitz P., Fris I.* Yad. Fiz., **1**, 889, 1965; Sov. J. Nucl. Phys., **1**, 636, 1965.
3. *Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H.* J. Math. Phys., **16**, 1597, 1975; **16**, 1615, 1975; **17**, 717, 1976.
4. *Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., and Zassenhaus H.* J. Math. Phys., **17**, 977, 1976; J. Math. Phys., **18**, 2259, 1977.
5. *Patera J., Sharp R. T. Winternitz P., and Zassenhaus H.* J. Math. Phys., **18**, 2259, 1977.

6. *Winternitz P.* In: Integrable systems, quantum groups and quantum field theories. Edited by L. A. Ibort and M. A. Rodriguez, Kluwer, Dordrecht, 1993. P. 429–495.
7. *Dynkin E. B.* Trudy Moskov. Mat. Obshch., **1**, 39, 1952; Amer. Math. Soc., Transl. Ser. 2, **6**, 245, 1957.
8. *Cornwell J. F.* Group theory in physics. **II**. Academic, New York, 1984.
9. *Komrakov B. P.* Dokl. Akad. Nauk, **308**, № 3, 1989; **311**, № 3, 1990; Sov. Math. Dokl., **40**, 329, 1990; **41**, 269, 1991.
10. *Jacobson N.* Lie algebras. Dover, New York, 1979.
11. *Goursat E.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **6**, 9, 1889.
12. *DuVal P.* Homographics, quaternions and rotations. Clarendon Press, Oxford, 1964.
13. *Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H.* Canad. J. Phys. **54**, 950, 1976.
14. *David D., Kamran N., Levi D., Winternitz P.* Phys. Rev. Lett., **55**, 2111, 1985; J. Math. Phys., **27**, 1225, 1986.
15. *Martina L., Winternitz P.* Ann. Phys., **196**, 231, 1989.
16. *Winternitz P.* In: Symmetries and nonlinear phenomena. Edited by D. Levi and P. Winternitz, 1988. P. 358–375.
17. *Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H.* J. Math. Phys., **24**, 1973, 1983.
18. *Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H.* Math. Rep. Ac. Sci. (Canada), **2**, 231, 237, 1980.
19. *del Olmo M. A., Rodriguez M. A., Winternitz P., Zassenhaus H.* Linear Algebra Appl., **135**, 79, 1990.
20. *Hussin V., Winternitz P., Zassenhaus H.* Linear Algebra Appl., **141**, 183, 1990; **173**, 123, 1992.
21. *Kalnins E. G., Winternitz P.* Canad. J. Phys., **72**, 389, 1994.
22. *Frobenius G., Sitzber.* Berlin Akad., **601**, 1896.
23. *Schur I., Reine J.* Angew. Math., **130**, 66, 1905.
24. *Kravchuk M. F.* Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **51**, 126, 1927.
25. *Suprunenko D. A., Tyshkevich R. I.* Commutative matrices. Academic, New York, 1968.
26. *Maltsev A. I.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **9**, 291, 1945; Amer. Math. Soc., Transl. Ser. 1, **9**, 214, 1962.
27. *Kostant B.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **41**, 967, 1955.
28. *Sugiura M.* J. Math. Soc. Japan, **11**, 374, 1959.
29. *Winternitz P., Smorodinsky Ya. A., Sheftel M. B.* Yad. Fiz., **7**, 1325, 1968; Sov. J. Nucl. Phys., **7**, 785, 1968. Yad. Fiz., **8**, 833, 1969; Sov. J. Nucl. Phys., **8**, 485, 1969.
30. *Sheftel M. B., Smorodinsky Ya. A., Winternitz P.* Phys. Lett., **B26**, 241, 1968.
31. *Winternitz P., Lukač I., Smorodinsky Ya. A.* Yad. Fiz., **7**, 192, 1968; Sov. J. Nucl. Phys., **7**, 139, 1968.
32. *Daumens M., Perroud M., Winternitz P.* Phys. Rev., **D19**, 3413, 1979.
33. *Daumens M., Winternitz P.* Phys. Rev., **D21**, 1919, 1980.
34. *Bystricky J., LaFrance P., Lehar F., Perrot F., Winternitz P.* Phys. Rev., **D32**, 575, 1985; Nuovo Cim., **A94**, 319, 1986.
35. *Macfadyen N., Winternitz P.* J. Math. Phys., **12**, 281, 1971; Phys. Rev., **D3**, 1874, 1971.
36. *Miller W., Jr., Patera J., Winternitz P.* J. Math. Phys., **22**, 251, 1981.
37. *Miller W., Jr.* Symmetry and separation of variables. Addison Wesley, 1977.
38. *Kalnins E. G.* Separation of variables for Riemannian spaces of constant curvature. Longman, 1986.
39. *Olver P. J.* Applications of Lie groups to differential equations. Springer, 1993.
40. *Levi D., Menyuk C. R., Winternitz P.* (eds.). Self similarity in stimulated Raman scattering. Les Publications CRM, Montreal, 1994.
41. *Levi D., Menyuk C. R., Winternitz P.* Phys. Rev., **A44**, 6057, 1991; Phys. Rev., **A49**, 2844, 1994.
42. *Menyuk C. R., Levi D., Winternitz P.* Phys. Rev. Lett., **69**, 3048, 1992.
43. *Champagne B., Hereman W., Winternitz P.* Comput. Phys. Comm., **66**, 319, 1991.
44. *Ince E. L.* Ordinary differential equations. Dover, New York, 1956.
45. *Levi D., Winternitz P.* (eds.). Painlevé transcendents, their asymptotics and physical applications. Kluwer, Dordrecht, 1992.

Method of Integral Transforms for Solving Few-Body Reaction Problems in Quantum Mechanics

V. D. EFROS

1. Introduction

Professor Smorodinsky appreciated efforts for finding adequate representations of physical theories or new methods to solve physical problems. Much of his own work falls into this category. He also liked, for instance, to confront the vector representation of the Maxwell equations with that in terms of some specific coordinates. He considered as being curious the fact that while the former representation was introduced in the beginning of the century even in thirties it appeared to be a non-conventional one and was not adopted in teaching in favour of the latter cumbersome representation.

These remarks may have some relevance to the activity outlined here. The method explained below was primarily introduced [1] at the Professor Smorodinsky's laboratory and presented at his seminar. The review includes the results obtained last years. Here we consider the method as applied to calculating an inclusive spectrum, or response

$$R(\varepsilon) = \int df \, \left|\langle \psi_f | \widehat{O} | \psi_0 \rangle\right|^2 \delta(E_f - E_0 - \varepsilon) \tag{1}$$

of a reaction induced by a perturbation $\widehat{O}$. (An example is a (e, e') reaction.) A generalization to the general type $2 \to N$ reactions including those induced by a strong interaction is not considered in this short review and can be found in Refs. [1, 2]. In Eq. (1) ψ_0 is the initial-state wave function, ψ_f are the final-state wave functions, E_0 and E_f are the energies pertaining to these wave functions and ε is the excitation energy. The summation $\int df$ goes over all the states at the same energy.

The conventional quantum mechanical approach proceeds directly from the definition of the response function, Eq. (1). This requires calculating the wave functions ψ_f. They are determined by the many-body Schrödinger equation and the large-distance boundary conditions imposed. At higher energy when various breakup channels are open the number of the boundary conditions is formally infinite. They are quite hard to deal with in actual $A > 3$ calculations which makes it very difficult to obtain ψ_f. (Use of the Faddeev-type integral equations is not a way to avoid the difficulty.) The summation $\int df$ causes a difficulty as well. Indeed, not only the wave functions ψ_f to be found are complicated but also their number is infinite.

Perhaps the only way to overcome these difficulties is to abandon the calculation of the continuum-spectrum wave functions at all and to use a basically different approach. In the framework of the method discussed below only bound-state type calculations are required and the difficulty with the complicated boundary conditions is thus avoided. Powerful ways for performimg few-body bound state calculations were developed last years and they can be applied in the framework of the method discussed. The difficulty with the summation over continuum final states is avoided as well.

2. The Method

In order to obtain $R(\varepsilon)$, Eq. (1), we first shall find its integral transform

$$\Phi(\sigma) = \int K(\sigma, \varepsilon) R(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{2}$$

with some kernel K. It turns out this task is much simpler than a direct calculation of R itself. After that we shall consider Eq. (2) as an integral equation to invert and to get R. Substituting Eq. (1) into Eq. (2) and integrating over $d\varepsilon$ we get

$$\Psi(\sigma) = \int dt\, \langle \psi_0 | \widehat{O}^\dagger | \psi_f \rangle K(\sigma, E_f - E_0) \langle \psi_f | \widehat{O} | \psi_0 \rangle.$$

This may be rewritten as

$$\int df\, \langle \psi_0 | \widehat{O}^\dagger | K(\sigma, \widehat{H} - E_0) | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \widehat{O} | \psi_0 \rangle,$$

$\widehat{H}$ being the Hamiltonian of a system. The last expression allows integration $\int df$ to be done as well using the closure property. Finally, we arrive at the expression

$$\Psi(\sigma) = \langle \psi_0 | \widehat{O}^\dagger K(\sigma, \widehat{H} - E_0) \widehat{O} | \psi_0 \rangle \tag{3}$$

which does not include the continuum wave functions ψ_f.

In cases the operator $\widehat{O}$ includes the ε-dependence, $\widehat{O} = \widehat{O}(\varepsilon)$, Eq. (3) is still valid provided that $\widehat{O}(\varepsilon)$ is replaced by $\widehat{O}(\widehat{H} - E_0)$.In many practical cases the ε-dependence of the operator can be factored out from the beginning.

Eq. (3) may be viewed as a kind of a sum rule. The new feature is that in contrast to the conventional sum rules it includes a dependence on a continuous parameter σ. Due to this Eq. (3) contains in principle the whole information on the response function sought for while the conventional sum rules can provide only a limited information.

Suppose first that a diagonalization of the Hamiltonian H in a subspace of localized functions $\phi_n, n = 1, \ldots, N$, is performed, $\langle \phi_n | H | \phi_{n'} \rangle = E_n \delta_{nn'}$. Then the right-hand side of Eq. (3) can be calculated approximately for any kernel K,

$$\Phi(\sigma) \approx \sum_{n=1}^{N} R(\varepsilon_n) K(\sigma, \varepsilon_n) \tag{4}$$

with $\varepsilon_n = E_n - E_0$, and

$$R(\varepsilon_n) = \left| \langle \phi_n | \widehat{O} | \psi_0 \rangle \right|^2 \tag{5}$$

being a discretized response. Then Eqs. (2), (4) provide a way for obtaining the true response from the discretized one. Indeed, the left-hand side of Eq. (4) stabilized at sufficiently high N values i. e. at sufficiently high level density.

This procedure leads to very accurate results for some 3-body systems [3]. However it is, of course, impractical for large systems. Below other ways for calculating the right-hand side of Eq. (3) are described which make use of a specific form of the kernel K and may be tried for large systems.

a) Generalized Stieltjes Transform

$$K = (\sigma, \varepsilon) = (\sigma + \varepsilon)^{-n}, \tag{6}$$

σ is real, and K is positive. We shall consider the cases $n = 1$ and 2 and we shall denote $\Phi^{(n)}$ the corresponding quantities from Eq. (3). We thus have

$$\Phi^{(n)}(\sigma) = \langle \psi_0 | \widehat{O}^\dagger (\widehat{H} - E_0 + \sigma)^{-n} \widehat{O} | \psi_0 \rangle. \tag{7}$$

We denote

$$\widetilde{\Phi} = \left(\widehat{H} - E_0 + \sigma\right)^{-1}\widehat{O}\psi_0. \tag{8}$$

Then we can calculate $\Phi^{(n)}$ as

$$\Phi^{(1)}(\sigma) = \langle \psi_0 | \widehat{O}^\dagger | \widetilde{\Psi} \rangle, \tag{9}$$

$$\Phi^{(2)}(\sigma) = \langle \widetilde{\Psi} | \widetilde{\Psi} \rangle. \tag{10}$$

The function $\widetilde{\Psi}$ obeys the Schrödinger-like equation with a source

$$\left(\widehat{H} - E_0 + \sigma\right)\widetilde{\Psi} = 0, \quad Q = \widehat{O}\psi_0, \tag{11}$$

equivalent to Eq. (8). An important point is that according to Eq. (10) $\widetilde{\Psi}$ has a finite norm i. e. it is *localized*. Indeed, the corresponding quantity $\Phi^{(2)} \sim \int^{\infty} (\sigma + \varepsilon)^{-2} R(\varepsilon)\, d\varepsilon$ is definitely finite. Thus the solution to Eq. (11) can be found using *bound-state* type methods. Obviously, the solution is unique. Originally the method has been described in this form [1].

b) Laplace Transform

$$K(\sigma, \varepsilon) = e^{-\sigma\varepsilon}.$$

According to Eq. (3) we have

$$\Phi(\sigma) = \langle \psi_0 | \widehat{O}^\dagger e^{-\sigma(\widehat{H} - E_0)} \widehat{O} | \psi_0 \rangle. \tag{12}$$

This quantity can be calculated as usual by performing the replacement

$$e^{-\sigma\widehat{H}} \to \left(1 - \frac{\sigma}{N}\widehat{H}\right)^N, \tag{13}$$

(N is a large integer), applying the operators $\left[1 - (\sigma/N)\widehat{H}\right]$ recursively and computing the matrix element with the Monte-Carlo method. This version was considered in [4]. The two kernels or transforms are related to each other in an obvious way [5]

$$\Phi^{(1)}_{\text{Stieltjes}}(\sigma) = \int_0^\infty \exp(-\sigma\sigma')\Phi_{\text{Laplace}}(\sigma')\, d\sigma'.$$

c) «Lorentz» Transform

After calculating $\Phi(\sigma)$ the next step is to invert Eq. (2). With both the above-considered transforms one often runs into problems at this step [6]. The quantities $\Phi(\sigma)$ are to be obtained from numerical few- or many-body calculations and they thus include some small uncertainties. It occurs that rather different responses can lead to transforms which are very close to each other and which cannot be resolved in practice because of the mentioned uncertainties. The reason lies in a very smearing nature of both Stieltjes and Laplace kernels. Hence responses usually cannot be accurately reconstructed from their Stieltjes or Laplace transforms. It is important to stress that the two responses leading to indistinguishable transforms may both be physically acceptable and none of them can be rejected a priory. The difficulty has been overcome as follows [7]. The so called Lorentz transform was introduced. It is a transform of the Stieltjes type but with complex σ having the form

$$\sigma = -\bar{\varepsilon} + i\gamma, \quad \bar{\varepsilon} \geqslant \varepsilon_{\min} \tag{14}$$

with γ taken to be «comparatively small», cf. below. We shall consider the case corresponding to the Stieltjes Eq. (6) $n = 2$ case. The kernel is

$$K(\bar{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon) = \frac{1}{(\sigma^* + \varepsilon)(\sigma + \varepsilon)} = \frac{1}{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 + \gamma^2}.$$

The relation (10) is valid and it serves for the calculation of the transform that should be calculated, for example at fixed γ and variable $\bar{\varepsilon}$. The function $\widetilde{\Psi}$ entering this relation is obtained from Eqs. (11), (14).

Now, let us regard the second step, i. e. the reconstruction of the response from Eq. (2). The solution to this integral equation is sought in the form of an expansion over some basis functions [1]

$$R(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N_{\max}} c_n f_n(\varepsilon). \tag{15}$$

With this expansion the right-hand side of Eq. (2) turns into

$$\sum_{n=1}^{N_{\max}} c_n F_n(\sigma) \tag{16}$$

where F_n are transforms of f_n. Generally speaking, the coeficients c_n sought for are found from fitting this form to the $\Phi(\sigma)$ values at many σ points.

Further we shall discuss the Lorentz case. Eq. (2) is of the form

$$\Phi(\bar{\varepsilon},\gamma) = \sum_n \frac{R_n}{(\bar{\varepsilon}-\varepsilon_n)^2+\gamma^2} + \int_{\varepsilon_{\min}}^{\infty} d\varepsilon \frac{R(\varepsilon)}{(\bar{\varepsilon}-\varepsilon)^2+\gamma^2} \tag{17}$$

where R_n and $R(\varepsilon)$ represent a discrete and a continuous part of the response, respectively. The discrete contributions correspond in Eq. (15) to the basis functions of the form $\delta(\varepsilon-\varepsilon_n)$. One need not know the ε_n values from the beginning. In general, at small γ the form of the dependence Φ on $\bar{\varepsilon}$ repeats that for $R(\varepsilon)$ with some broadening determined by the value of γ. In particular, narrow resonances, if present in $R(\varepsilon)$, are seen in Φ as well. If the corresponding terms are included into Eq. (15) their contributions can be reliably found from Eq. (16). The known threshold behavior of responses can be incorporated into the basis functions as well. The smaller γ the easier to invert in some sense but harder to obtain the solution to Eq. (11). Indeed, when γ goes to zero the kernel becomes proportional to $\delta(\varepsilon-\bar{\varepsilon})$ but the scattering regime is recovered in Eq. (11) at the same time. Thus some «compromise» γ values should be used. Values within, say, the 5 – 20 MeV interval proved to be very appropriate for few-nucleon systems in the Lorentz case.

Eq. (2) is the integral equation of the first kind and the solution is known to possess a high-frequency instability. Some kind of the regularization is thus required, see e. g. [8]. In the framework of the ansatz (15) $N_{\max}$ serves as the regularization parameter. Namely, the highest acceptable $N_{\max}$ values are determined by an accuracy in the left-hand side Φ. When one subsequently increases the number of terms in Eq. (15) the results first tend to be stabilized but after that unphysical oscillations inevitably appear. If an accuracy in Φ is sufficiently high the latter occurs at high $N_{\max}$ values and does not cause problems. At a given accuracy in Φ the accuracy in the solution R can be improved as follows [7]. Let us split R into a sum of incoherent multipole contributions and apply the method to some of them separately. This indeed provides a better accuracy as calculations show and can be understood as follows. The form of a separate multipole contribution is in general simpler than that of the whole response. Indeed, some of the multipoles are responsible only for the low-energy behavior of a response while the others only for the quasy-elastic peak. Thus, at the same small $N_{\max}$ value it is easier to reproduce accurately separate multipole contributions to a response.

3. Some Applications

Only the Lorentz case will be considered here. First, it is natural to study a two-body case where a comparison with the conventional calculation can be readily done. This has been accomplished in Ref. [7]. The longitudinal $d(e, e')$ response has been considered. The N—N dynamics was described by the Argonne potential. Of course, the transform Φ can be calculated very accurately in the $A = 2$ case. In order to model the $A > 2$ situation the transform was intentionally calculated *approximately* and the errors are shown in Fig. 1.

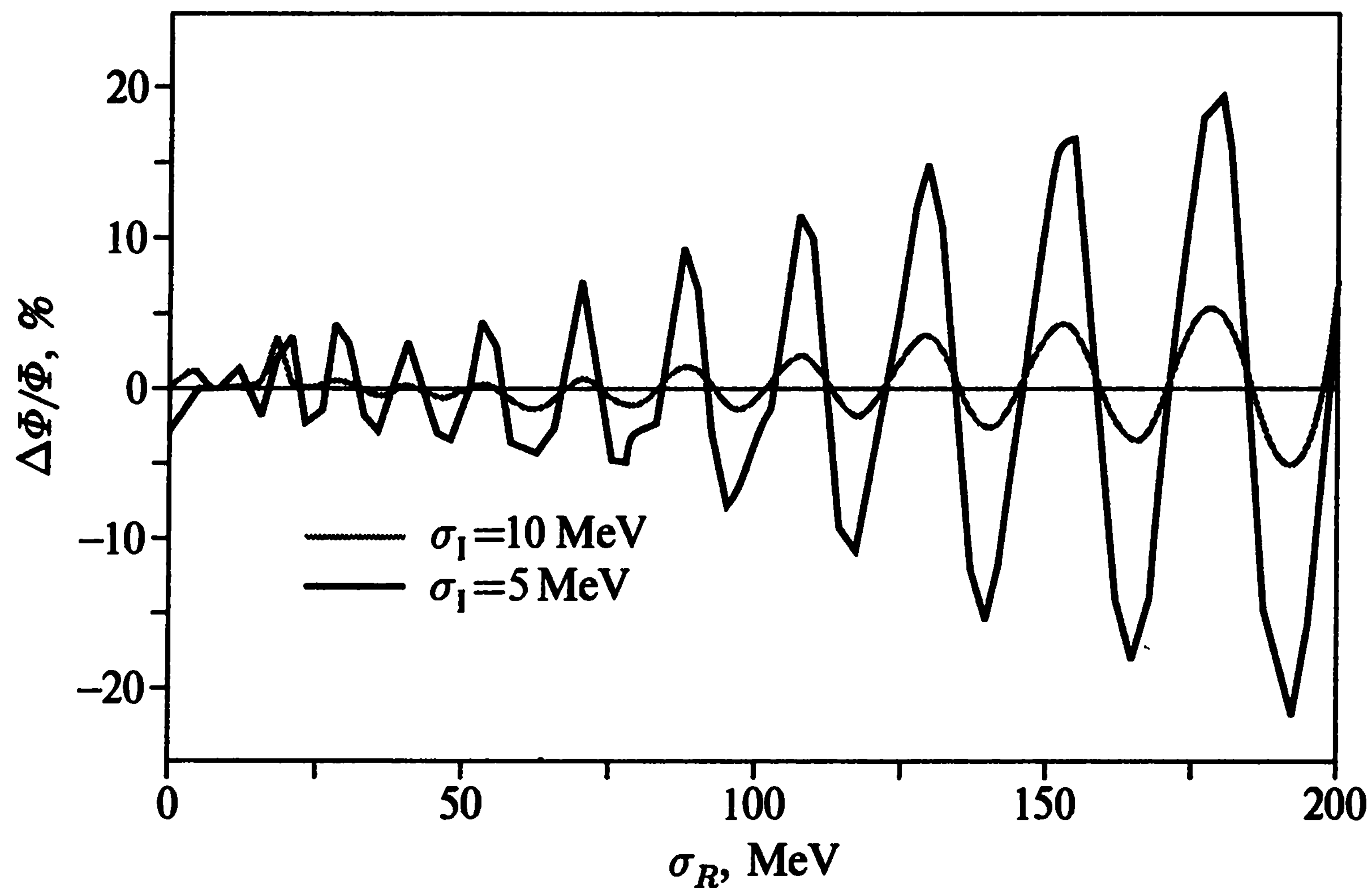


Fig. 1. Relative errors in the input transform $\Phi(\sigma_R, \sigma_I)$ of the deutron longitudinal response function, Ref. [7]

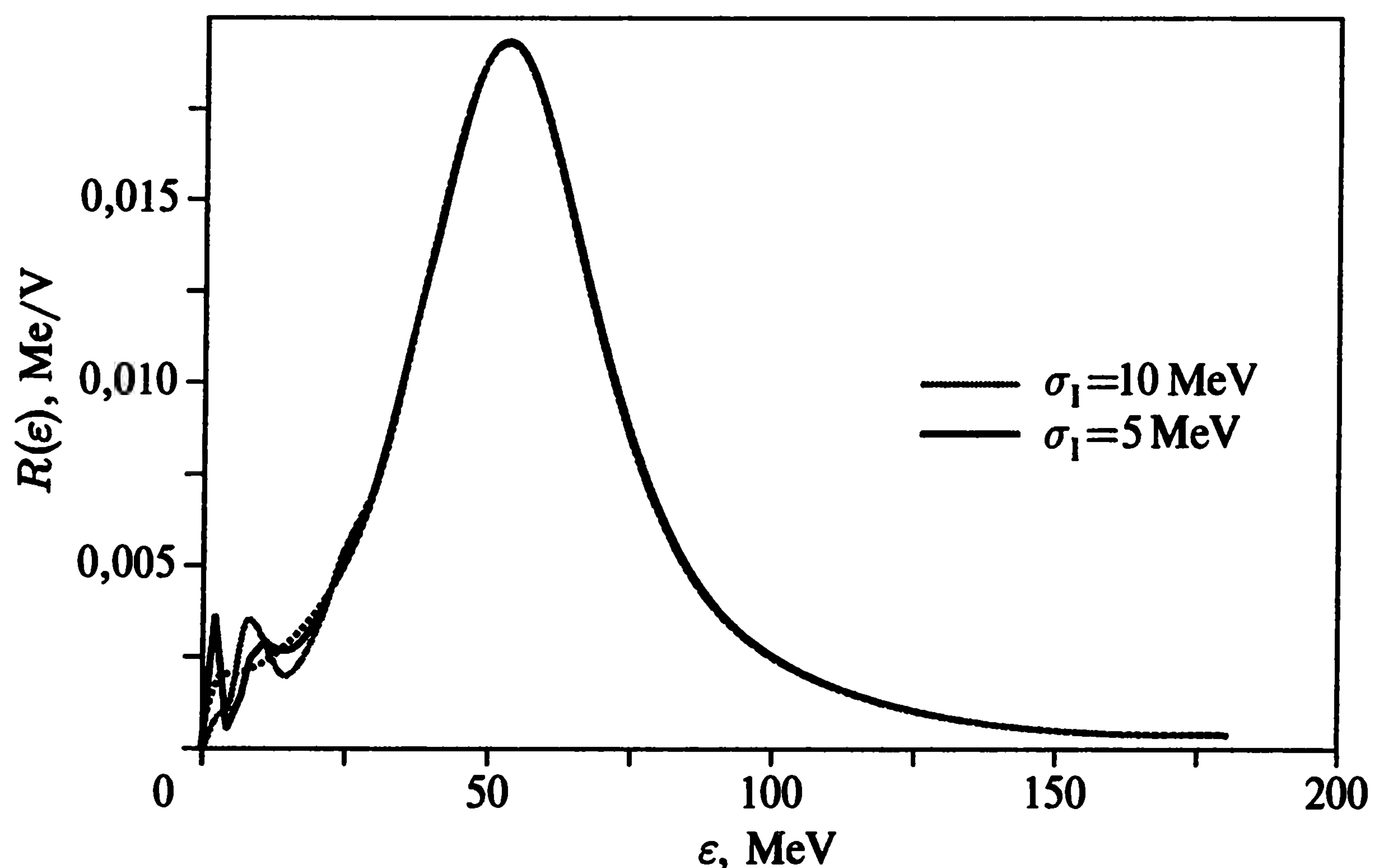


Fig. 2. The deutron longitudinal response function (at the transferred momentum $q^2 = 5fm^{-2}$). Solid curve: result from the conventional calculation, dashed and dotted curves: results of our method [7] with $\sigma_I = 5$ and 10 MeV, respectively ($N_{max} = 14$). The method is applied to the whole response function

These errors are large in general. The basis set

$$f_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1/2} \exp(-\varepsilon/\varepsilon_0)$$

was used in Eq. (15). If one applies the method directly to the whole response one comes to the results shown in Fig. 2. The solutions are extremely stable: given a sufficiently large N_{max} ($N_{max} \geqslant 10$) almost identical results for any ε_0 were found. The only visible differences are present at low energies where one has rather strong oscillations. Apart from this region one finds an excellent agreement with the exact $R(\varepsilon)$. One can also note that the low-energy

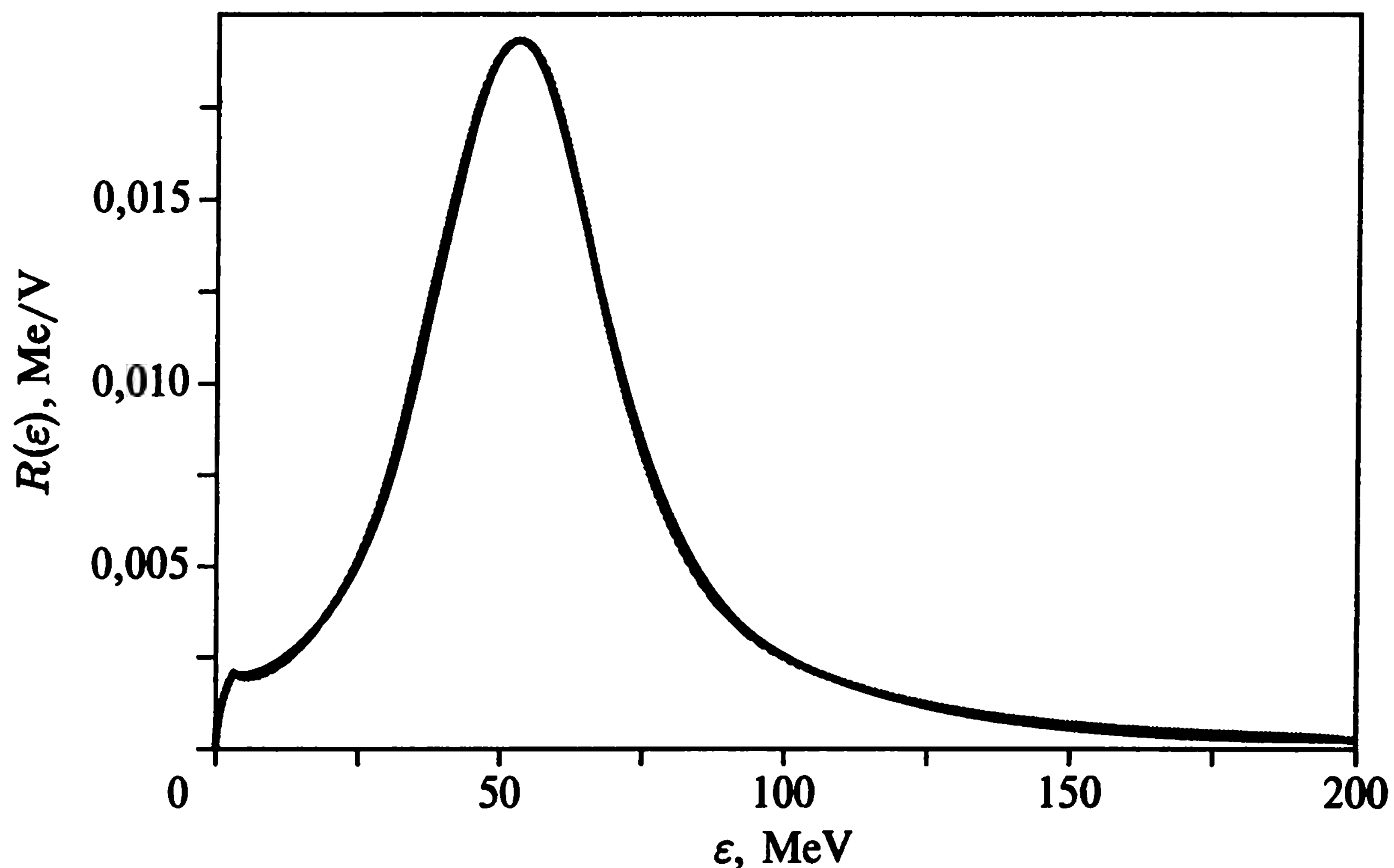


Fig. 3. Same as in Fig. 2 except that the method is applied separately to the C0 and C2 multipoles and to the sum of other multipoles

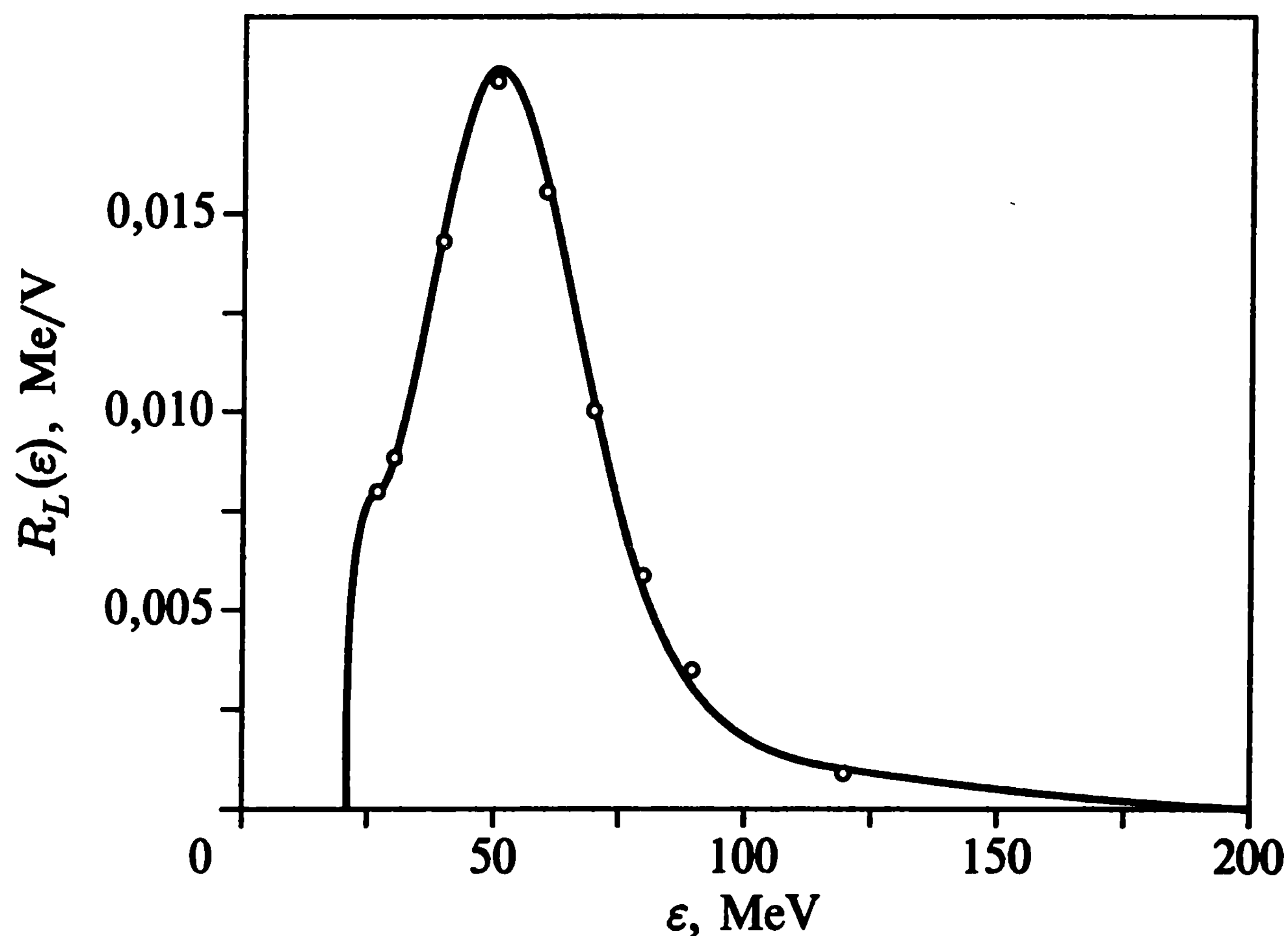


Fig. 4. The longitudinal response function of ^{3}He (at the transferred momentum $q = 300$ MeV/c). Diamonds: the conventional calculation, Ref. [11]; full curve: method of integral transforms, Ref. [9]

oscillations are smaller for the smaller σ_I which had to be expected because of the better resolution. If the method is applied separately to the C0 and C2 multipole contributions which are responsible for the low-energy behavior of the response and to the sum of other multipoles alltogether one comes to the excellent results shown in Fig. 3. The exact response function is thus reproduced with a very high precision in spite of rather large input errors shown in Fig. 1.

In Ref. [9] the method has been applied to the ^{3}He(e, e') and ^{3}H(e, e') longitudinal responses with realistic NN interactions. Even these three-body responses are very hard to calculate in a conventional way. There exists a single conventional calculation with simplified s-wave central potentials [10] and a single such calculation with realistic NN interactions for some chosen values of transferred momenta [11]. In Fig. 4 the latter results (diamonds) are compared with the results [9] of the method discussed (full curve) for the Reid NN potential. There exists a nice agreement while the computational efforts

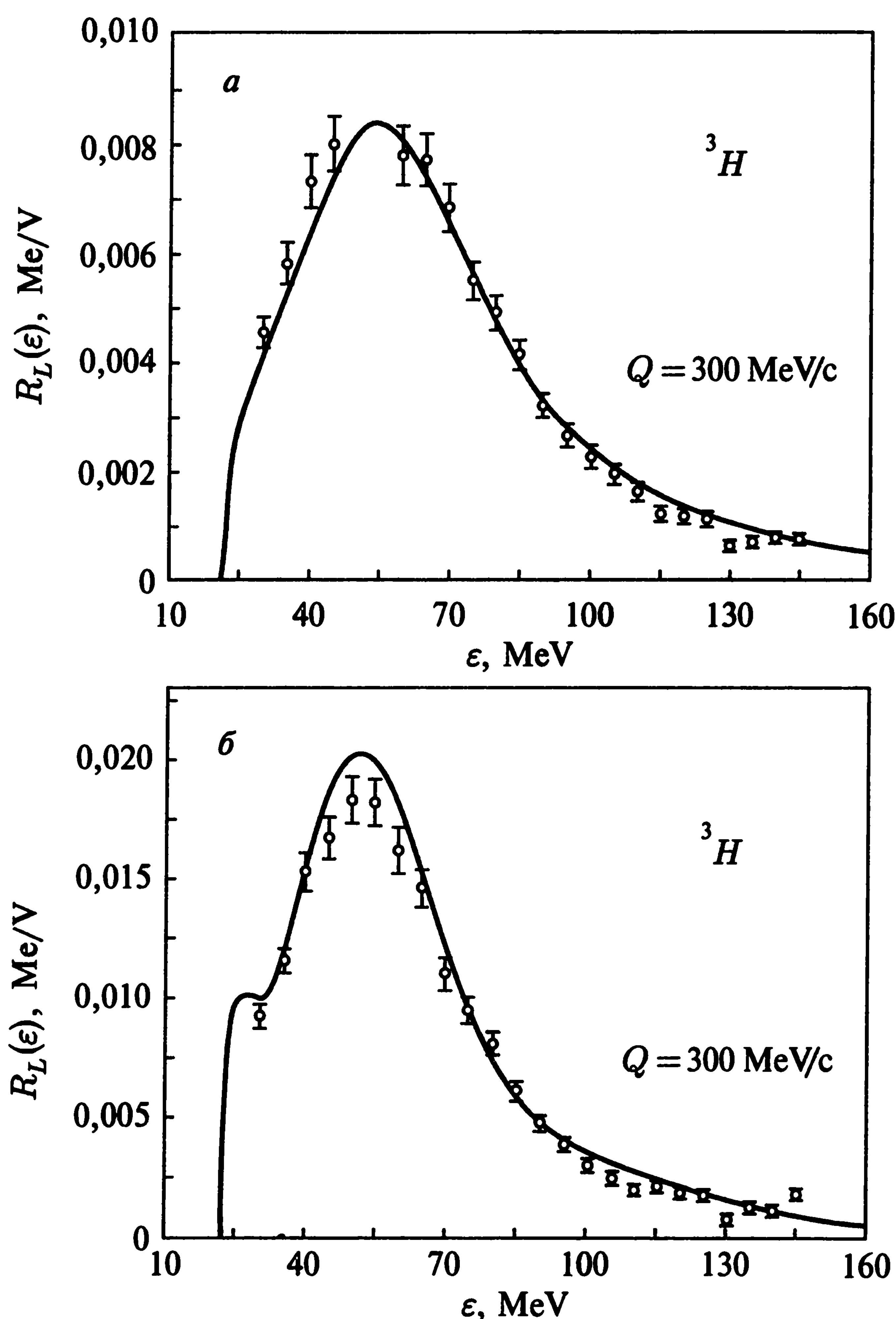


Fig. 5. The longitudinal response function of ^{3}H (a) and ^{3}He (b) at $q = 300$ MeV/c (Bonn-B potential). Experimental data from Ref. [12]. Full curve: the calculation [9] with the method of integral transforms

are incomparable. In Ref. [9] Eq. (11) to be solved has been transformed to the form of an inhomogeneous Faddeev equation. In Fig. 5 the predictions of Ref. [9] obtained with the Bonn-B potential are compared to experimental data [12].

Important response functions for electron scattering off the system of four nucleons were studied last time [13]. The accuracy of the Lorentz transform Φ obtained was influenced by the fact that the Monte-Carlo method was used for the computation of the matrix elements at solving the four-body dynamic equation (11). Nevertheless, one succeeds in obtaining very accurate and stable results that are not listed here, see Ref. [13]. The total ^{4}He photodisintegration cross section has been accurately calculated in the same way [14].

4. Some Further Considerations

It would be of interest to find practical techniques for solving Eq. (11) for larger systems with spin-independent interactions. Below a possible approach to this task is outlined. This general way for solving inhomogeneous Schrödinger-like equation can also be applied to calculating bound states of atomic systems and transitions between them as it is explained below.

The iteration procedure discussed below includes the Monte-Carlo integration. Bearing this in mind let us seek for $\widetilde{\Psi}$ in the form $\widetilde{\Psi} = \omega\widetilde{\psi}$ where ω is the Jastrow factor responsible for two-particle correlations. Inclusion of such a factor may also be useful for another purpose, see below. We rewrite then Eq. (11) in the form $\omega(\widehat{H} - E)\omega\widetilde{\psi} = \omega\widehat{O}\omega\psi_0$, $E = E_0 - \sigma$ being a complex energy, and we denote $\widehat{L} = \omega(\widehat{H} - E)\omega$. We introduce an auxiliary Hamiltonian $\widehat{H}_0$ and we denote $\widehat{L}_0 = \widehat{H}_0 - E$. The operator $\widehat{L}_0$ is to be chosen close in some sense to $\widehat{L}$ and should be such that the Green Function $\widehat{L}_0^{-1}$ can be constructed analytically. Then the solution can be effectively obtained by a standard iteration with $\widehat{L}_0^{-1}(\widehat{L} - \widehat{L}_0)$ being the expansion parameter.

Let the Hamiltonian $\widehat{H}$ be of the form

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2} + \widehat{V},$$

where ξ_i are corresponding normalized coordinates. The following Hamiltonian $\widehat{H}_0$ can be used

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\sum_{i=1}^{N}\frac{\cdot\,\partial}{\partial\xi_i^2} + V(\rho).$$

Here V is an auxiliary potential and $\rho = \left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2\right)^{1/2}$ is the hyperradius of a system. In the subspace with a given spin value the following Green Function $\widehat{L}_0^{-1} = G_0(\xi, \xi')$ can be applied

$$G_0(\xi, \xi') = \sum_{K=K_{\min}}^{\infty} G_K(\rho, \rho')N_K^{\nu}C_K^{\nu}(x). \tag{18}$$

Here we denote $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ a multidimensional space vector and ξ' has a similar meaning, $x = \widehat{\xi} * \widehat{\xi'}$ where $\widehat{\xi}$ and $\widehat{\xi'}$ are the corresponding unit vectors. The quantities G_K are the hyperradial Green Functions,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{N-1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{K(K+N-2)}{\rho^2}\right) + V(\rho) - E\right]G_K(\rho, \rho') = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho^{N-1}}.$$

The quantities C_K^ν are Gegenbauer polynomials with $\nu = (N-2)/2$, and N_K^ν are the wellknown normalization factors,

$$N_K^\nu C_K^\nu(x) = \sum_\alpha Y_{K\alpha}^*(\hat{\xi}) Y_{K\alpha}(\hat{\xi}'),$$

where $Y_{K\alpha}$ is a complete set of orthonormalized hyperspherical harmonics at a given value of the hypermomentum K. The $K_{\min} = K_{\min}(S)$ value in Eq. (18) is the minimal possible K value which is compatible with a given spatial permutational symmetry of a system i. e. with a given value of the spin S.

This method can also be applied for finding bound states of atomic systems. Let us solve the corresponding Schrödinger equation $(\hat{H} - E_\lambda)\Psi_\lambda = 0$ by inverse iteration $(\hat{H} - E)\Psi_\lambda^{n+1} = \gamma\Psi_\lambda^n$, $E \approx E_\lambda$. We write $\Psi_\lambda^n = \omega\psi_\lambda^n$ which gives $\omega(\hat{H} - E)\omega\psi_\lambda^{n+1} = Q$, $Q = \omega^2\psi_\lambda^n$. This equation is just of the type considered above and can be solved by the above-discussed iteration method.

The Method of Integral Transforms allows calculation of transition matrix elements $|\hat{O}_{ij}|^2 = |\langle\psi_j|\hat{O}|\psi_i\rangle|^2$ from a bound state ψ_i, to an arbitrary final state ψ_j [1]. If this final state also belongs to a discrete spectrum then these matrix elements can be directly obtained from the inhomogeneous equation $(\hat{H} - E)\tilde{\Psi} = \hat{O}\psi_i$ which is again of the same type. Indeed, at E tending to E_j we have $\langle\tilde{\Psi}|\tilde{\Psi}\rangle \approx |E_j - E|^{-2}|\hat{O}_{ij}|^2$, where ψ_j is supposed to be normalized to unity.

The usual Monte-Carlo procedures for successive iterations can be applied in the framework of the above scheme. First, the right-hand sides at certain points are generated using the same procedures.

At E close to E_λ the inverse iteration automatically provides a convergence to the right state, even irrespective of the symmetry of the initial approximation. Hence, in contrast to known approaches the approach described here is applicable to calculating excited states belonging to a discrete spectrum. It hopefully avoids severe difficulties in calculating fermionic systems inherent to the Green-Function–Monte-Carlo method. Hyperspherical coordinates and hypermomenta K enter our scheme but we avoid any use of hyperspherical harmonics in the representation of wave functions. The convergence of successive iterations relies on that the quantities

$$\int d\rho' (\rho')^{N-1} G_{K_{\min}}(\rho, \rho') \int d\hat{\xi}' Y_{K_{\min}\alpha}(\hat{\xi}') \hat{L} Y_{K'\alpha'}(\hat{\xi}')$$

are small at $K' \neq K_{\min}$. In the absence of the correlation factor ω they are hopefully small due to the fact that the matrix elements of the interaction $\hat{V}$ which are non-diagonal in K are relatively small. These quantities can also be diminished by playing with the correlation factor ω. The corresponding diagonal quantities are small due to the presence of the potential $V(\rho)$.

References

1. *Éfros V. D.* Yad. Fiz., **41**, 1498, 1985; Sov. J. Nucl. Phys., **41**, 949, 1985.
2. *Éfros V. D.* Yad. Fiz., **56**, № 7, 22, 1993; Phys. At. Nucl. **56**, 869, 1993.
3. *Thompson I. J., Éfros V. D.*, in preparation, 1996.
4. *Carlson J., Schiavilla R.* Phys. Rev. Lett., **68**, 3682, 1992.
5. *Widder D. V.* The Laplace Transform. Princeton University Press, Princeton, 1946. Ch. 8.
6. *Éfros V. D., Leidemann W., Orlandini G.* Few-Body Sys., **14**, 151, 1993.

7. *Éfros V. D., Leidemann W., Orlandini G.* Phys. Lett., **B338**, 130, 1994.
8. *Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya.* Solutions of ill-posed problems. Halsted, New York, 1977.
9. *Martinelli S., Kamada H., Orlandini G., Glöckle W.* Phys. Rev., **C52**, 1778, 1995.
10. *Van E. Meijgaard and Tjon J. A.* Phys. Rev., **C45**, 1463, 1992.
11. *Golak J., Witala H., Kamada H., D. Hüber, Ishikawa S. and Glöckle W.* Phys. Rev., **C52**, 1216, 1995; J. Golak (private communication).
12. *Dow K. et al.* Phys. Rev. Lett. **61**, 1706, 1988.
13. *Efros V. D., Leidemann W., Orlandini G.* Phys. Rev. Lett., **78**, 432, 1997.
14. *Efros V. D., Leidemann W., Orlandini G.* Submitted for publication, 1997.

«Это было необычайно интересное и удивительное время...»: воспоминания о раннем периоде жизни лаборатории № 2 (Я. А. Смородинский)

Н. В. Князькая

Предлагаемые читателю воспоминания принадлежат выдающемуся физику-теоретику, одному из старейших сотрудников Курчатовского института доктору физико-математических наук профессору Якову Абрамовичу Смородинскому (1917–1992).

Я. А. Смородинский (в дальнейшем — Я. А.) родился 30 декабря 1917 г. в г. Малая Вишера. После окончания физического факультета Ленинградского университета он поступил в аспирантуру Института физических проблем к Л. Д. Ландау, обучение у которого впоследствии считал величайшей жизненной удачей.

Успешно защитив перед самой войной кандидатскую диссертацию, Я. А. в первые годы войны работает в Казани, куда по решению правительства была эвакуирована Академия наук. Там под руководством академика А. Н. Крылова он занимался расчетом ледовых переправ для нужд фронта.

В 1944 г. Я. А. Смородинский был приглашен на работу в Лабораторию № 2. С тех пор и до последних дней его жизнь была прочно связана с Курчатовским институтом. Одной из первых среди решаемых им там задач стал расчет разделительных каскадов, которым Я. А. занимался под руководством И. К. Кикоина и С. Л. Соболева.

Круг научных интересов Я. А. Смородинского был необычайно широк — от физики атомного ядра и разделения изотопов до общей теории относительности, теории нелинейных динамических систем и теоретико-групповых методов в физике. Обладая поистине энциклопедическими знаниями и ярким темпераментом просветителя, Я. А. резко контрастировал с распространенным типом «узкого специалиста».

Среди его учеников видные специалисты, успешно работающие в различных областях современной физики.

В соавторстве с Л. Д. Ландау им были написаны «Лекции по теории атомного ядра», ставшие настольной книгой физиков-ядерщиков старшего поколения и давно уже — библиографической редкостью. Многие полученные Я. А. Смородинским результаты выдержали проверку временем и вошли в учебники (чаще всего «анонимно»).

Немало Я. А. занимался издательской деятельностью. Он был одним из создателей и на протяжении многих лет заместителем главного редактора журнала «Ядерная физика», членом редакционного совета издательства «Мир», членом редколлегии журнала «Квант», заместителем главного редактора журнала «Наука и жизнь». Историко-научный профессионализм в сочетании со свойственной Я. А. энергией позволили ему принять самое активное участие в издании трудов А. Эйнштейна, В. Паули и других классиков науки.

Воспоминания Я. А. Смородинского посвящены в основном начальному этапу исследований по решению урановой проблемы: в них освещается работа и жизнь Лаборатории № 2 в 40-х – начале 50-х гг. Они были записаны в 1982 г. научным сотрудником Курчатовского института Н. В. Князькой.

В начале 1944 г. в Институте физических проблем я встретил И. К. Кикоина, который мне сказал, что в Ленинграде создается новая физическая лаборатория и было бы очень хорошо, если бы я приехал туда работать. Поскольку направление лаборатории относилось к переднему краю науки и кроме того мне очень нравился Ленинград, я сразу согласился. Тем более, что в Институте физпроблем не было принято оставлять своих аспирантов — П. Л. Капица не был склонен увеличивать штат. Так что все складывалось наилучшим образом: я ушел оттуда с почетом, оставаясь желанным гостем; с другой стороны, меня ждал Ленинград, где мне всегда хотелось жить и работать.

В Ленинграде Кикоин пригласил меня в Политехнический институт, где было странное здание под названием «башня» (это и в самом деле была то ли водонапорная башня, то ли гидродинамическая лаборатория). Там меня познакомили с И. Н. Вознесенским и несколькими его молодыми сотрудниками: Н. А. Колокольцовым, А. Г. Плоткиной, Е. М. Воиновым. Правда, то, чем нам предстояло заниматься, мне было не вполне понятно. Однако дело представлялось перспективным. Рассказывали, что будет строиться институт, говорили, что сотрудники получат квартиры. Было весьма неожиданно и заманчиво говорить о 30-метровой квартире, которая казалась настоящими хоромами, особенно после того, как я жил втроем в 10-метровой комнате.

Но, к сожалению, все эти надежды рухнули, так как по каким-то причинам эту лабораторию в Ленинграде решили не создавать, и мне было предложено вернуться в Москву, чтобы работать не в филиале Лаборатории № 2, а в ней самой. Об этой Лаборатории я в то время немножко знал, потому что мне приходилось бывать на многих семинарах, и я, конечно, догадывался о том, чем там занимаются.

Осенью 1944 г. состоялась моя первая серьезная встреча с С. Л. Соболевым, который в порядке вступительного испытания дал мне задачу расчета каскада, т. е. многоступенчатой газодиффузионной установки по разделению изотопов урана. На следующий день я принес решение, и этого оказалось достаточным, чтобы я был признан достаточно подготовленным к теоретической работе, и после переговоров с Капицей в феврале 1945 г. я перешел на работу в Лабораторию № 2 и получил все нужные пропуска и документы.

Институт (т. е. Лаборатория № 2) помещался в то время в одном здании, где располагались канцелярия, лаборатории, конференц-зал, библиотека, первый отдел и отдел кадров — последние сочетались в лице Марии Абрамовны Либман.

Мне очень понравилась библиотека. Одним из первых дел, которым я занимался в Институте, была организация большой библиотеки. Мы составили списки книг, которые есть в других физических институтах в Москве, и по этим спискам нам было разрешено заказать и получить нужные книги (в том числе даже из-за границы), выписать необходимые журналы и часть из них получить комплектами. Это все потом дополнилось еще и трофейными материалами, так что к 1946 г. наша библиотека оказалась одной из самых полных в Москве. Позже стало сложнее: нам не так легко разрешали покупать даже журналы, книги же стали вообще немыслимой роскошью. Но в то время все выглядело очень радужно — на литературу можно было тратить достаточно большие деньги.

Тогда же нам показали, где мы будем работать: это было довольно запущенное здание, по-моему, завода рентгеновской аппаратуры, к которому надо было из основного здания идти через песчаный пустырь с торчащими из него осколками железа (так как раньше здесь находился старый полигон). Все это выглядело очень неуютно, и очень трудно было себе представить, что всего через несколько лет здесь будет красивое здание, сад. И теперь, когда смотришь на 20-летние деревья, которые тогда еще не были посажены, понимаешь, как много прошло времени.

33 Зак. 198

В нашем отделе началась своя совершенно новая жизнь. Стали приезжать люди из Ленинграда. Это были люди конструкторского склада, которые резко отличались от физиков: Н. А. Колокольцов, Е. М. Воинов, А. Г. Плоткина. Но довольно быстро они нашли общий язык с физиками.

Ленинградскую группу возглавил замечательный человек — Иван Николаевич Вознесенский. Он был выдающимся конструктором. Ему удалось создать в лаборатории высокую культуру конструкторско-инженерных работ. Вся начальная стадия исследований проходила при его непосредственном руководстве и участии.

Постепенно здесь формировался очень яркий и сильный коллектив. Кикоин привез с собой из Свердловска своих сотрудников Д. Л. Симоненко, В. С. Обухова и др. К нам присоединился и мой бывший сокурсник — Д. И. Воскобойник. Ему в дальнейшем принадлежала очень большая роль в создании различных методов физических измерений, в выяснении порою катастрофических причин неудач, случавшихся в нашей истории, и в их преодолении. Вслед за Воскобойником пришло еще немало специалистов. Сплоченность коллектива обеспечивала быстроту и успех работы.

Атмосфера в Лаборатории № 2 в то время была необычной для современных институтов. Насколько я понимаю, руководство старалось по возможности разгрузить сотрудников, несмотря на тяжелые послевоенные условия жизни, от всяких бытовых забот. Тогда, например, было вполне естественным попросить в Лаборатории стул (или купить его там), которого не оказывалось дома. Начали строиться дома для сотрудников. Однажды вечером без всякого предупреждения ко мне заехал младший Кикоин — Абрам Константинович и сказал, что вот его попросили передать мне ключ от квартиры. Я спросил: «Какой квартиры?» — Он ответил: «Вот поезжай к Курскому вокзалу, вот адрес, там построили дом, там твоя квартира». Так что быт налаживался неплохо. Действительно, Институт старался обеспечить сотрудников продуктами, столовой, даже мебелью. На все это, я думаю, были затрачены немалые средства, хотя и потребности людей тогда были весьма невелики. Никому и думать не приходилось о чем-нибудь, кроме самого необходимого. Таким образом, бытовые заботы практически не отнимали у нас заметного времени, и мы имели возможность работать достаточно много, не думая о других побочных делах.

В это время я работал вместе с С. Л. Соболевым. Как правило, мы работали по вечерам, возвращаясь домой пешком или на трамвае, но нередко и на машине, которая возила нас из Лаборатории, в то время находившейся практически за чертой Москвы, до метро «Сокол». Точно так же нас возили на работу: к «Соколу» подъезжал виллис, в котором, как известно, имеется всего 4 места; туда бросалось 10–12 человек, и в таком сильно упакованном виде машина уходила в неизвестном направлении, сопровождаемая удивленными взглядами стоящих у метро людей. Потом вместо виллиса стал приходить маленький автобус, затем появились городские автобусы. Постепенно эта отличительная черта тоже исчезла, район Лаборатории стал куском города, потерявшим тот налет романтической таинственности, который он имел в первые годы.

Очень важной для Лаборатории в тот самый период, когда допуск в нее был чрезвычайно труден, была четкая уверенность И. В. Курчатова в том, что необходимо поддерживать высокий научный потенциал, сохранять людей для будущей научной работы, готовить молодежь для такой работы. Кроме того, он считал, что, только сохраняя связь с наукой переднего края, в частности с ядерной физикой, можно держать научный уровень работ на достаточной высоте. А для этого нужен был хороший научный семинар. За отсутствием помещения семинар поначалу проводился прямо на площадке лестницы 3-го этажа Главного здания, затем стал проходить в маленьком конференц-зале на 2-м этаже, а потом — в большом зале корпуса Л. А. Арцимовича. Он устраивался по вторникам, с утра, и никогда не отменялся.

Игорь Васильевич волновался перед каждым семинаром, особенно когда возникали проблемы с докладчиком или когда я не сообщал ему вовремя о докладе. Иногда он сам разыскивал докладчика, а когда таковой почему-либо терялся, заболевал или уезжал, принимались героические меры, чтобы обязательно была замена. На семинар приезжало довольно много народу со стороны, по крайней мере несколько десятков человек проходило по списку. И даже в то время, когда вход в Лабораторию был достаточно затруднен, все было организовано так, чтобы во вторник на семинар могло пройти довольно много народу, чем пользовались соседние институты.

Вообще побывать на семинаре, где выступали наиболее крупные физики страны, где обязательно присутствовал Курчатов, было и большой честью, и очень полезно и увлекательно. На семинарах обсуждались новые работы физиков, здесь молодые физики приобретали опыт, а также известность. В рамках этого семинара был прочитан и курс лекций Л. Д. Ландау по теория атомного ядра. Как-то Игорь Васильевич заметил, что хорошо бы пригласить на семинар кого-нибудь из крупных физиков, чтобы он рассказал о ядре более или менее понятно и обстоятельно. Это было необходимо, чтобы войти в круг проблем, которые в то время считались наиболее важными и интересными. Выбор пал на Ландау, которого Игорь Васильевич попросил прочитать курс лекций по этой проблеме. Мне приходилось готовить с ним эти лекции. Курчатов относился к этому с огромным, необычайным интересом и энергией (не дай бог, чтобы лекция сорвалась, такого не было, он всегда переживал лекцию, во всяком случае внешне, не меньше, чем переживал пуск какой-либо установки). Семинар в клубе посещали примерно 500–600 человек из разных институтов Москвы. Лекции были замечательными. Потом их издали отдельной книжкой, которая долго служила пособием для молодых ученых и студентов, была переведена на несколько иностранных языков и до сих пор ее можно встретить на книжных полках физиков [*Л. Ландау, Я. Смородинский.* Лекции по теории атомного ядра. М., ГИТТЛ, 1955. В авторском предисловии сказано: «В основу этой книги положены лекции, которые были прочитаны в Москве одним из авторов (Л. Ландау) для физиков-экспериментаторов в 1954 г.» (*прим. ред.*)].

Поразительная активность Курчатова, его любовь к науке, интерес к обсуждению — все это сказывалось самым благотворным образом на научной жизни Института. Когда Курчатов проходил по лабораториям Института (а он это делал регулярно), то заранее обзванивались все сотрудники. У Игоря Васильевича всегда возникали вопросы, и необходимо было отвечать на них, причем ответы должны были быть не формальными, а по существу. Курчатов при этом любил, чтобы на вопросы отвечали сразу и особенно ценил быструю и точную справку.

Во всяком случае, всегда было видно, что начальство очень интересуется тем, что делается, и во все вникает и что к нему можно обратиться с вопросами или поделиться маленькими радостями в связи с тем, что что-то прочел в журнале, или что-то придумал, или что-то удалось сделать. Вообще «курчатовское время» отличалось редкостной простотой отношений. Мне приходилось видеть Курчатова в разной обстановке, в разных аудиториях: в лабораториях, на семинаре, в его кабинете, на заседаниях ученых советов. И что было интересно: чем выше и официальней была атмосфера, тем более важным и недоступным становился Игорь Васильевич. Внутри же Лаборатории он был абсолютно доступен. Человек, который вел огромную работу, был связан с огромным количеством людей, организаций, человек, который был вхож в кабинеты высших руководителей страны, внутри Лаборатории был как бы совершенно свободен. Курчатова можно было увидеть всегда. Ему можно было легко позвонить по телефону и договориться о встрече. К телефону он подходил, как правило, всегда, очень редко секретарь говорила, что Игорь Васильевич занят, позвоните через час. Но обычно он вызывал сам, и если человек спрашивал о времени,

его обычный ответ был: «Приходи сейчас, можешь прийти через 10 минут, нет, через 10 минут не выйдет — дольше идти. Я сейчас пришлю машину, потому что я через 20 мин. ухожу». При встрече он спрашивал о деле, которое нужно было изложить в течение 3–5 минут. Как правило, разговор заканчивался словами: «Ну, иди отдыхай!» Это означало, что вопрос исчерпан, что больше Игорь Васильевич не хочет терять время на разговор, и можно быть спокойным, что вопрос будет решен. Кроме того, он обладал редкой чертой: если он что-то сделать не мог или не хотел, он отказывал, как правило, сразу, при этом объясняя причину; поэтому второй раз приходить к нему с этим же вопросом было бессмысленно. Но, с другой стороны, слово «нет» мы слышали от него необычайно редко. А решать ему приходилось самые разные вопросы — от получения каких-то вещей на складе до командировки за границу и от вопроса о публикации работы до покупки какой-нибудь большой установки, которая могла стоить довольно дорого. Кстати говоря, он считал, что за границей нужно покупать как можно меньше и рассчитывать, в основном, на свои силы, чтобы избежать всяких случайностей, связанных с возможным непоступлением импорта.

Интересно вспомнить и о том, как зародилась и развивалась в Институте вычислительная техника.

Институт одним из первых в стране (это было в конце 1945 г.) получил трофейные «рейнсметаллы» — счетные машины-полуавтоматы из Германии. Они представляли собой довольно нелепые сооружения, с отдельной шкалой для умножения, гремевшие, шумевшие и довольно медленно считавшие. Уже тогда мы заметили одну черту машины, которая чем-то напоминала человека: ее можно было заставить делить какое-то число на ноль, и она жалобно шумела, как будто прося, чтобы ей помогли. Ее надо было остановить, иначе она сама, естественно, справиться не могла.

Потом появились более быстродействующие настольные полуавтоматы, их стало много, и в 1948–49 гг. появилось первое вычислительное бюро (оно, вероятно, было одним из первых в физических лабораториях). Потом оказалось, что где-то в статистическом управлении имеется целая серия перфорационных машин, которыми обрабатывались результаты переписи и что они могут быть переданы нам. Это казалось нам совершенным чудом — получить целую серию машин, одна из которых пробивает перфокарточки, другая их сортирует, третья их считает. При этом во всех описаниях счетных машин в литературе в то время фигурировали какие-то нелепые модели, которые выполняли тривиальные действия типа $2+2=4$ и было непонятно, зачем все это нужно. А здесь вдруг оказалось, что это огромные машины, комплект которых занимал тогда целый зал. Мы научились работать с перфорационными картами, вычислять с их помощью, но счет этот был все-таки достаточно медленный.

Однажды при расчете одного неустановившегося процесса неожиданно выяснилось, что время установления равновесия и время соответствующего вычисления примерно совпадают. Когда машина кончила считать, можно было посмотреть на часы и уже знать, что она сосчитала, так как главное, что нас интересовало, — это время переходного режима. Мы тогда очень этим потешались, но потом, конечно, удалось существенно повысить скорость вычислений.

Счетные машины устанавливались в новом здании, носившем название «Медсклад», на втором этаже, где был оборудован зал, который был обшит довольно нелепой тканью типа байки или фланели, похожей на детские пеленки. Ткань была пропитана специальным веществом, делавшим обивку, во-первых, невоспламеняемой, а, во-вторых, полностью изолировавшей помещение от шума. Эти машины обслуживали три человека. Среди них была худенькая, очень симпатичная девочка Валя, которая всегда ходила с замазанными руками и замазанным носом, она совершенно потрясающе разбиралась в полуавтоматах, чинила любую поломку мгновенно и очень здорово нам помогала.

В это время появился целый штат молодых математиков самой разной квалификации, стали думать уже о настоящей теории процесса газодиффузионного разделения изотопов, о его физике, об устойчивости работы каскадов. И самое главное (это имело место на самых ранних порах) было очень интересно участвовать в процессе, который привел к трансформации разделительных машин, основных установок для получения нужного эффекта. Этот процесс был начат уже упоминавшимся И. Н. Вознесенским. Вначале мы имели дело с довольно большими машинами, а потом стало ясно, что установка должна состоять из огромного количества небольших совершенно одинаковых механизмов. Казалось невероятным, что когда-то тысячи таких машин будут работать согласованно, что не надо будет каждую из них отдельно налаживать (в то время такого большого количества машин в производственных процессах, как будто, еще не использовалось). Поэтому мне, несведущему в этой области человеку, казалось, что будущим оператором на подобном предприятии должен быть очень квалифицированный диспетчер-теоретик, который непрерывно будет давать команды, закрывать и открывать экраны и клапаны, иначе такая установка работать не будет. То, что такая установка будет устойчивой, что надо изучать вопросы устойчивости и что, в конце концов, ее можно довести до уровня почти полного автомата, в то время мне представлялось совершенно невероятным. И, может быть, недостаточное знание опасности, которая нас тут подстерегала, и позволило нам с необыкновенным энтузиазмом считать, в надежде на то, что все это как-то образуется.

Было очень интересно видеть, как наши несложные формулы облекались затем в металл. Нами начали интересоваться заводы, приходилось ездить и рассказывать о довольно сложных физических процессах заводским инженерам. Надо отметить, что теми людьми, которые начинали работать в Лаборатории в этой сфере, уже были воспитаны достаточно многочисленные инженерные кадры. Замечу, что в то время вычислительное бюро обслуживало только отдел И. К. Кикоина.

Сначала я работал в секторе С. Л. Соболева, затем меня выделили в отдельный сектор. Это был очень смешной сектор, так как в течение года он состоял из одного человека. И только после того, как на отчетном институтском собрании было грозно сказано, что это — грубейшее нарушение правил, часть работавших со мной людей была и формально переведена в мой сектор.

С этого времени стало возможным устанавливать контакты с другими институтами. Я тогда преподавал в только что организовавшемся Инженерно-физическом институте (МИФИ) и был связан также с молодежью из Физико-технического института (МФТИ), которая посещала мои лекции в МИФИ. Несколько слов о том, как создавались эти институты. С начала организации Лаборатории № 2 было ясно (особенно для И. В. Курчатова, И. К. Кикоина, Л. А. Арцимовича), что вскоре понадобится много специалистов, чтобы то, с чего начинала работать Лаборатория, превратилось в большую отрасль науки и промышленности. А таких людей не было. Единственным учреждением, которое выпускало физиков, был физфак Университета, но попытки привлечения туда крупных ученых (Тамма, Фока, Ландау и других) не удались, и стало ясно, что нужно создавать новые центры подготовки кадров.

Первым таким центром стал старый институт боеприпасов, который назывался Московским инженерно-механическим институтом. Он был реорганизован в совершенно новый вуз, получивший потом название Инженерно-физического института. В его задачи входила подготовка физиков разного профиля: от чистых теоретиков до инженеров. Им предстояло впоследствии заниматься исследовательской работой, проектированием, а также работать на заводах. Вначале туда принимались люди, которые уже учились в других институтах, и переход в новый институт означал для них существенную потерю времени (по меньшей мере год). В качестве преподавателей туда были приглашены почти все ведущие физики, связанные с нашими задачами.

Как правило, это были молодые люди, 30-ти лет и даже моложе, практически без педагогического опыта, но страстно любившие свою науку. Они рассказывали студентам о своей замечательной науке, о том, что сами делали, и это заряжало молодежь романтикой научного исследования. На первом месте была физика. Вопросами же дисциплины никто всерьез не занимался. Иногда возникавшие конфликты легко и быстро улаживались и не выходили за стены института. МИФИ начал выпускать физиков с хорошей инженерной подготовкой. Практически все первые выпуски нашли свое место в науке. В этом институте были кафедры и открытые, и закрытые. И те, кто читали курсы, относящиеся к закрытой части программ, также старались насытить их физическим содержанием, научить людей мыслить активно и неформально.

Одновременно создавался второй институт родственного профиля — Физико-технический. Он имел другие исходные принципы. Большую роль в его организации сыграл П. Л. Капица. Поступить туда было нелегко. Был использован принцип приема не по сумме оценок за экзамены, а по результатам собеседования. На собеседовании пытались выяснить творческие возможности поступающего. Начиная с 3-го курса студенты занимались в разных институтах Москвы, так называемых «базовых» учреждениях.

В конце 40-х гг. в Лаборатории начали появляться первые дипломники из МФТИ и МИФИ. Надо сказать, что многие из них впоследствии стали хорошо известными специалистами. Так, например, Б. В. Жигаловский занимает в настоящее время высокий пост в промышленности. Крупными теоретиками стали Ханин, Каган, а также к несчастью погибшие впоследствии Пузиков, Базь. Позже поток молодых специалистов резко возрос, и Лаборатория стала выпускать уже кандидатов наук, в основном физиков-ядерщиков, которые сейчас работают в самых разных институтах страны. Замечу, что это было связано прежде всего с тем, что И. В. Курчатов всегда настаивал на непрерывной связи Лаборатории с действующей наукой, очень поощрял обучение новых людей и помогал при устройстве окончивших. Все они, как правило, получали достаточно хорошее назначение и в большинстве своем, за очень малым исключением, остались в науке, оправдав те интеллектуальные и финансовые затраты, которые понадобились для их подготовки.

Начиная с 1947 г. многие сотрудники Лаборатории № 2, в том числе и отдела И. К. Кикоина, были командированы на строящиеся объекты зарождающейся атомной промышленности с целью оказания помощи в их сооружении, в обучении специалистов проектного и эксплуатационного профиля. Это было необычайно интересное и удивительное время: весь день мы напряженно работали на объекте, в заводских лабораториях, а по вечерам сражались в бридж. Жили дружным коллективом, в котором все были увлечены одним делом, все были примерно одного возраста. Молодость, увлеченность работой, ощущение полезности оттесняли на второй план немногочисленные неприятности и огорчения.

Вскоре появилось еще одно интересное дело. Как-то И. В. Курчатов вызвал А. Б. Мигдала, Б. Т. Гейликмана, И. Я. Померанчука, в то время работавшего у А. И. Алиханова, и меня и предложил нам помочь в организации так называемой Гидротехнической лаборатории, по своему научному профилю близкой к Лаборатории № 2. Поначалу мы должны были ездить туда по субботам, хотя где она находится, нам не сказали. Так начались и продолжались в течение довольно долгого времени регулярные субботние рейсовые маршруты вдоль канала Москва до плотины, затем по мостику, перекинутому через ручеек, где к нам подходил офицер и проверял наши документы, после чего мы попадали в то место, которое сейчас называется Дубной и является международным ядерным центром. Поскольку это место было чрезвычайно закрытым и о его существовании мало кто знал, мы шутили, что когда-нибудь здесь будет международный центр типа Нью-Васюков, куда будут

приезжать международные гроссмейстеры. И эта шутка нам казалась не столько остроумной, сколько выражением абсолютной несбыточности. На самом же деле действительность оказалась очень близкой к тому, над чем мы шутили.

Это было место, где М. Г. Мещеряков, В. П. Джелепов и М. С. Козодаев с небольшим количеством молодых людей строили ускоритель заряженных частиц, а по субботам устраивались беседы, проводились научные семинары с нашими докладами, что стало великолепной традицией, продолжающейся до сих пор. Дубна и сейчас помнит «курчатовцев», которые приезжали и работали там. И эта дружба тогда нашего филиала, а теперь большого международного научного центра с нашим институтом продолжается до сих пор.

Опять-таки это было совершенно правильным, с прицелом на будущее, воплощением идеи И. В. Курчатова о необходимости союза теоретиков с экспериментаторами, связи прикладной науки и фундаментальной. На это, как я думаю, было затрачено немало средств, что принесло большие плоды.

Вспоминая Я. А. Смородинского...

А. Н. Сисакян

Среди славных имен отечественных физиков-теоретиков достойное место занимает Яков Абрамович Смородинский. В нем поражала энциклопедическая широта знаний — причем эти знания далеко не ограничивались физикой или естественными науками в целом. Поэзия, живопись, музыка, различные виды искусств — причем, разных времен и народов, — были знакомы этому улыбчивому и быстрому человеку с непослушной копной темных (пока не поседели!) волос...

Близко познакомиться с Яковом Абрамовичем мне довелось в 1966 году, когда я попал в Дубну для подготовки дипломной работы в Лабораторию теоретической физики. До этого были лишь эпизодические встречи при организации занятий физматшколы при МГУ и олимпиад для школьников, которым Я. А. Смородинский отдавал часть своей большой души.

То время было поистине периодом расцвета Лаборатории теоретической физики (и Дубны, и физики вообще). Н. Н. Боголюбов, Д. И. Блохинцев, А. М. Балдин, А. А. Логунов, М. А. Марков, В. И. Огиевецкий, Я. А. Смородинский, А. Н. Тавхелидзе, Д. В. Ширков вместе со своими учениками и коллегами активно разрабатывали теоретические представления о строении материи на новом кварковом уровне. Интенсивно входили в физику микромира и новые представления о симметриях. Увлеченность и редкое единство (несмотря на яркую индивидуальность и на различие взглядов по многим вопросам) отличали тогда коллектив ЛТФ... Семинары в Лаборатории посещались всеми сотрудниками и студентами и были любимым и обязательным атрибутом повседневной научной жизни.

Доброжелательная активность Я. А. Смородинского, которая ярко проявлялась на семинарах, привлекала к себе внимание коллег, в особенности молодежи. Доступность его и открытость для обсуждения любых вопросов поражала. К тому же он был известен не только своими блестящими работами по теории частиц и ядра, но и многочисленными научно-популярными выступлениями. Много обязанностей, но всегда как бы легко и весело, выполнял Яков Абрамович: сектор в Дубне и отдел в Курчатовском институте, редколлегии «Ядерной физики» и «Науки и жизни», переводы, редактирование и написание большого числа научных и популярных книг и статей, многочисленные конференции, симпозиумы и семинары, организатором которых он являлся...

В первые месяцы своей дубненской жизни, будучи стажером-исследователем ЛТФ, я зашел как-то с Генрихом Колеровым поужинать в Дом ученых и попал за один столик с Я. А. Смородинским и с другим старшим коллегой Н. А. Черниковым. Николай Александрович с присущей ему прямотой спросил меня: «И долго ты здесь собираешься работать?» Я ответил, что поработаю 2–3 года и вернусь в Москву, так как там у меня семья и, как коренной москвич, я хотел бы жить и работать там... «Я тоже москвич. Лет 15 тому назад так же думал. Ничего не выйдет. Дубна — это болото... Засосет!» — произнес серьезно Н. А.

Я был сперва ошарашен таким выводом, но веселый смех Якова Абрамовича вернул мне утерянное душевное равновесие. «Коля шутит, — сказал Я. А. — На самом деле, тебе повезло, Дубна — это очень хорошее "болото"!»

Теперь, по прошествии почти трех десятилетий я с улыбкой и благодарностью вспоминаю тот давний разговор. Дубна — да, была географическим болотом, но никогда — научным и человеческим...

Вспоминаю тот жуткий для моей семьи февраль 1986 года. В нашей московской квартире при ограблении была убита моя шестнадцатилетняя дочка Анюта.

Как в тумане помню заплаканное лицо Якова Абрамовича, который влетел в прихожую в день земного прощания с Аней. «Как же это может быть...» только и сказал он, и затрясся. Много дней спустя он заглянул к нам еще: «А, вы суп варите?.. Ну и хорошо, тогда выживете...». В эти тяжелые времена для меня особенно раскрылась его добрая человеческая натура, открытая для дружеского участия и поддержки.

Яков Абрамович любил науку, любил молодежь, любил книги и жизнь во всех ее многогранных проявлениях.

Непростой и поэтому особенно ценной была его научная и человеческая поддержка группы молодых талантливых физиков теоретиков из Ереванского университета (В. Тер-Антоняна, Г. Погосяна, И. Луценко, Л. Давтяна, Л. Мардояна и др.), с которыми меня связывают многие годы тесного сотрудничества. Кроме научных обсуждений. Я. А. всегда живо интересовался событиями жизни в Армении, новыми армянскими книгами, а в последние годы с болью в сердце переживал последствия землетрясения в Армении и военных конфликтов в Закавказье.

В научном общении с Я. А. Смородинским мы многому научились, и после внезапного ухода из жизни Якова Абрамовича продолжаем поддерживать творческие контакты со многими его учениками и коллегами — П. Винтернитцем, А. Изместьевым, И. Лукачем, М. Шефтелем и многими другими.

Вот уже четвертый раз без Якова Абрамовича организуется международный симпозиум «Симметрии в физике». Симпозиум из серии им задуманных и проведенных. С любовью и вниманием к этим дням Смородинского готовятся его многочисленные друзья, коллеги, ученики, его вдова Валентина Александровна и дочь Ная.

«Человечество состоит из тех, кто живет на земле сегодня и тех, кто ушел, оставив по себе добрую память...» Человеческая память переплетается с сегодняшним днем. Во время прогулок по Дубне с женой Наташей и дочерью Настей мне часто кажется, что из-за поворота появится взлохмаченный ветром Яков Абрамович и, улыбнувшись, скажет что-нибудь доброе...

Дубна—Москва,
сентябрь 1995

32 Зак. 198

О моем друге Якове Абрамовиче Смородинском

В. П. Джелепов

Впервые я познакомился лично с Яковом Абрамовичем во время войны осенью 1942 г., находясь в Казани. Встреча состоялась неожиданно, как помню, у входа в Казанский университет. Ко мне подошел молодой человек с пышной шевелюрой черных волос и, представившись — Яков Смородинский, спросил, не знаком ли я с П. Е. Спиваком из Физтеха. В университете тогда размещалось несколько академических институтов, эвакуированных из Ленинграда и Москвы, в том числе и Ленинградский физико-технический институт, в котором работали и я, и П. Е. Спивак. Но он в то время был в Ереване. Мы разговорились. Яша сообщил, что работает в теоретическом отделе Института физических проблем АН СССР. Он познакомил меня со своей женой Эсфирью Иосифовной. Они являли собой счастливую и приятную супружескую пару.

Так как я занимался в Казани под руководством проф. Ю. Б. Кобзарева по секретной тематике, связанной с радиолокацией (ядерную физику в Физтехе закрыли тотчас, как началась война), то разговор наш касался, в основном, житейских вопросов, а отчасти тех моих работ, которые я вел перед войной в лаборатории проф. А. И. Алиханова по экспериментальной проверке некоторых предсказаний теории позитрона Дирака. Оказалось, что Яша был немного знаком с ними, и мы приятно побеседовали. Он произвел на меня очень хорошее впечатление своей большой увлеченностью наукой и легкостью общения. Но вскоре Яков Абрамович исчез из моего поля зрения. Наша группа работала очень напряженно. Домой возвращались поздно, а в конце декабря 1942 я уехал в Москву на испытания нашей локационной системы.

Вновь мы начали встречаться с Яковом Абрамовичем уже в Москве, в Лаборатории № 2, руководимой И. В. Курчатовым, куда он поступил на работу в конце 1944 г. Мы занимались решением совершенно различных задач, но непосредственно связанных с урановым проектом. Он — теорией разделения изотопов урана методом диффузии, а я — сначала сооружением небольшого циклотрона, а потом измерениями чисел нейтронов на акт деления для различных изотопов урана.

Участвуя в работе общелабораторного семинара, я видел, как раскрывался талант Якова Абрамовича, как быстро рос его авторитет и как он вошел в число ведущих теоретиков Курчатовской лаборатории.

Наиболее регулярные научные и личные контакты с Яковом Абрамовичем установились у нас лишь начиная с 1948 г. В сентябре 1948 г. по представлению И. В. Курчатова я был назначен заместителем директора и научного руководителя новой лаборатории, которую было решено создать в Дубне, как филиал Лаборатории № 2, руководимой Курчатовым. Этой лаборатории из соображений секретности было присвоено название Гидротехническая лаборатория АН СССР. Основной базовой установкой этой лаборатории должен был стать крупнейший в то время в мире ускоритель — пятиметровый синхроциклотрон на энергию дейтронов 280 МэВ, α-частиц — на 560 МэВ и протонов — 480 МэВ с последующим увеличением энергии протонов до ~ 700 МэВ.

И. В. Курчатов, по чьей инициативе создавалась новая лаборатория, считал, что со временем она должна стать национальной лабораторией нашей страны, на ускорителе которой будут работать наряду с дубненскими физиками также ученые из других ядерных институтов. В целях выработки программы наиболее актуальных и перспективных ядерно-физических исследований на ускорителе, а также подготовки на высоком уровне молодых физиков И. В. Курчатов поручил четырем известным теоретикам — И. Я. Померанчуку, Я. А. Смородинскому, А. Б. Мигдалу и Б. Т. Гейликману читать в Дубне лекции по теории физики элементарных частиц и атомного ядра, участвовать в работе научных семинаров, обсуждать с экспериментаторами намечаемые исследования и оказывать помощь в интерпретации полученных результатов. Им поручалось также руководство работами поступающих в Лабораторию из МИФИ и МГУ молодых теоретиков. Яков Абрамович очень активно включился в эту важную и ответственную работу. Начиная с 1949 г. наши семинары проводились регулярно каждую неделю по субботам и чаще всех приезжали к нам И. Я. Померанчук и Я. А. Смородинский. Ускоритель был введен в действие 14 декабря 1949 г.

В этот период Яков Абрамович очень активно работал над созданием феноменологической теории нуклон-нуклонных взаимодействий при высоких энергиях. Совместно с Л. Д. Ландау сформулировал общие виды потенциалов как для взаимодействия протон-протон, так и нейтрон-протон с учетом в последнем случае обменного взаимодействия. Им была также развита теория изотопического спина и при его непосредственном участии разработана программа изучения не только упругого, но и неупругого (с рождением пионов) рассеяния нуклонов. Особенно ценной для нас являлась его помощь в интерпретации получавшихся на ускорителе Лаборатории опытных результатов. А их было много, так как все экспериментаторы — руководители секторов и сотрудники — работали с большим энтузиазмом.

В 1955 г. вышла книга Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинского «Лекции по теории атомного ядра», где были в сжатой, но весьма яркой форме обобщены результаты выполненных к тому времени теоретических и экспериментальных работ в области сильных взаимодействий нуклонов при высоких энергиях. Эта книга и сейчас, спустя 40 лет, не потеряла своей актуальности. В 1956 г. Яков Абрамович обратил наше внимание на особую важность проведения в Лаборатории исследований с поляризованными нуклонами с использованием как неполяризованных, так и в особенности поляризованных мишеней. Его статья «Восстановление матрицы рассеяния в системе из двух нуклонов» (ЖЭТФ, т. 32, 1957 г.), написанная совместно с его учениками Р. М. Рындиным и Л. Д. Пузиковым, является классическим трудом в теории поляризационных процессов. Там впервые было показано, какой набор опытов по нуклон-нуклонному рассеянию необходимо провести для того, чтобы по их результатам можно было провести полный фазовый анализ и построить матрицу рассеяния. Именно по этому пути и пошли дальнейшие экспериментальные исследования нуклон-нуклонных взаимодействий в Дубне и других лабораториях нашей и не только нашей страны. С этой целью у нас в Лаборатории были созданы поляризованные пучки протонов, а позднее — впервые в мире — поляризованные мишени протонов и дейтронов с высокими коэффициентами поляризации (до 85 и 40 % соответственно). Результаты инициированных Яковом Абрамовичем экспериментов с поляризованными нуклонами и мишенями позволили выполнить полный фазовый анализ нуклон-нуклонного рассеяния в широкой области энергий (200–1 000 МэВ).

Отмеченные мною работы Якова Абрамовича принесли ему широкую известность в мире науки, хотя они являются лишь частью общего большого комплекса его научных трудов.

Пятидесятые годы были годами становления в нашей стране, и не только в нашей стране, новой науки — физики высоких энергий. Дубна явилась первым

центром бывшего СССР, где зародилась и интенсивно развивалась эта область науки, и Яков Абрамович внес весьма существенный и ценный вклад в становление и развитие этого, ставшего в 1956 г. международным, ядерного центра, получившего название Объединенный институт ядерных исследований.

Все мы, сотрудники ОИЯИ, глубоко благодарны ему за его большой и плодотворный вклад в научные достижения Института и в воспитание высококвалифицированных кадров физиков-теоретиков и экспериментаторов.

Мое личное тесное общение с Яковом Абрамовичем так же, как и многих сотрудников Лаборатории, продолжалось в течение длительного периода. В дальнейшем он большую часть времени работал в Москве, контакты с ним становились более редкими. Но обсуждение с ним различных новых проблем, возникавших в связи с появлением новых научных фактов, всегда было интересным, обогащающим. Он был исключительно эрудированным физиком-теоретиком во многих областях науки, и его замечательные личные качества — легкая контактность и интерес ко всему новому — притягивали к нему людей. Он регулярно знакомился с массой журналов и книг. Его интересы простирались от изучения свойств микрочастиц до исследования глобальных проблем масштаба Вселенной. Вспоминается например момент, когда они вместе с Б. М. Понтекорво очень интенсивно обсуждали выдвинутую Понтекорво в 1959 г. идею о возможности явления лептонного тормозного излучения (испускание пар нейтрино при соударении быстрых электронов с ядрами). Это явление может происходить на определенных стадиях эволюции звезд и играть существенную роль в энергетическом балансе Вселенной. Позднее после нескольких дискуссий Б. М. Понтекорво и Я. А. Смородинский в 1961 г. опубликовали в ЖЭТФ статью «Нейтрино и плотность материи во Вселенной», в предисловии к которой они писали: «Рассматривается возможность того, что плотность энергии нейтрино и антинейтрино во Вселенной сравнима с плотностью энергии, связанной с массой покоя водорода или более ее». В последние годы он интенсивно занимался теорией симметрий. Своими работами в эту, одну из очень сложных и актуальных областей современной теоретической физики, он также внес существенный вклад.

Яков Абрамович Смородинский был крупным, широко известным в мире науки, талантливым и ярким ученым. Он любил науку и всей душой был ей предан. Яков Абрамович являлся членом редколлегий ведущих научных журналов, редактором многих книг, в том числе переведенных с иностранных языков. Его любовь к книгам беспримерна. Личная библиотека Якова Абрамовича поражает своим богатством. В ней есть все: книги по различным областям науки, книги классиков литературы наших и иностранных, книги по истории стран и народов, по искусству, книги фантастов, детективы, различные научные журналы. Много бестселлеров, ценнейшие альбомы с картинами многочисленных художников и пр. и пр.

Замечательные личные качества Якова Абрамовича — высокая интеллигентность, легкая контактность, доброжелательность, громадная эрудиция — постоянно влекли к нему людей. Уход его из жизни — большая потеря для науки, а для каждого из нас, близко знавших и общавшихся с ним в течение многих лет, является личным очень горьким и печальным событием. Светлая память о нем сохранится в сердцах многих и многих людей на всю жизнь.

Дубна,
27 декабря 1994

Яков Абрамович — Яша Смородинский — человек, которого мне будет не хватать

М. Каганов

Память ведет себя причудливо. Я хорошо помню, как, собираясь пойти к Смородинским в гости, я, бывавший у них уже несколько раз, вспоминал сначала название улицы, а выйдя из станции метро «Курская», уже помнил номер дома. Стоило мне перейти Яузу, как откуда-то выплывал этаж и номер квартиры.

То, что я написал, — не литературный прием. Так было. Или, как говаривал один мой знакомый, «это Вам не какой-нибудь факт, это так и было».

Я надеюсь, что в процессе писания этой статьи вспомнится нечто интересное. Возникает обидное чувство: я считаю Я. А. одним из интереснейших людей из знакомых мне. А с Я. А. я был, смею сказать, более чем знаком: мы, по-моему, были близки друг другу, хотя в разное время общались с разной частотой. И при этом рассказать о Я. А. мне трудно. Скорее всего дело в том, что мы работали в разных областях теоретической физики и не встречались на семинарах, конференциях... Последнее неточно. Я хорошо помню, что Яков Абрамович был одним из тех легендарных теоретиков, которые могли на семинаре Ландау рассказать очередной номер Phys. Rev.'а [1]. «Мог» не в смысле абстрактной возможности, а буквально: я слышал его доклады (вот во множественном числе я не уверен, возможно, один доклад). Сравнительно недавно (по существу незадолго до смерти Я. А.) мы вместе участвовали в конференции в Дубне, которая носила странное название «Квантовая интуиция». Мне было очень приятно: оба остались довольны выступлениями друг друга...

Не могу вспомнить, когда мы познакомились. Точнее, произошло ли знакомство до описанного ниже эпизода или этот эпизод нас и познакомил?

Возвращаясь из летнего отпуска с юга, Я. А. с женой и дочерью попали в аварию и, как к счастью бывает, чудом спаслись. Их и машину довезли до Харькова, и они остановились в квартире нашего общего знакомого (а для меня во всяком случае — даже друга) Вениамина Леонтиевича Германа, у которого прожили несколько дней. Мы с В. Л. Германом жили в одном дворе и, естественно, часто общались. Именно после этого эпизода мы (Я. А. и я) сблизились. «Нет худа без добра», — сказал бы я, если бы худо было менее рискованным. Шок был так велик, что Я. А., по-моему, никогда более не сел за руль автомобиля...

Сблизило нас еще одно (косвенное) обстоятельство. Все, кто был знаком с Я. А., знали, что Смородинский — книжник, что у него замечательная библиотека. Будучи любителем, он был знатоком книги. А мой отец, Исаак Яковлевич Каганов, был профессионалом. Его специальностью наряду с литературоведением были книговедение, история книжной культуры. Конечно, и он был библиофилом. Хотя его библиотека, которую он собирал с гимназических времен, погибла во время войны, у него было неплохое собрание книг. Наверное, сразу состоялось знакомство И. Я. и Я. А., а мне потом часто приходилось играть роль связного: передавать сообщение, а иногда и книги от одного другому... В значительно более поздние годы роль поклонника и почитателя библиотеки Якова Абрамовича стал играть мой

[1] У Phys. Rev.'а тогда не было серий.

зять Леня Литинский, приносивший Я. А. сведения из букинистических магазинов, расположенных вне «поля зрения» Смородинского.

Хорошо было бы, если бы в книге воспоминаний о Я. А. была бы квалифицированно описана его библиотека. Я, к сожалению, не могу этого сделать. Хочется только отметить несколько необычных черт Смородинского-коллекционера. Во-первых, отсутствие жадности. Он легко дарил книги (более того, для этого их часто и покупал). «Во-вторых» требует пояснения. Для обычного библиофила книга — предмет, интерес к которому вызван его редкостью (книга-раритет). У Я. А. такой подход к книге тоже был. Я помню, он тратил много энергии и, наверное, денег на поиски и покупку иллюстрированных поэтических сборников издания 20-х годов. Сколько тревог и радости доставил ему художник Нарбут, которого он, если мне не изменяет память, всего собрал. Но вместе с тем Я. А. был читателем (библиофил редко читает). Книги интересовали его своим содержанием. И он умел находить необычайно интересные не только отдельные книги, но и публикации. Опять требуется разъяснение. У каждого интеллигентного человека есть круг интересов, как правило, легко описываемый. У Якова Абрамовича он был необъятен. Его интересовало все по-настоящему интересное. По-настоящему интересно то, что интересно и другим. Мне кажется, круг интересов каждого, с кем общался или дружил Я. А., пересекался с его кругом интересов. Это сложное геометрическое построение означает, что всем было с ним интересно... Яков Абрамович был эрудитом (в данном месте моих заметок речь идет не о физике). Сколько интересного я узнал от Я. А. по истории культуры, истории религии. А иногда неожиданно выяснялось, что Яков Абрамович прочитал что-то необычайно занимательное по этологии и увлекательно рассказывает о жизни птиц. Пишу и нарочно обхожу некоторые темы, чтобы рассказать о них отдельно.

Мы с Яковом Абрамовичем почти ровесники, но «научный возраст» существенно различается. Больше шести лет в армии, война задержали мое научное развитие, и я всегда чувствовал себя в науке младшим. Для этого были не только формальные основания. К тому времени, как мы познакомились, Я. А. был уже крупным ученым. Его многогранность проявлялась не только в умении отреферировать номер Phys. Rev.'a. Он был автором первой (или одной из первых) книг по теории ядра в соавторстве с Ландау (а это говорит о многом). Когда мы говорили на профессиональные темы, меня поражала широта интересов Я. А. и, пожалуй, главное, особый нюх на новое. Он всегда знал, что происходит нового в науке — от астрофизики до физики элементарных частиц. Просматривая все доступные ему журналы, он всегда (и чаще всего безошибочно) находил то, что станет сенсацией. Я бы сказал, у него было чутье на сенсацию. Должен признаться, о многом, что стало потом активно развиваться, я впервые услышал от Якова Абрамовича. В частности, о фуллеренах (заметьте, вроде я специалист по физике конденсированного состояния, а не он!)...

Мысленно я возвращаюсь к первым годам нашего знакомства. Как ясно из первого абзаца, жили Смородинские вблизи от Курского вокзала. Бывая в командировках (а жил я тогда в Харькове), обязательно заходил к ним, причем установился некий трогательный ритуал. Как правило, я заходил перед поездом. Меня, конечно, кормили. (Это был дом, где, открывая дверь, спрашивали: «Вы голодны? Покормить?») Мы сидели, разговаривали, обязательно смотрели книжные новинки, среди них особое наслаждение доставляли художественные альбомы. Многих теперь хорошо мне известных художников я узнал по альбомам Якова Абрамовича. Иногда я просил дать что-нибудь почитать. Взять с собой в Харьков разрешалось, но не разрешалось просить что-нибудь почитать. Надо было более или менее точно сформулировать, что ты хочешь почитать. И тогда, как правило, это было, и ты получал желаемую книгу. Отнюдь не всегда эту книгу можно было купить в магазине, пусть даже букинистическом. Так, впервые прочитанные романы Алданова были взяты мною у Я. А. Где он их достал, не знаю. И даже не мог спросить:

Алданов относился к запрещенным авторам. Подходило время идти к поезду. Я. А. всегда меня провожал. Иногда я брал билеты непосредственно перед отъездом. Яков Абрамович вместе со мной переживал предотъездную суету...

В моей московской жизни (она длилась 24 года) большую и необычайно приятную роль играла Дубна. Она стала для меня чем-то вроде дома творчества. Имея возможность получить удобный номер в гостинице на берегу Волги, я старался несколько раз в году приезжать в Дубну (один или с женой, а летом даже с внуком) отдохнуть и поработать. В Дубну ввел меня Яков Абрамович. Мне казалось (а сейчас я даже чувствую в этом уверенность), что отношение к Я. А. как бы переносилось на меня, облегчая вхождение в дубненскую компанию. Конечно, постепенно у меня появились свои привязанности, возникли и окрепли дружеские отношения, которые я очень ценю и без которых моя жизнь все эти годы была бы значительно более тусклой. Приезжая в Дубну, практически всегда я виделся с Я. А. Обычно, если дело было летом, мы встречались на пляже, а зимой гуляли по живописным окрестностям. И на пляже, и во время прогулки главное — беседа. О чем мы только ни переговорили. Отнюдь не только физика была темой наших бесед. Помню, например, сетования Я. А. на уничтожение умельцев, настоящих мастеров своего дела, что должно было гибельно сказаться на уровне и качестве производства. Тогда такие высказывания были достаточно смелыми. Подкрепленные убедительными примерами (вычитанными из самых различных источников), они могли бы служить темой семинара в каком-нибудь из научно-исследовательских институтов по экономике. Но кто бы тогда взялся такой семинар организовать?!... И все ограничивалось беседой на прогулке.

Иногда мне казалось, что Я. А. становился жертвой суеверия (особого интеллигентского суеверия). Его увлекла разработанная математиком Фоменко шкала исторических событий, отличная от принятой в исторической науке. Я отнесся к методологии Фоменко весьма скептически, и постепенно Я. А. тоже, мне кажется, перестал относиться к этой идее серьезно...

В наших прогулках зимой нас не останавливал мороз. Меня всегда поражало, как легко одевался Я. А. В куртке, как выяснялось, без теплого белья, в шапке, не закрывающей ушей, если правильно помню, без перчаток, он мог часами ходить, вроде бы не замечая холода. Скажу честно, я завидовал такой морозостойкости, кутался и даже, одетый значительно теплее, старался сократить прогулки. В Дубне я написал несколько своих научно-популярных книг. И это обстоятельство напоминает мне еще об одной линии связи с Яковом Абрамовичем: научно-популяризаторской деятельности.

Теперь я не забуду об этом рассказать. Но сначала хочу упомянуть об издательской работе Якова Абрамовича. Под редакцией Я. А. вышло большое число книг физиков-классиков. Эта тема тоже требует специальной статьи. В случае Я. А., по-моему, необходимо список собственных научных трудов дополнить не только списком научно-популярных книг и статей (это делается), но и изданных под его редакцией книг. Я же с благодарностью к Я. А. смотрю на четырехтомник Эйнштейна, немногие книги, увезенные из Москвы в Бостон. Хорошо помню, сколько волнений доставила Якову Абрамовичу борьба за публикацию каждой нестандартной мысли великого Эйнштейна, мысли, расходившейся со скучной доктриной, принятой в те годы. Редакционной коллегии (И. Е. Тамм, Я. А. Смородинский. Б. Г. Кузнецов) удалось «пробить» то, что они считали нужным донести до читателя. Работы, вошедшие в первые три тома, мы изучаем в университетах, формулами и представлениями, созданными Эйнштейном, мы пользуемся в своей работе, но четвертый том — это замечательная проза, написанная глубоким мыслителем. И то, что мы можем обращаться к этой сокровищнице мудрости, не затрудняя себя переводом, — заслуга Якова Абрамовича и его товарищей по редакционной коллегии.

Довольно часто мы с Я. А. встречались в деловой обстановке. Мы оба, говоря на отвратительном канцелярите, занимались научно-популяризаторской деятель-

ностью. Канцелярит использован по необходимости: мы не только писали научно-популярные статьи, брошюры и книги, но и заседали в различных редколлегиях, а главное в Совете по популяризации физико-математических знаний Всесоюзного общества «Знание» и в комиссии при этом совете по печати. Невредно отметить, что в какой-то момент из Совета и комиссии по печати по рекомендации начальства были изъяты все евреи (к сожалению, я не могу вспомнить точно, когда это произошло: наверно, это не трудно установить...). Я. А. действительно много писал на научно-популярные темы, охотно брался редактировать статьи и книжки. Надо признаться, он не был слишком аккуратен, и сотрудникам комиссии, редакций иногда трудно было получить от него рукопись, рецензию... Но в конце концов рукопись получали, и выходила очередная статья в журнале «Квант», а рецензия давала возможность редакции потребовать от автора улучшения текста: советы Я. А. всегда были ценны.

На заседаниях Совета по популяризации физико-математических знаний мы, как правило, сидели рядом, комментировали происходящие события, а иногда и просто разговаривали. Поэтому такие заседания я воспринимал главным образом как возможность общения с Яковом Абрамовичем.

Одно выступление Я. А. я запомнил особенно хорошо (я часто его пересказывал). Обсуждали вопрос об организации лекций по путевкам общества «Знание». Речь шла о поездках по окраинам Советского Союза. Я. А. рассказал случай из своей лекционной практики. Он выступал с лекциями на Памире. Однажды — перед большим собранием колхозников-таджиков, созванным в местном клубе. На сцене лектор и председатель колхоза. Закончив лекцию, Я. А., возбужденный как все даже весьма опытные лекторы, не дожидаясь слов председателя, говорит: «Может быть, есть вопросы? Я с удовольствием отвечу». И вдруг слышит голос председателя: «Товарищ лектор! Не беспокойтесь, они по-русски не понимают...»

Я пишу «Яков Абрамович», «Я. А.», а многие годы мы называли друг друга по имени.

У Яши была замечательная особенность. Мне она приносила много радости. Он обожал (иначе не скажешь!) головоломки, различные поделки, с полной серьезностью относился к таким творениям вычурного ума, как рисунки Эшера и/или кубик Рубика. В этом было что-то притягательно-детское. Яша прекрасно владел простыми инструментами, мог сам склеить какую-нибудь штуковину, доставлявшую радость не только детям. Приятно было, зайдя к нему в Дубне, увидеть его склонившимся над очередной поделкой или разбирающим занимательные задачи Гарднера (не ему ли принадлежит идея издания книг Гарднера?) или крутящим кубик Рубика. Эти детские забавы естественно сочетались с вполне серьезными мыслями и идеями, а иногда, переплетаясь, помогали друг другу. К сожалению, я не очень внимательно прислушивался, как та или другая топологическая забава может помочь понять свойства гипергеометрической функции или геометрию мира Лобачевского. А увлечение последних лет — квантовые группы, как мне представляется, каким-то непостижимым образом проистекало из размышлений над природой оптических и других иллюзий...

Эти заметки пишутся через несколько лет после того, как мы простились с Яшей Смородинским. Уже после его смерти я несколько раз бывал в Дубне. И все же не могу себе представить, что больше никогда его не увижу. Не услышу восхищенный рассказ о взрыве сверхновой, об открытии новой частицы, не получу «указания», что нужно срочно прочесть в таком-то журнале, не буду ошарашен очередным фокусом и просто не поговорю с умным, доброжелательным человеком. Мне будет его не хватать. И не только мне, многим...

Бельмонт (*Бостон*),
18 *ноября* 1994

К портрету Якова Абрамовича Смородинского

Д. А. Киржниц*

«Знаете, Д. А., если мне дадут часок на фиановском семинаре, я смогу рассказать кое-что забавное», — слышал я едва ли не при каждой встрече с Яковом Абрамовичем Смородинским. А нам уже было хорошо известно, что эпитет «забавное» в его устах означает, что содержание доклада будет живым и интересным, форма изложения — изящной и завершенной, а кроме того дело не обойдется без некой «изюминки», придающей докладу особый блеск. Так, в начале 60-х годов Я. А. познакомил нас со свежими новостями по применению группового подхода к теории частиц, когда буквально «из ничего» возникали количественные соотношения, согласующиеся с опытом. Все это было удивительно до неправдоподобия и производило впечатление подлинного чуда. А завершило доклад стихотворение Давида Самойлова (того самого, кто написал «Сороковые, роковые...») о лошади, гуляющей по бульвару и пьющей газированную воду:

Это маленькое стихотворение
Посвящается нам с тобою.
Мы с тобой в чудеса не верим,
Оттого их у нас не бывает...

Яков Абрамович Смородинский принадлежал к числу выдающихся советских физиков-теоретиков, начавших работать в предвоенные годы, выделяясь среди них высочайшим гуманитарным потенциалом. Для него человеческая культура была единым целым с весьма условным дроблением на науку, искусство, литературу и др. Это достаточно редкое качество (подчеркнутое в прощальном слове Юлием Александровичем Даниловым — человеком, очень близким Я. А. по духу) основывалось на широчайшей эрудиции, «обоеполушарном» мышлении, обостренном эстетическом чувстве и неугомонном темпераменте. Поэтому он обладал способностью видеть во всем, с чем имел дело — от математических хитросплетений до явлений окружающего мира — такие глубины и красоты, которые были откровением для нас, «технарей». Без всего этого было бы невозможно осуществление великого дела жизни Я. А. — издания на русском языке собрания сочинений Альберта Эйнштейна, которым он заслужил вечную благодарность русскоязычной физической и математической общественности, не говоря уже о специалистах по истории науки, философии естествознания, психологии научного творчества.

Впервые я услышал о Якове Абрамовиче еще в ранние студенческие годы, общаясь с метившими в теоретики старшекурсниками; позднее я изучал прекрасную книгу по теории ядра, написанную им вместе с Ландау. И, конечно, бывая изредка на семинарах Ландау, я не мог не обратить внимания на самую, пожалуй, темпераментную фигуру из числа участников. Но настоящее знакомство, поначалу заочное, произошло в самом начале 1950 г., когда моя жизнь круто переломилась

* Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва.

и по путевке Министерства вооружений я поехал инженером на завод в Горький (полное название — Государственный союзный четырежды орденоносный завод № 92 им. И. В. Сталина; бывшим фронтовикам хорошо знакома пушка ЗИС-3 — наше основное полевое орудие минувшей войны).

Это действительно был полный перелом, так как что-либо менее похожее на жизнь физика-теоретика (кроме, разумеется, тюрьмы и армии) представить трудно. В первые недели заводской жизни, когда меня постоянно держали в ночных сменах на роли то ли механика, то ли слесаря-вакуумщика, я существовал в абсолютно одурелом состоянии, а уставал до такой степени, что спал в любом положении и в любую свободную минуту. Наконец, фортуна повернулась ко мне передом — начальство решило, что первый круг я одолел и что пора подвергнуть меня более интенсивной стрижке. С этой целью меня посадили за стол (что само по себе уже было событием) и вручили совсекретный курс лекций, автором которого и был Яков Абрамович. Прошло уже почти полвека, и я могу сказать, что это была теория разделительного процесса, которой параллельно с Я. А. на Западе занимались такие крупные теоретики, как Дж. фон Нейман (в США) и Р. Пайерлс (в Англии).

Как ни старался Я. А. приспособить свое изложение к инженерному уровню, это все же была теоретическая физика, и я читал лекции с восторгом, воспринимая их как привет из такого дорогого, но уже очень далекого прошлого. Стоит ли говорить, что они подняли мой дух, облегчили адаптацию к новым условиям и, главное, укрепили в намерении не бросать науку. Усилия по достижению этой цели, в сильной степени подкрепленные наездами Виталия Лазаревича Гинзбурга в Горький, были по-царски вознаграждены пятью годами позднее, когда Игорю Евгеньевичу Тамму удалось вытащить меня с завода и сделать своим сотрудником.

Личное знакомство с Я. А. произошло еще в заводские годы, когда я начал ездить в командировки в тогдашний ЛИПАН в отдел И. К. Кикоина, где осуществлялось научное руководство нашим заводом и где работал Я. А. От наших нечастых разговоров (речь шла в основном о новостях фундаментальной науки) в памяти осталось мало. Помню, что, сочувствуя моим попыткам сочетать производство с наукой, он однажды посоветовал мне попросить Исаака Константиновича Кикоина выписать на завод самый знаменитый в то время журнал Phys. Rev. Самое удивительное, что эта затея удалась и я смог держать в руках «зеленый» журнал (то-есть подлинник, а не ксерокопию) гораздо раньше, чем когда пользовался горьковскими библиотеками. Как мне говорили, журнал продолжал приходить и после моего отъезда из Горького, хотя в него вряд ли кто-нибудь еще заглядывал.

Более тесное знакомство с Я. А. началось уже в Москве и длилось около сорока лет. Конечно, суетная московская жизнь (при большом расстоянии между нашими домами и еще большим — между офисами) не очень располагала к контактам. Существенно больше мы общались в Дубне (где Я. А. был совместителем, много сделавшим для повышения математической и теорфизической культуры ОИЯИ) и на иногородних конференциях. Заговорив о Дубне, не могу не сказать, что моя любовь к этому городу была в решающей мере порождена привязанностью к нескольким удивительным людям, составлявшим цвет и совесть Дубны. К ним наряду с Яковом Абрамовичем принадлежали Герцен Исаевич Копылов, Михаил Исаакович Подгорецкий, Виктор Исаакович Огиевецкий. Горько сознавать, что никого из них уже нет среди нас...

Гуманитарный потенциал Я. А., о котором уже шла речь выше, поддерживался его неудержимым и принимавшим весьма активные формы интересом к культурным ценностям. Помню, как лет 30 назад во время конференции в Тбилиси Я. А. узнал, что еще жива и принимает гостей вдова известного художника, ученика Пикассо, одного из создателей поп-арта Давида Какобадзе. Я. А. затащил нас на квартиру этой старой дамы, где я впервые почувствовал, что такое традиционная грузинская культура.

Он быстро растопил лед, обнаружив глубокое знакомство с европейской живописью межвоенного периода, зажег хозяйку своим энтузиазмом и побудил ее показать нам такие картины, которые, по ее словам, уже несколько десятилетий не видел никто. Другое воспоминание относится к очень редкому журналу «Русская свобода», который ничтожным тиражом издавался с марта по июнь 1917 года русскими религиозными философами — Булгаковым, Бердяевым, Франком и др. и в котором делалась попытка предугадать ближайшее будущее России после свержения самодержавия. Комплект этого журнала, который вместе с другими редкостями моя жена получила в наследство, стал предметом вожделения Я. А. Узнав о существовании таких богатств, он немедленно приехал к нам и долго их изучал. Наконец, еще один случай произошел после очередной алуштинской конференции, когда в Симферополе у нас осталось несколько часов свободного времени до самолета. Незадолго до этого я познакомился с альбомом крымских пейзажей художника-романтика Константина Богаевского, ученика Куинджи, работы которого произвели на меня большое впечатление. Стоило мне заикнуться об этом, как Я. А. потащил меня в музей, а потом и в запасники, после чего Богаевский стал одним из любимых моих художников.

Неудивительно, что к 70-летию Я. А. я постарался выбрать подарок позаковыристей и остановился на книге GESTA ROMANORUM на церковнославянском языке (!), оставшейся от библиотеки моего деда. Не сомневаюсь, что и в ней Я. А. нашел какую-нибудь изюминку. К этой книге был приложен портрет Эйнштейна в знак признания заслуг Я. А. в области, так сказать, «альбертологии». Портрет попал в мои руки, когда мы с женой, отдыхая в Протвино, однажды зашли на огонек (буквально) в церковный придел в соседнем селе. Очутились мы в мастерской серпуховского художника (имя его, известное Я. А., я забыл), который подарил нам на прощание гравюру с очень нестандартным портретом Эйнштейна своей работы. Увидев ее, я сразу же подумал о Якове Абрамовиче.

Будучи сам яркой и неповторимой личностью, Я. А. в своей жизни повидал немало нетривиальных людей (обоих знаков!), сохранил в памяти массу воспоминаний об этих людях и умел захватывающе о них рассказывать. Хорошо помню, как мы бродили по окрестностям Дубны и Протвино и я слушал долгие рассказы о людях, которых знал Я. А. и спектр которых простирался от Ландау на одном конце до Берия на другом. К сожалению, эти рассказы не записывались, а мои обрывочные воспоминания, находящиеся к тому же в противоречии со стандартными оценками, вряд ли заслуживают воспроизведения.

К концу этого очерка пора, наконец, поговорить о науке — главном деле жизни Я. А. Нужно сказать, что при всем множестве его докладов, которые я слушал (и слушал с наслаждением) и при всем множестве его статей и книг, которые я прочел (с тем же чувством), прямых научных контактов у нас было немного, поскольку наши прямые интересы совпадали редко. Один из запомнившихся контактов касался замечательной статьи Я. А. и Ландау о рассеянии протона на протоне, где теория эффективного радиуса обобщалась на случай присутствия дальнодействующего кулоновского взаимодействия. В 80-х годах мы с моим аспирантом Ф. М. Пеньковым обобщили эту теорию на случай проблемы трех тел (например, для рассеяния протона на дейтроне). Дискуссии с Я. А. очень помогли нашей работе. Другой контакт относился уже к концу 80-х годов и был связан с пересечением интересов Я. А. с группой сотрудников из МИРАНа с одной стороны и нашей группы — с другой. Речь шла о вычислении величины энергетических потерь нейтрино в веществе — вопрос, который в то время приобрел большую актуальность в связи с работами Дж. Вебера и фиановской экспериментальной группы, где указывалось на аномально большую величину потерь. Как я понимаю, Я. А. пленила возможность наделить нейтрино, движущееся в среде, эффективными электромагнитными характеристиками и таким путем рассчитывать

потери этой частицы. Его соавторы пошли по линии прямых, достаточно сложных и потому не застрахованных от ошибок вычислений. Мы же ограничились более простой, но зато и более общей задачей — определением универсальной верхней границы потерь нейтрино в произвольной среде. Было много волнений из-за расхождения наших результатов, пока в итоге нескольких весьма продуктивных дискуссий все не стало на свои места. Во время этих обсуждений я еще раз получил возможность восхититься хорошо известной многим теоретикам сильной чертой Я. А. — мастерским владением симметрийной идеологией и симметрийным аппаратом.

Особо хочется отметить, что Я. А., славу богу, не принадлежал к тем людям, которые твердо знают «как надо» и отметают все остальное. Он, конечно, умел ценить новое и не раз доказывал это делом, но довольно скептически относился к массовым забегам в науке переднего края и не признавал связанной с этим нетерпимости. Все это было очень актуально в конце 50-х — начале 60-х годов, когда огромная масса теоретиков-полевиков (особенно молодых) была повально заражена эпигонством, стадами кидаясь на каждую новую идею, просочившуюся с Запада. Соответственно человек, занимающийся немодными вопросами, а потому отказывающийся дышать в спину коллеге и ощущать чужое дыхание на своей спине, считался недотепой и вызывал недобрые чувства. Будучи именно таким человеком, я старался в те годы преодолеть трудности нелокальной теории поля (НТП), которая считалась принципиально порочной теорией и которой занимался тогда во всем мире едва ли десяток энтузиастов. Сразу же скажу, что моя деятельность по НТП очень пригодилось моему дорогому и незабвенному учителю Игорю Евгеньевичу Тамму, когда он в последние годы жизни разрабатывал теорию квантованного пространства-времени. Так вот, году в 1961 в Ужгороде состоялась конференция, где я впервые осмелился утверждать, что трудности НТП безмерно преувеличены, что они возникают из-за неадекватного математического аппарата и без особого труда могут быть преодолены. Эпигоны на мой доклад просто не явились, а человеком, который понял и оценил мои результаты, был как раз Яков Абрамович. После доклада, когда я вышел из зала покурить, он присоединился ко мне, найдя очень точные и теплые слова, показавшие мне, что мучился я не напрасно. Я могу ошибаться, но мне кажется, что он уже тогда почувствовал во мне родственную душу — человека, для которого наивысшая радость состоит не в создании чего-то совершенно нового, а в открытии новых и неожиданных сторон давно известных вещей (вроде закона Архимеда или правила правой руки).

Завершая этот небольшой очерк в надежде, что читатель найдет в нем добавочные штрихи к портрету одного из самых нетривиальных наших современников, хочу поблагодарить составителей сборника за приглашение принять в нем участие.



Мать, Р. А. Смородинская



Отец, А. Я. Смородинский



Я. А. Смородинский с сотрудниками, 1956. Слева Р. М. Рындин



Семинар в ОИЯИ, 1956



Семинар в Институте физических проблем, 1956



Дубна, 1961. Слева Э. И. Смородинская



ИАЭ, 1961. Слева И. М. Франк, в центре Н. Бор



Дубна, 1965. Справа П. Винтерниц



Дубна 1975. Справа Л. И. Лапидус



Дубна, 1975



1975. Справа Е. Л. Фейнберг



На опере «Архимед» в ИАЭ, 1976. Слева И. К. Кикоин



В редакции журнала «Ядерная физика», 1979



Дубна, 1984. На переднем плане П. Нири



Дубна, 1985. Справа Б. М. Понтекорво



Дубна, 1985. Справа Н. Н. Боголюбов



Дубна, 1989. Школа молодых физиков



Дубна, 1986. Слева Н. Н. Боголюбов, в центре Д. В. Ширков



Последняя зима в Дубне, 1992. Слева В. А. Смородинская

Уроки Смородинского
(Продолжаем учиться)

Б. Захарьев

Не раз уже думал, что надо бы мне (да и всем нам) повнимательнее вглядываться в окружающих, чтобы лучше разобраться в нашей жизни, а тем самым понять и самих себя, да и весь мир. Сколько ценного человеческого опыта, на приобретение которого затрачено много физических и душевных сил, мы не воспринимаем по своей небрежности.

Эта заметка — плод очередной попытки глубже понять своего первого научного руководителя. Пусть я недостаточно знал Якова Абрамовича (не был так близок к нему, как хотелось бы), но мне следует внести в мозаику его портрета некоторые детали при соблюдении возможной точности. Это, во всяком случае, было поучительно для меня (продолжение школы Смородинского — нескончаемая цепочка влияний добрых дел хорошего человека и полезных предупреждений о возможных просчетах).

Мы с Володей Беляевым попали в дипломники к Я. А. в 1956 г. с казавшегося мне суховатым, порой бездушным лекционно-экзаменационного конвейера физфака МГУ. Это была счастливая идея В. Б. — найти научного руководителя в стороне от студенческой толкучки нашей альма матер (около полутысячи студентов на курсе!)

Наверное, многие, как и мы, испытывали сначала какое-то особенное, трепетно-уважительное, немного влюбленное отношение к своему шефу. В нашем представлении он был с нимбом причастности к волнующе-заманчивой, но для нас еще совсем неясной, загадочной профессии физика-теоретика. Способствовала тому и своеобразная незаурядная внешность Я. А., подходящая, как мне казалось, мыслителю. Мы даже с робостью обращались с вопросами к Я. А. (вопреки правилу: «теоретик должен быть здоровым и нахальным»). Но в процессе дипломной работы нас выручал неограниченными консультациями молодой сотрудник Я. А. Леня Максимов, ставший фактически нашим спасителем.

Контраст перехода от учебной к научной работе проявился и в отзыве Я. А. на защите нами дипломов, когда вместо разбора деталей формул и результатов расчетов он подчеркнул наш интерес к физике (совершенно необычный для университета критерий оценки). Не знаю, был ли действительно этот наш интерес так заметен со стороны, но осталось сильное впечатление на всю жизнь как указание, что главный стимул к труду должен быть внутренним.

С тех пор у нас неоднократно были поводы убедиться в этом. Нестандартный отзыв, помимо его благотворного влияния на нас, характеризовал и самого Я. А. Тяга к физике, к поиску красивых новых результатов, эффектов, моделей по закону сохранения информационного импульса (продолжения учителя в своих учениках) передалась нам и осталась доминантой отношения к науке. Теперь мне кажется, что с общефилософской точки зрения это пробивала себе дорогу в нашем сознании фундаментальная потребность природы, создавшей разум и наши чувства для максимально эффективного служения ее законам (физическим и пр.). Этими законами нам предначертано, содействуя друг другу, согласованно трудиться для достижения «целей природы», с которыми естественно должны совпадать и наши коллективные, и личные цели. Такое соответствие регулируется поощряющими ощущениями

удовлетворенности, счастья или подавляющими отрицательными эмоциями. А наблюдаемые здесь отклонения — это просто «трудности роста самоорганизации» материи, наша социальная недоразвитость. Нет желанной гармонии даже в научном мире, мешает узость нашего обзора, если смотреть сквозь амбразуру неразумного (во вред себе) эгоизма: личного, группового, национального[1)].

Не было полного взаимопонимания и между нашими школами физиков. Здесь Я. А. выпала благородная роль осуществлять связь между разными научными коллективами. И мы с Беляевым явились еще одной ниточкой, протянутой между школами Н. Н. Боголюбова к Л. Д. Ландау. Так Я. А. взял нас в свой сектор теоретической лаборатории ОИЯИ, подтолкнул сдавать экзамены теоретического минимума Ландау и предложил поработать под руководством Я. Б. Зельдовича над μ-молекулярными задачами.

Произошло это так. Первое время мы то и дело обращались к Я. А. за задачами, и он называл нам то одну, то другую. Мы набрасывались на соответствующую литературу, например, на проблему несохранения четности. Это было очень полезно для расширения нашего кругозора, но посильных нам интересных задач не находилось. Да и при загруженности Я. А. массой других забот ему некогда было уделять нам много внимания. Но и при самой идеальной заботливости лучшего решения, чем передача нас на время Я. Б., трудно себе представить. И за это мы так благодарны Я. А. Тут проявилась его характерная черта — он не эксплуатировал нас (что распространено еще в науке). Так получилось, что за десять лет пребывания в секторе Я. А. и затем тридцать лет работы в одной лаборатории (ЛТФ ОИЯИ) у нас не было с Я. А. совместных публикаций. Даже в статье, написанной по результатам дипломной работы об оценке двойного β-распада Ca^{48}, где ему принадлежала постановка задачи, он не стал соавтором. Многие и сейчас могли бы позавидовать нашей научной свободе у Я. А. У нас было полное убеждение, что единственным критерием выбора направления исследований может быть лишь качество ожидаемых результатов. Во всяком случае, ни малейших намеков на ограничения со стороны Я. А. мы не замечали. При этом само собой разумелось, что интенсивность наших поисков должна быть максимальной. Не было никаких препятствий и нашей самовольной работе по ядерной сверхтекучести. Позднее мне пришлось столкнуться и с другим отношением у виртуальных и реальных начальников. Некоторая разбросанность, поверхностность, которую многие отмечали у Я. А., имела свою сильную сторону: туманность его рассуждений и докладов всегда была с блестками интригующих вопросов, обещающих красивые результаты. Выступления Я. А. на семинарах и лекциях никогда не были скучными. Невольная свобода барахтаться без умения плавать в океане физических проблем, куда бросал нас Я. А., способствовала выработке самостоятельности. Его легкость подхода к проблемам не давала нам утопать в тяжеловесных тупых расчетах и скучных деталях, когда в чаще формул теряется общий взгляд на физику. Возможно, что от недостаточной глубины контактов что-то теряли обе стороны. Но и тут был свой положительный аспект влияния Я. А. В дальнейшем в своей личной практике научного руководства я использовал (в поиске оптимума) другой подход, и часто время, затраченное даже на слабых учеников, с лихвой окупалось: неопытность младшего коллеги способствовала укреплению веры в свои силы старшего, а объяснение «простых» вещей приводило к лучшему их пониманию мной. Правда, с другой стороны мои подопечные, возможно, проигрывали при этом в самостоятельности. Так что вечная проблема отцов и детей не теряет своей актуальности.

[1)] По признанию журнала Math Nohas оплата математиков одинакового уровня в мире отличается в 1 000 раз!

Когда Симонов и Бадалян с успехом применили метод K-гармоник к описанию связанных состояний ядер, возникла проблема обобщения метода на задачи непрерывного спектра. Об этом мы несколько раз говорили с Я. А., здесь мне помогла школа многоканальной квантовой физики, полученная при общении с С. С. Герштейном во время работы над задачами Я. Б., а также совместные исследования со Скиффом, Соколовым и Амирхановым задачи трех тел многоканальными методами. В это время было увлечение уравнениями Фадеева и многоканальной теорией ядерных реакций Фешбаха. Вместе с В. Д. Эфросом, В. П. Жигуновым нам удалось найти новый подход к описанию реакций самого общего типа, решив тем самым и проблему рассеяния для K-гармоник, и создания единой теории реакций, обобщающей формализм Фешбаха на реакции с перераспределением частиц. Это был один из важнейших успехов, к которому меня подтолкнул и Я. А. Стало ясно, как можно из простых блоков строить волновые функции любых сложных многочастичных квантовых систем.

К этому времени я уже работал в секторе Я. А. около десяти лет, и хотя я рассказывал ему о наших новых результатах и он одобрял их, мне сообщили о критическом замечании Я. А. в мой адрес на экспертной комиссии. Как я теперь понимаю, научные сотрудники часто допускают куда более серьезные выпады по отношению к уважаемым ими коллегам, но по закону субъективного восприятия мне показалось это опасным. Я решил не испытывать дольше терпение Я. А. и перешел в другой сектор. Для меня остался загадкой парадокс совпадения моих научных успехов с сигналом о некотором недовольстве шефа. Возможно, занятый своими собственными заботами, он не придал должного значения нашим результатам. Для меня же в этот момент было легче преодолеть внутренний дискомфорт, связанный с административной перестройкой. Заключительная речь на всесоюзной конференции в Риге была наполовину посвящена и работе; в США по нашим результатам Мейстер защитил докторскую диссертацию, начался поток ссылок в литературе, а я отразил свое новое понимание нерелятивистской квантовой теории в первой монографии, идеи которой одобрил в дискуссии Фаддеев (хотя наш метод «конкурировал» с его уравнениями).

Так что за удачный выбор времени выхода из сектора я благодарен Я. А. Разошлись мы (во всяком случае внешне) самым спокойным образом. Другой начальник не преминул бы прибегнуть к репрессивным мерам, но не Я. А. Наши отношения стали даже более уважительными. Я продолжал ещё тридцать лет докладывать о всех своих значительных результатах, а он относился к таким беседам с бóльшим вниманием, чем прежде. Думаю, мы оба могли гордиться столь цивилизованным выходом из кризисной ситуации, хотя его заслуга больше. Пожалуй, в дальнейшем частично это оказало на меня положительное влияние. Своим ученикам я предоставлял полную свободу в выборе степени сотрудничества со мной (и даже поощрял контакты с другими группами). У нас в лаборатории были примеры, когда молодым сотрудникам административно запрещалось даже обсуждать свою работу с «посторонними»! Я рад, что мы с Я. А. были свободны от этих средневековых пережитков. Позднее принцип свободного перехода из группы в группу был провозглашен в ЛТФ официально, возможно здесь проявилась и благотворное влияние Я. А., хотя точно никому не известно равновесие между оптимумом научной свободы и анархии.

Одной из первых задач, на которую нас нацелил Я. А., была обратная задача, но тогда и мы, и он упруго рассеялись от нее. Через много лет мне с молодыми сотрудниками (Ниязгулов, Рудяк, Пивоварчик и др.) удалось понять, что главное достоинство этого формализма не в возможности численного восстановления реальных

35 Зак. 198

сил, а в множестве точно-решаемых моделей, позволивших нам по-новому взглянуть на нерелятивистскую квантовую теорию. Мы научились управлять уровнями связанных состояний, сдвигать произвольные из них по энергии и перемещать локализацию волновых функций в пространстве, менять по выбору ширины резонансов и т. п. Оказалось возможным качественно предсказывать форму потенциальных возмущений для желаемого изменения наблюдаемых свойств квантовых систем даже без формул и компьютеров, эти результаты вошли в серию моих обзоров «Уроки квантовой интуиции» (ЭЧАЯ т. 21, № 4, 1990; т. 23, № 5, 1992; т. 25, № 6, 1994) и в одноименную книгу (в печати в издат. отделе ОИЯИ). Они созвучны научному подходу Я. А., которому было свойственно желание с лету ухватить суть новых физических закономерностей. Он одобрил и идею созыва школ-семинаров «Секреты квантовой и математической интуиции», и в первой сам принял участие (четвертая такая школа состоится в Дубне летом 1995).

Мне представляется, что Я. А. был одержим идеей объять необъятное море научных новинок. Одно время он был у Курчатова информатором по научной литературе. Его часто можно было видеть с охапкой научных и научно-популярных журналов, которые он, по-видимому, регулярно просматривал. Он любил сообщить о какомнибудь свежем открытии из самых разных областей. Это был прекрасный пример, не дававший застаиваться большому научному коллективу. Я так пока и не собрался реализовать давнишнее желание выступать на семинарах с изюминками чужих новых работ по примеру Я. А. (никак не хватает времени и на свои оригинальные результаты, хотя я верю, что можно найти здесь оптимальное соотношение). Но вот уже несколько месяцев взялся просматривать Science News, Phys. Today, New Scientist и договорился с библиотекой о копировании и вывешивании в ЛТФ избранных сообщений для информации сотрудников и наших гостей. Посмотрим, долго ли я пронесу эту эстафетную палочку, перехваченную у Я. А.

Я. А. состоял во многих редакциях журналов и издательских советах, сделал много полезного на этом поприще. Но к моим книгам он относился «ревниво» (я и себя иногда ловлю на недоверии к своим ученикам). Правда прохождение первой моей книги через редсовет Атомиздата он прозевал, как позднее мне признался. Зато заявку на вторую направил Иоффе, который заявил, что издавать книгу об обратной задаче вообще не нужно, хотя на эту тему постоянно публиковались обзоры. В доказательство ошибочности мнения рецензента скоро появилась монография Шадана и Сабатье, перевод которой я взялся редактировать в издательстве «Мир». Хотя таким образом мы утратили первенство, но в этом была и своя положительная сторона. Мы улучшили свою книгу, освободив ее от многих стандартных деталей, вошедших в монографию наших французских коллег. Через несколько лет она-таки успешно проскочила через редсовет опять же без ведома Я. А.

Позднее Я. А. с похвалой о ней отзывался, хотя с обратной задачей так полностью и не примирился. А опыт преодоления всевозможных редакторских и экспертных барьеров сделал меня приверженцем принципа наибольшего благоприятствования, когда сам приобщился к оценкам чужих работ.

Поучительное общение с Я. А. продолжалось и при работе над этой статьей: когда я расспрашивал о ней многих, с кем ему приходилось сталкиваться, то по реакции на мои вопросы мне становились понятнее сами опрашиваемые. Вообще мемуары — мое хобби (я прочел их целую тысячу). Многих своих близких я подтолкнул написать воспоминания. Это оказывалось интересным и для них. Жаль, что самого Я. А. я недостаточно настойчиво уговаривал. Правда, один раз, на моем 50-летнем юбилее, я упросил его рассказать о годах его учебы на лабораторном семинаре. А надо было приложить усилия — достать магнитофон, видеокамеру и договориться с Я. А. о нескольких сеансах устных мемуаров. Пусть это будет нам уроком: впредь

бережливее относиться к богатствам жизненного опыта, столь необходимого для само-(и общечеловеческого) постижения.

Но при всех недостатках сделанного, я рад тому, что и в процессе писания этих строк я еще немного приблизился к воссозданию образа моего Я. А. И мне верится, что чем более точно передать свои личные впечатления, тем больше вероятность заинтересовать ими других.

5 января 1995

Рождение «Диалога»

Ю. П. Курлапов, О. И. Мельникова

«Ничего на свете лучше нету,
чем учиться в “Диалоге” летом».

«Наш ковер — паркет из “Диалога”,
наши стены — стены “Диалога”,
наша крыша — крыша “Диалога”,
ничего не просим мы у Бога».

Надписи на автобусной остановке
14 *июля* 1996 *г.*

Представьте себе эластичный мячик, у которого срезаны различные грани. Бросая его на пол, вы знаете, что он обязательно подпрыгнет, но никогда не угадаете, в какую сторону. С этого мячика, с этой нетрадиционной игрушки, которыми увлекался Яков Абрамович, началась одна из наших регулярных встреч осенью 1990 года по обсуждению идеи Школы нетрадиционного обучения. Занятия в ней должны быть похожи на игру с таким мячиком. Учитель бросает вопрос, не зная однозначного ответа на него и надеясь только на быстроту реакции, свежесть взгляда и «объемность» мышления учеников. Потом, если удалось поймать «мячик», необходимо проанализировать, как это получилось. Создать и описать алгоритм «ловли мячика».

Сейчас многие дети играют разноцветными пластмассовыми спиралями. Тогда, в 90-м году, мы впервые увидели такую игрушку, только металлическую, в руках Якова Абрамовича. Мы пили чай на кухне. Вдруг Яков Абрамович сдвинул чашки в сторону и стал носить книги на кухонный стол в непонятно большом количестве, укладывая их лесенкой. Мы не понимали, для чего это нужно. Затем он поставил пружинку основаниями на разные ступеньки — и она вдруг «пошла». Яков Абрамович был очень доволен, глядя на наше изумление. «Вот бы создать математическую модель этого процесса. Интересная задачка для ребят!»

С начала 60-х годов в Дубне работала физико-математическая школа, в которой читали лекции крупные ученые и вели семинары молодые сотрудники ОИЯИ. Яков Абрамович с удовольствием выступал перед старшеклассниками. И по прошествии стольких лет многие помнят его блестящие лекции по физике, астрономии и математике.

Почему Яков Абрамович шел в школы? Крупный ученый, он всегда находил время для детей. Один из активных популяризаторов науки, он очень хотел заинтересовать подрастающее поколение процессом познания окружающего мира. Вокруг столько интересных проблем и задач, требующих решения, столько многообещающих идей и так мало времени на их решение. И поэтому Яков Абрамович щедро дарил свои идеи молодым. Радовался, когда они находили свой путь в науке.

Летом 1989 года в Дубне прошла первая Международная компьютерная школа, организованная московскими учеными и педагогами. Авторам этой статьи довелось принять в ней участие. Целью МКШ был поиск новых компьютерных технологий, применимых в общеобразовательной школе. Учебный процесс был организован

следующим образом: преподаватель предлагал задачу, при решении которой необходимо было изучить неизвестный ранее материал и обязательно использовать компьютер. Ученики добровольно объединялись вокруг заинтересовавшей их темы и преподавателя. Такое объединение носило название «проект».

Нам понравилась технология. Равноправное сотрудничество школьников, студентов и преподавателей дало необычный эффект — дети очень хотели учиться и работать. Такое общение с ребятами дало много как им, так и нам. Захотелось организовать для дубненских детей что-то свое, подобное этому. Мы начали искать единомышленников. Нужна была концепция Нетрадиционной Школы. В процессе поиска забрели к Смородинским. Вот тут Яков Абрамович и бросил нам мячик (см. выше).

«А что если нам назвать эту школу Школой юных исследователей?» — предложил Яков Абрамович. «Диалог», — добавил Курлапов. «Международная — как и наш город», — добавила Мельникова. Так школа обрела название, вполне соответствующее ее сути, идеологии, смыслу и главному дидактическому средству — Международная школа юных исследователей «Диалог».

Удивительным человеком был Яков Абрамович. Хотя чему здесь удивляться? Многие поколения российских ученых-интеллигентов считали своей главной задачей не личные успехи, звания и регалии, а именно подготовку смены. Павлов, Мечников, Менделеев, Ландау, Боголюбов, Шапиро, Мещеряков, Говорун — этот ряд может быть бесконечен, ибо каждый из них создал ШКОЛУ. Яков Абрамович помог рождению Международной школы юных исследователей «Диалог», главной задачей которой была и остается задача поиска, выявления и максимального развития талантливых подростков, которые в будущем, получив фундаментальное образование, смогут решить многие проблемы современной науки и человеческого общежития.

Первая сессия МШЮИ «Диалог» состоялась в январе 1991 года в гимназии номер восемь. Двадцать преподавателей, среди которых самые талантливые учителя школ, научные сотрудники ОИЯИ, научно-исследовательских институтов оборонной промышленности, институтов Академии наук и студенты элитарных московских вузов в течении двух недель вели свои проекты. Принимали в ней участие и сотрудники журнала «Квант», которых вовлек в этот процесс Яков Абрамович.

Более сотни школьников из Дубны, Москвы, Болгарии в течении двух недель бились над проблемами физики, математики, экономики, лингвистики, психологии, выступали с докладами, участвовали в конференциях и физ-мат боях (экое слово агрессивное было в ходу) и не считали это трудом, напротив — удовольствием. С тех пор прошли годы, но главная идея МШЮИ «Диалог» сохранилась и получила развитие. Каждый человек — тем более ребенок — есть кладезь талантов, которые могут и угаснуть. Наша задача — помочь им развиться, вдохнуть в каждого ученика уверенность, что он талантлив от природы и доказать ему, что зарывать свои таланты есть великий грех. Человек — высшее творение Природы, единственный из живых существ, которому дано СО-Знание. А Знание он должен добывать собственным нелегким трудом. Мироздание — неисчерпаемо, следовательно, исследователи будут всегда. Яков Абрамович Смородинский наверняка не знал, «как слово отзовется». Не знаем и мы. Потому что Школа «Диалог» развивается уже во многом благодаря идеям тех учеников первого «Диалога» (а ныне студентов и аспирантов), для которых она стала стилем, а может быть, в чем-то и смыслом жизни.

В 1995 году ОИЯИ учредил по предложению преподавателей МШЮИ «Диалог» почетные дипломы:

имени Я. А. Смородинского для учащихся школ, добившихся наилучших результатов в изучении физики;

имени Н. Н. Говоруна для учащихся школ, добившихся наилучших результатов в изучении информатики;

34 Зак. 198

имени Ф. Л. Шапиро для учащихся школ, добившихся наилучших результатов в изучении математики.

Пройдут годы и, может быть, сегодняшние мальчишки и девчонки, удостоенные этих дипломов, составят цвет науки и продолжат традиции российской интеллигенции, ярким представителем которой был Яков Абрамович Смородинский.

О Якове Абрамовиче

П. Нири

Якова Абрамовича я знал в основном ребенком. То есть это я был ребенком, а Якову Абрамовичу было за шестьдесят. Спустя годы, когда задача построить мое умственное окружение перешла ко мне самому, я вдруг понял, какой интеллектуальной роскошью было общение в квартирах моего детства, где разговоры по существу были нормой, а не достойным празднования исключением. Среди многочисленных интеллектуальных маяков этого ландшафта Яков Абрамович был одним из наиболее постоянных и ярких.

Яков Абрамович вел себя настолько одинаково с детьми и взрослыми, что иногда это у меня вызывало ощущение солидарности. Это было, конечно, связано с его уникальной любознательностью и умением замечать и удивляться самым разным вещам и явлениям вокруг. Однажды в Дубне, придя к нам в гости с Валентиной Александровной, он подарил мне шину от игрушечной машины, которую он подобрал на улице. Эта шина до сих пор висит на моем брелоке. В другой раз он пришел с пластмассовой мухой для рыбаков, отлично пригодной для того, чтобы нервировать маму расположением ее (мухи) на различных подоконниках. Мне кажется, что его радовала чудесная бессмысленность этих извлеченных из своего контекста объектов.

Чуть позже Яков Абрамович стал делиться головоломками, которые он мог потреблять в неограниченных количествах. Головоломки были и в виде задач (математических, лингвистических, каких угодно), на решение которых мне редко хватало терпения, не говоря уже об уме, и в виде объектов, которые нужно было преобразовать, расцепить, соединить, скомбинировать, начиная с танграма и кончая различными замками и разновидностями кубика Рубика. Иногда мама привозила ему такие предметы из Венгрии, а теперь, когда на Западе я вижу магазины, полные различных головоломок, мне становится грустно при мысли о том, что Яков Абрамович наконец смог бы попасть во все эти магазины. Правда, ему ничего не стоило произвести предметы, обладающие такими же интересными свойствами, из подручных средств. Один раз он сделал из бутылки венгерской палинки, корковой пробки, четырех вилок и булавки что-то вроде карусели, которая вертелась исключительно долго благодаря большому весу и малому трению. Другой раз, соскучившись на каком-то банкете в Одессе, он изготовил серию слонов из проволочных сеток, державших пробки на бутылках с шампанским.

Еще позже, когда я учился на химическом факультете, Яков Абрамович меня поражал своей осведомленностью о последних статьях, опубликованных, казалось, в любом журнале органической химии или биохимии. О большинстве этих исследований я никогда не слышал, хотя иногда делал вид, но зато неоднократно пользовался возможностью обсудить химию краун-эфиров, которой я тогда начал заниматься, так как он был вполне в курсе развития этой области. Как это ему удавалось, я не понимал, но еще хуже понимал, как ему, которого тогда и еще долго вообще не пускали на Запад, могло быть известно такое количество только что вышедших художественных альбомов.

Удивительным образом сохраняя этот кругозор гуманиста в советских условиях, Яков Абрамович мог быть крайне нетерпим к проявлениям провинциализма и ортодоксии, какими бы незначительным они ни казались в условиях политической

системы, в которой они были частью официальной идеологии. Он ненавидел бороды, и на мой вопрос, почему, ответил «потому что это идиотская дикость». Зная, что он обращает мало внимания на одежду и грим, я удивился. Теперь, когда в определенных ситуациях борода и в самом деле играет роль сигнала опасности какой-нибудь племенной идеологии на религиозной или национальной почве, я думаю, что у Якова Абрамовича при виде бороды зажигались такие сигналы, сохраненные из более раннего времени.

«Нам не дано предугадать, как наше слово отзовется...»

И. Пронина

Я никогда не была знакома с Я. А. Смородинским и не являюсь исследователем его вклада в естественные науки. Несмотря на то, что с некоторых пор я приобщена к таким понятиям, как кварки, лептоны и бозоны, мои профессиональные интересы далеки от физики. Но недавно мне пришлось убедиться в правильности одного предположения Якова Абрамовича и приложить немало усилий, чтобы ввести его в научный оборот.

По профессии я искусствовед и уже свыше 20 лет работаю в Третьяковской галерее. С университетских пор я испытываю гипнотический интерес к искусству Павла Николаевича Филонова (1883–1941) — известного теоретика и творца русского авангарда начала XX века.

Первый показ картин Филонова для широкой публики после 1933 г. сумели устроить ученые-физики Новосибирского Академгородка и Московского института им. И. В. Курчатова, пользовавшиеся в советское время определенной индульгенцией на свободомыслие. По воспоминаниям многих художников и историков искусства, выставки 1967 г. в Новосибирске и 1968 г. в Москве имели эффект сильного потрясения, оказавшего глубокое и долгосрочное влияние на сознание творческих умов шестидесятников. Приуроченная к 50-летию Октябрьской революции, экспозиция работ художника, имевшего в своей биографии — к счастью для устроителей — страницы революционного прошлого, запомнилась благодаря уникальному событию: был выпущен каталог с биографией художника, текстом его теории и 65 репродукциями!

К сожалению, в каталоге осталось имя лишь одного человека — ответственного за выпуск М. Я. Макаренко. Для историков отечественной культуры сейчас, по прошествии свыше 30 лет с тех выставок, крайне интересно узнать подробности и обстоятельства их проведения. Возможно, кто-то из участников описываемых событий откликнется. Пишу эти строки здесь, в сборнике воспоминаний о Я. А. Смородинском, не случайно, поскольку рядом с именем Ученого уже однажды прозвучало имя Художника и вот при каких обстоятельствах.

В 1986 г. в журнале «Нева» № 10 были опубликованы воспоминания сестры художника и хранительницы его наследия Евдокии Николаевны Глебовой. Там есть строки: «У брата есть работа, которая значится как “Первая симфония Шостаковича”. Внизу картины, на поле, рукою брата написано “Без названия”. Даты нет. Не было ее и в каталоге. Но несколько лет тому назад появилась дата — 1935 г. И вот почему. На этом же поле написано “1-я симфония Ш-ча” и имеются какие-то цифры. Профессор-физик Яков Абрамович Смородинский, увидев их, сказал, что он по этим записям установит дату написания картины. Действительно, вскоре он мне написал из Москвы, что записи точные — это было полное лунное затмение в 1935 году».

Странно, но эта датировка Я. А. Смородинского, признанная Е. Н. Глебовой, осталась незамеченной всеми исследователями творчества Филонова, хотя к этим воспоминаниям все относятся как к важному источнику биографии художника. Тогда не обратила на нее внимание и я. К тому времени «Симфония Шостаковича» Филонова стала довольно известна, ее долго демонстрировали на выставке

Москва—Париж (1981), репродуцировали в научной и популярной литературе и всегда с разными датами: 1925, 1925–1927, 1927, около 1930.

Вероятно, следует напомнить, что в середине 1980-х гг. у высшего начальства от культуры еще существовала неявная позиция по поводу авангардистов, эмигрантов и им подобных лиц... Поэтому, хотя шедевр Филонова хранился в нашем музее с 1977 г., когда отъезжающий из СССР известный коллекционер Георгий Дионисович Костаки передал часть своего собрания в дар будущему музею современного искусства (ГКГ СССР), еще до начала 1990-х гг. доступ отечественных исследователей к коллекции Костаки был практически закрыт — сначала по идеологическим, а затем по техническим причинам. У Г. Д. Костаки картина Филонова появилась, вероятно, вскоре после 1968 г. Заботами собирателя она была очень профессионально смонтирована на специальный планшет под стекло, так как написана она маслом по бумаге, а под воздействием масляных красок и света бумага просто «сгорает», т. е. желтеет и становится очень хрупкой. Поэтому до 1995 г., я уверена, мало кто из исследователей и реставраторов видел те надписи на полях картины, на которые обратил свой пытливый взор Яков Абрамович.

В 1995 г. Третьяковка готовила произведения из коллекции Костаки к большой зарубежной выставке. Впервые в Афинах, на исторической родине коллекционера, должны были экспонироваться обе части разделенного в 1977 г. собрания. И когда в музее наконец-то сняли с филоновской работы раму и стекло, мы увидели нечеткие карандашные надписи на 1,5-сантиметровых полях картины: *Начал* 25 *сентября* 7 *ч* 50 *мн* 1 *ч* 55 *м*, 19 *января — затмение* 15–39 18 *полное затм.*, *Шестакович* 1-*я симф.* Нам захотелось понять, что же значат все эти цифры и слова, случайно ли они здесь появились или несут в себе разгадку замысла художника.

И тут физики снова пришли на помощь. Профессор О. Л. Вайсберг из ИКИ РАН дружелюбно выслушал наши вопросы о «всех затмениях XX века» и вскоре дал обнадеживающий ответ о полном лунном затмении, наблюдавшемся в Европе 19 января 1935 г. с 15.03 по 16.31 по Гринвичу.

Так мы повторили изыскания Якова Абрамовича Смородинского, сделанные им в 1968 г.

Но следуя законам нашей науки, нам предстояло также выяснить:

1. Авторство всех надписей — название «Шестакович 1-я симф.» оспаривалось самыми авторитетными учеными. Зарубежные коллеги предполагали, что его дала сама Е. Н. Глебова для удобства каталогизации.

2. Время появления надписей о затмении на картине. Не исключалась возможность, что они могли появиться много позже времени создания произведения, и тогда появившаяся дата ничего не значила.

3. Интересным также было найти объяснение тому факту, что Симфония № 1, опус 10 Д. Д. Шостаковича исполнялась первый раз Ленинградским филармоническим оркестром под управлением Николая Малько 12 мая 1926 г., а Филонов начал работать над картиной, посвященной (?) этому музыкальному произведению, только 25 сентября какого-то года.

Не будем здесь воспроизводить ход наших поисков — этому посвящена статья в сборнике IV конференции по экспертизе и атрибуции произведений искусства (М.: Магнус Арс, 2000). Отметим только то, что нам удалось положительно ответить на все вопросы и ввести в научный оборот новую дату — 1935, предложенную впервые профессором физики и ценителем искусства Яковом Абрамовичем Смородинским. Надеемся, что рассказ об этом эпизоде внесет новые краски в тот образ ученого, который сохраняют в своих сердцах его коллеги и друзья.

Малая энциклопедия о Я. А., или о Я. А. от А до Я

Ю. А. Данилов

Поводом для создания приводимого ниже текста послужило торжественное и радостное событие — 70-летие Якова Абрамовича Смородинского. На заседание Научного совета Отделения молекулярной физики Института атомной энергии им. И. В. Курчатова 30 декабря 1987 года поздравить юбиляра пришли его многочисленные друзья, коллеги, ученики и сотрудники. Было весело, тепло и непринужденно.

Подлинность всех фактов, упоминаемых в «Малой энциклопедии», подтвердил в присутствии всех участников и гостей заседания наивысший авторитет — сам Яков Абрамович.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность редактору газеты «Советский физик» Марине Евгеньевне Халезиной за неоценимую помощь, без которой номер газеты, в которой был опубликован текст «Малой энциклопедии», вряд ли был бы найден.

Аттрактабильность странная — непостижимая способность Якова Абрамовича привлекать к себе внимание людей с самыми различными интересами — от изобретателей вечного двигателя и малолетних и великовозрастных правонарушителей до искусствоведов, историков и философов, не говоря уже о физико-математических коллегах.

Библиомен — высшая и последняя стадия библиофильства, доходящая до библиомании; человек-кентавр, сросшийся вместо коня с книгой.

Великое Объединение — физический аналог легенды о Ноевом ковчеге для фундаментальных взаимодействий. Предмет неусыпного внимания Я. А.

Гуингмы — персонажи из «Путешествий Гулливера», разумные существа, внешне не отличимые от наших лошадей, подарившие миру немало мыслителей. (Отсюда усеченная форма поговорки-риторического вопроса: «Что же ты, лошадь?» Подразумевается продолжение: «...не стал гуингмом?»). Предсказали квантовый эффект Холла. В работах Я. А. не упоминаются.

Дау — один из создателей известного курса теоретической физики, предложивший Я. А. на вступительных экзаменах в аспирантуру трудную задачу в надежде, что тот не сумеет с ней справиться. Я. А не оправдал надежд Льва Давидовича, блестяще решив предложенную задачу.

Евгений Михайлович — другой создатель известного курса теоретической физики, отвечавший на вопрос о том, как он может работать дома, не имея под рукой нужных книг: «А на что Яшина библиотека?»

Жаропрочная сверхпроводимость — сверхвысокотемпературная сверхпроводимость (мечта многих), самое яркое перо в хвосте жар-птицы.

Загранкомандировка — поездка ученого коллеги за пределы Ойкумены, откуда к Я. А. приходит обширная корреспонденция.

Инцидент (англ. Incident) — дорожное происшествие, едва не ставшее аварией (англ. accident), в которое попали по дороге из Москвы в Дубну Я. А. вместе с П. А. М. Дираком.

Йеху — упоминаемые в «Путешествиях Гулливера» человекообразные существа, значительно уступавшие по своему умственному развитию гуингмам. Умственная отсталость йеху ярче всего подтверждает одно наблюдение Гулливера: те упорно отказывались читать библиотечку «Кванта», даже книжку Я. А. Смородинского «Температура», издание второе.

Кватернионы — гиперкомплексные числа, придуманные сэром Вильямом Роуэном Гамильтоном специально для того, чтобы Я. А. мог разъяснить академику Котельникову, чем в конце прошлого века занимался в Казани его батюшка, разрабатывая винтовое исчисление Котельникова.

Луи де Бройль — последняя по времени любовь Я. А. наиболее известный в физических кругах представитель старинного аристократического рода (маркиз). Подобно Генриху Мореплавателю питал непреодолимое пристрастие к волнам, а будучи материалистом, уделял особо внимание волнам материи, за что в 1933 году был удостоен Нобелевской премии.

Молод да смород, в солидных летах да Смородинский — уточненный вариант поговорки «Молод да смород, стар да басок», вывезенный фольклорной экспедицией Института русского языка и литературы из последней поездки на русский Север.

«На самом деле» — любимое речение Я. А. во время выступлений на семинарах, позволяющее ему с легкостью узурпировать права Господа Бога, который один лишь знает, как обстоит дело на самом деле.

Оптина пустынь — известная некогда обитель Козельского уезда Калужской губернии, насельником которой был старец Амвросий, прототип старца Зосимы. Недавно в Оптиной пустыни побывал Я. А. Ранее ее посещали Л. Н. Толстой и Ф. М. Достоевский.

***P*-адические (читается как «пэ-адические») числа** — последнее по времени увлечение Я. А., с которым он изменил кватерионам и октанионам.

Рики-Тики-Тави — известный персонаж не менее известного произведения Редьярда Киплинга, примеру которого Я. А. неукоснительно следует, расправляясь с авторами плохих школьных учебников физики.

Сильный физик — физик, вес работ которого превосходит его собственный физический вес. (Примечание: вес работ оценивается не числом публикаций и не числом упоминаний в Citation Index, а по гамбургскому счету.)

Трифуркация — терминологический вклад Я. А. в тезаурус теории бифуркаций.

Уравнения волчка — уравнения классической задачи механики, в решении которой мужской разум был посрамлен гением С. В. Ковалевской. Найти квантовый аналог волчка Ковалевской не удалось даже Я. А.

Фейнмановские лекции по физике — курс лекций по общей физике, прочитанных известным шутником («Вы должно быть шутите, мистер Фейнман?») и специалистом по игре на бонго и выпущенных на русским языке под редакцией Я. А.

Хронос (греч.) — то, чего Я. А. хронически не хватает.

Цветок Кента — сорт яблок, удар которых о надлежащую голову способствует открытию законов природы. В последнее время цены на Цветок Кента значительно возросли в связи с бумом по высокотемпературной сверхпроводимости.

«Чушь собачья!» — вежливое замечание, свидетельствующее о неполном согласии Я. А. с собеседником.

Шрёдингер — крупнейший собственник, превративший задачу Штурма Лиувилля в задачу на собственные значения (собственные функции) для уравнения

собственного имени. Я. А. нашел собственную тему в царстве Шрёдингера: интегрируемые потенциалы низших степеней.

Щель — начальная стадия бреши, проделываемой настойчивыми усилиями исследователей в проблеме, казавшейся поначалу неприступной. Выискивание щелей — высокое искусство, постигаемое только упорной тренировкой при наличии прекрасных начальных данных. Подробности см. в материалах к биографии Я. А.

Ылмаз Вердиев — один из представителей многочисленной группы физиков, с полным основанием называющий Я. А. «Муаллим», «Учитель» «Сэнсэй».

Эйнштейн — предтеча академика Логунова по релятивистской теории гравитации, автор четырехтомного собрания научных трудов, выпущенных издательством «Наука» под редакцией Я. А.

Ю — 1. Английский эквивалент идиомы «Эй ты! Это я вам говорю!» 2. Обычное обращение (в русском варианте) Я. А. ко всем коллегам, младшим и старшим его по возрасту.

Янг (Yang) — лауреат Нобелевской премии, американский физик китайского происхождения, фамилия которого пишется почти так же, как фамилия Юнг (Young) одного из создателей волновой теории света, занимавшегося на досуге расшифровкой египетских иероглифов и танцами на канате.

Статьи Я. А. Смородинского, опубликованные в научно-популярных журналах

1. Статьи Я. А. Смородинского, опубликованные в журнале «Наука и жизнь»

1. Что знают и что пытаются узнать об элементарных частицах? 1968. № 4. С. 56; 1968. № 5. С. 18; 1968 № 6. С. 16.
2. Есть ли волны гравитации? 1969. № 11. С. 51.
3. Подобие в природе и фундаментальные постоянные. 1970. № 10. С. 79.
4. Рассказ о замечательном физике. 1980. № 6. С. 79.
5. Учитель и ученики. (Рецензия на книгу «Воспоминания о И. Е. Тамме», М.: Наука, 1981). 1982. № 7. С. 59.
6. Родственники фотона. 1984. № 2. С. 100; 1984. № 3. С. 64; 1984. № 4. С. 36.

2. Статьи Я. А. Смородинского, опубликованные в журнале «Природа»

1. Альберт Эйнштейн и его значение в развитии физики. 1956. № 6. С. 23.
2. Пространственная структура атомного ядра. 1959. № 3. С. 3.
3. Четыре нейтрино. 1963. № 7. С. 54.
4. Спектры элементарных частиц. 1965. № 2. С. 2.
5. Физика на рубеже нашего века. 1970. № 4. С. 62.
6. Фантастический мир супергеометрии. (Рецензия на книгу Дж. А. Уилера «Предвидение Эйнштейна», пер. с нем., М.: Мир, 1970). 1970. № 10. С. 112.
7. Кеплер и современная физика. 1971. № 12. С. 59.
8. Из чего состоит протон? 1976. № 2. С. 10.
9. Принцип эквивалентности. 1980. № 3. С. 58.
10. Трехмерно ли пространство? 1984. № 2. С. 122.
11. Понять замысел Бога... 1989. № 7. С. 124.

3. Статьи Я. А. Смородинского, опубликованные в журнале «Квант»

1. Рассказ о кванте. 1970. № 1. С. 6–15.
2. Геометрия столкновений. (Совместно с Е. Л. Сурковым). 1970. № 5. С. 18–26.
3. Идеальный газ. 1970. № 10. С. 22–27.
4. О периоде обращения спутников. 1970. № 12. С. 31.

5. Движение планет. 1971. № 1. С. 20–27.
6. Закон Ома. 1971. № 4. С. 8–13.
7. Схожие движения. 1971. № 9. С. 15–17.
8. Движение комет и открытие атомного ядра. 1971. № 12. С. 1–7.
9. Инертная масса. 1972. № 3. С. 14–17.
10. Сколько времени идет свет от Меркурия? 1974. № 3. С. 20–23.
11. О силах инерции. 1974. № 8. С. 28–35.
12. Сила Кориолиса. 1975. № 4. С. 2–8.
13. Лобачевский и физика. 1976. № 2. С. 22–27.
14. Сверхтяжелые элементы — открытие или ошибка? 1976. № 11. С. 13–14.
15. Закон всемирного тяготения. 1977. № 6. С. 12–18.
16. Масса атома и число Авогадро. 1977. № 7. С. 20–22.
17. Альберт Эйнштейн (1879–1979). 1979. № 3. С. 4–12.
18. Планеты движутся по эллипсам. 1979. № 12. С. 13–19.
19. Эффект Доплера. (Совместно с А. Урновым). 1980. № 8. С. 12–17.
20. Джеймс Клерк Максвелл. 1981. № 11. С. 11–17.
21. Отрицательный ион позитрония. 1981. № 12. С. 23.
22. Черные дыры. 1983. № 2. С. 11–15.
23. Оптическое изображение и проективная плоскость. 1989. № 9. С. 2–8.
24. Оптическое изображение и проективная плоскость. (Продолжение). 1989. № 10. С. 8–11.
25. Размышления о массе. 1990. № 2. С. 27–30.
26. Закон всемирного тяготения. 1990. № 12. С. 8–13. 51.

4. Новости науки (в «Кванте»)

Этот раздел в журнале «Квант» придумал и вел Я. А. Смородинский. Пользуясь случаем, редакторы выражают благодарность В. А. Тихомировой, сотруднице редакции «Кванта», любезно составившей этот раздел библиографии. (Авторство Я. А. заметок в разделе «Новости науки» в выпусках «Кванта» не указано.)

1. Химическая геометрия. 1983. № 9. С. 21.
2. Самый быстрый пульсар. 1983. № 12. С. 12.
3. Открытие новой частицы. 1983. № 5. С. 38.
4. Самый далекий квазар. 1983. № 1. С. 26.
5. Зачем может понадобиться нейтрино? 1984. № 6. С. 11.
6. Новый вид радиоактивного распада. 1984. № 8. С. 38.
7. Кольца вокруг Солнца. 1984. № 10. С. 6.
8. Гало и лед. 1984. № 11. С. 9.
9. Топ-кварк и тигренок Топ. 1985. № 1. С. 41.
10. Еще один тип радиоактивности. 1985. № 10. С. 14.
11. Новый метр. 1986. № 2. С. 28.
12. Шестидесятиатомный углерод. 1986. № 8. С. 19.
13. Прямое измерение расстояния до квазара. 1987. № 4. С. 19.
14. Антипротон в ловушке. 1987. № 6. С. 7.
15. Самый далекий квазар. 1987. № 12. С. 43.
16. Музыкальные пульсары. 1988. № 6. С. 11.
17. Супервытянутые ядра. 1988. № 11/12. С. 32.
18. Распределение Планка (и реликтовое излучение). 1990. № 8. С. 25.

Книги, вышедшие под редакцией Я. А. Смородинского

1. *В. Паули.* Релятивистская теория элементарных частиц. Пер. с англ. ИЛ, 1947.
2. Нейтронные эффективные сечения элементов. Пер. с англ. Я. А. Смородинского. ИЛ, 1951.
3. *П. Гомбаш.* Проблема многих частиц в квантовой механике. Пер. с венг. С предисл. Я. А. Смородинского. ИЛ, 1952.
4. *А. Зоммерфельд.* Строение атома и спектры. Пер. с нем. М.: Гостехиздат, 1956. Т. 2.
5. *В. Паули.* Мезонная теория ядерных сил. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1957.
6. *И. Перлман*, *Дж. Расмуссен.* Альфа-радиоактивность. Пер. с англ. С предисл. Я. А. Смородинского. ИЛ, 1959.
7. *Г. Бете*, *Е. Солпитер.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Пер. с англ. М.: Наука, 1960.
8. *Е. Вигнер.* Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. Пер. с англ. ИЛ, 1961.
9. Теоретическая физика XX века. Сборник памяти В. Паули. М.: ИЛ., 1962.
10. *Ф. Дайсон.* Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. Пер. с англ. ИЛ, 1963.
11. *Р. Фейнман*, *Р. Лейтон*, *М. Сэнзе.* Фейнмановские лекции по физике. Пер. с англ. С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1965–1967. Вып. 1–9.
12. *А. Эйнштейн.* Собрание трудов в 4-х томах. М.: Наука, 1965–1967. (Сер. «Классики науки»; совм. с Б. Г. Кузнецовым и И. Е. Таммом).
13. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения. Пер. с англ. С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1967.
14. *М. Гарднер.* Этот правый, левый мир. Пер. с англ. С послесл. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1968.
15. *Р. Фейнман.* Характер физических законов. Пер. с англ. С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1968.
16. *Дж. Бернстейн.* Элементарные частицы и их токи. Пер. с англ. С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1970.
17. *М. Гарднер.* Математические головоломки и развлечения. Пер. с англ. С предисл. Ю. А. Данилова и Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1971.
18. *М. Гарднер.* Математические досуги. Пер. с англ. С предисл. Ю. А. Данилова и Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1972.
19. *Льюис Кэррол.* История с узелками. Пер. с англ. С предисл. Ю. А. Данилова и Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1973.
20. *Р. Толмен.* Относительность, термодинамика и космология. С предисл. Я. А. Смородинского. Пер. с англ. М.: Наука, 1974.

21. *М. Гарднер.* Математические новеллы. Пер. с англ. С предисл. Ю. А. Данилова и Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1974.
22. *Г. Штейнгауз.* Задачи и размышления. Пер. с польского. С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1974.
23. *В. Паули.* Труды по квантовой теории. Статьи 1920–1928. (Сер. «Классики науки»). Пер. с англ. С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Наука, 1975.
24. *С. Вейнберг.* Гравитация и космология. Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
25. *В. Паули.* Труды по квантовой теории поля. Статьи 1928–1958. (Сер. «Классики науки»). Пер. с англ. С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Наука, 1975.
26. *В. Паули.* Физические очерки. (Сер. «Популярные произведения классиков естествознания»). С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Наука, 1975.
27. *Э. Э. Эббот.* Флатландия. Пер. с англ. *Д. Бюргер.* Сферландия. Пер. с гол. С предисл. Ю. А. Данилова и Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1976.
28. *С. Эллис, Дж. Хокинг.* Крупномасштабная структура пространства-времени. Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
29. *А. В. Бялко.* Наша планета — Земля. М.: Наука, 1983. (Библиотека «Квант»).
30. Общая теория относительноти. Сб. статей. Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
31. *П. А. М. Дирак.* Пути физики. Пер. с англ. С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Энергоатомиздат, 1983.
32. *П. А. М. Дирак.* Воспоминания о необычайной эпохе. Пер. с англ. С предисл. Я. А. Смородинского. М.: Наука, 1990.
33. *С. Хокинг.* От большого взрыва до черных дыр. Краткая история времени. Пер. с англ. С послесловием Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1990.

Список трудов Я. А. Смородинского

1. *Смородинский Я. А.* Комптон эффект на мезоне // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 840.
   Smorodinsky Ya. A. Compton Effect on Meson // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1940. V. 10. P. 840.

2. *Ландау Л. Д., Смородинский Я. А.* О рассеянии света мезотронами // ЖЭТФ. 1942. Т. 11. С. 35.
   Landau L. D., Smorodinsky Ya. A. On Light Scattering by Mesotrons // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1942. V. 11. P. 35.

3. *Смородинский Я. А.* Тормозное излучение частиц со спином единица // ЖЭТФ. 1942. Т. 12. С. 181.
   Smorodinsky Ya. A. Bremsstrahlung of Particles with Spin One // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1942. V. 12. P. 181.

4. *Гинзбург В. Л., Смородинский Я. А.* О волновых уравнениях частиц с переменным спином // ЖЭТФ. 1943. Т. 13. С. 274.
   Ginzburg V. L., Smorodinsky Ya. A. On Wave Equations for Particles with Variable Spin // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1943. V. 13. P. 274.

5. *Смородинский Я. А.* О комптон эффекте и теории дырок // ЖЭТФ. 1944. Т. 14. С. 21.
   Smorodinsky Ya. A. On Compton Effect and Theory of Holes // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1944. V. 14. P. 21.

6. *Ландау Л. Д., Смородинский Я. А.* Рассеяние протонов протонами // ЖЭТФ. 1944. Т. 14. С. 269.
   Landau L. D., Smorodinsky Ya. A. Scattering of Protons by Protons // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1944. V. 14. P. 269.

7. *Смородинский Я. А.* К теории рассеяния нейтронов протонами // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. С. 89.
   Smorodinsky Ya. A. On the Theory of Neutron Scattering by Protons // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1945. V. 15. P. 89.

8. *Смородинский Я. А.* К теории рассеяния нейтронов протонами // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 941.
   Smorodinsky Ya. A. On the Theory of Neutron Scattering by Protons // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1947. V. 17. P. 941.

9. *Смородинский Я. А.* О формуле для изотопического смещения // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 1034.
   Smorodinsky Ya. A. On the Formula for the Isotopic Shift // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1947. V. 17. P. 1034.

10. *Смородинский Я. А.* Нормировка волновой функции дейтрона // ДАН. 1948. Т. 60. С. 217.
    Smorodinsky Ya. A. Normalization of the Deuteron Wave Function // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1948. V. 60. P. 217.

11. *Смородинский Я. А.* Смещение термов водородоподобных атомов и аномальный магнитный момент электрона // УФН. 1949. Т. 39. С. 325.
Smorodinsky Ya. A. Shift of Terms of Hydrogen-like Atoms and Anomalous Magnetic Moment of Electron // Usp. Fiz. Nauk. 1949. V. 39. P. 325.

12. *Мигдал А. Б., Смородинский Я. А.* Искусственные мезоны // УФН. 1950. Т. 41. С. 133.
Migdal A. B., Smorodinsky Ya. A. Artificial Mesons // Usp. Fiz. Nauk. 1950. V. 41. P. 133.

13. *Смородинский Я. А.* Поляризация при рассеянии протонов протонами // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 123.
Smorodinsky Ya. A. Polarization in Scattering of Protons by Protons // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1954. V. 27. P. 123.

14. *Базь А. И., Смородинский Я. А.* Взаимодействие протонов с ^{3}H и возбужденные состояния α-частиц // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 382.
Baz A. I., Smorodinsky Ya. A. Interaction of protons with ^{3}H and Excited States of α Particles // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1954. V. 27. P. 382.

15. *Зельдович Я. Б., Лукьянов С. Ю., Смородинский Я. А.* Свойства нейтрино и двойной β распад // УФН. 1954. Т. 54. С. 361.
Zeldovich Ya. B., Lukyanov S. Yu., Smorodinsky Ya. A. Properties of Neutrino and Double β Decay // Usp. Fiz. Nauk. 1954. V. 54. P. 361.

16. *Базь А. И., Смородинский Я. А.* Изотопический спин легких ядер // УФН. 1955. Т. 55. С. 215.
Baz A. I., Smorodinsky Ya. A. Isotopic Spin of Light Nuclei // Usp. Fiz. Nauk. 1955. V. 55. P. 215.

17. *Смородинский Я. А.* β распад легких ядер // УФН. 1955. Т. 56. С. 201.
Smorodinsky Ya. A. β Decay of Light Nuclei // Usp. Fiz. Nauk. 1955. V. 56. P. 201.

18. *Смородинский Я. А.* Размеры нуклонов // УФН. 1955. Т. 56. С. 425–428.
Smorodinsky Ya. A. Dimensions of Nucleons // Usp. Fiz. Nauk. 1955. V. 56. P. 425–428.

19. *Владимирский В. В., Смородинский Я. А.* Корреляция поляризаций при рассеянии нуклонов // ДАН. 1955. Т. 104. С. 713.
Vladimirsky V. V., Smorodinsky Ya. A. Correlation of Polarizations in Scattering of Nucleons // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1955. V. 104. P. 713.

20. *Пузиков Л. Д., Смородинский Я. А.* Корреляция плоскостей распада пар и спин θ^0 мезона // ДАН. 1955. Т. 104. С. 843.
Puzikov L. D., Smorodinsky Ya. A. Correlation of Pair Decay Planes and Spin of θ^0 Meson // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1955. V. 104. P. 843.

21. *Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* Тождественные преобразования сечений неполяризованных частиц // ДАН. 1955. Т. 103. С. 69.
Ryndin R. M., Smorodinsky Ya. A. Identical Transformations of Cross Sections of Nonpolarized Particles // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1955. V. 103. P. 69.

22. *Максимов Л., Смородинский Я. А.* К истории двойного β распада // Изв. АН СССР, сер.: физ. 1955. Т. 19. С. 365.
Maksimov L., Smorodinsky Ya. A. On the History of Double β Decay // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Fiz. 1955. V. 19. P. 365.

23. *Голубенков В. Н., Смородинский Я. А.* Функция Лагранжа для системы одинаковых заряженных частиц // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 330.
Golubenkov V. N., Smorodinsky Ya. A. Lagrange Function for a System of Identical Charged Particles // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1956. V. 31. P. 330.

24. *Смородинский Я. А.* Вопросы физики частиц высоких энергий на симпозиуме Европейского Центра ядерных исследований (CERN) в Женеве. (Впечатления советского делегата) // Атомная Энергия. 1956. Т. 5. С. 140–142.
Smorodinsky Ya. A. Problems of High-Energy Particle Physics at CERN Symposium in Geneve. (Impressions of the Soviet Participant) // Atomnaya Energia. V. 5. P. 140–142.

25. *Смородинский Я. А., Тамм И. Е.* Работы Я. И. Френкеля по теории электронов и атомных ядер // Я. И. Френкель. Собрание избранных трудов. М.: Изд. АН СССР, 1956–1959. Т. 2. С. 455.
Smorodinsky Ya. A., Tamm I. E. Papers of Ya. I. Frenkel on the Theory of Electrons and Atomic Nuclei // Ya. I. Frenkel. Sobranie izbrannykh trudov. Moscow, Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1956–1959. V. 2. P. 455.

26. *Пузиков Л. Д., Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* Восстановление матрицы рассеяния в системе двух нуклонов // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 592.
Puzikov L., Ryndin R., Smorodinsky Ya. Reconstruction of the Scattering Matrix of a Two-Nucleon System // Soviet Physics JETP. 1957. V. 5. P. 459.

27. *Puzikov L., Ryndin R., Smorodinsky Ya.* Construction of the Scattering Matrix of a Two-Nucleon System // Nuclear Physics. 1957. V. 3. P. 436.

28. *Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* Преобразования Минами для рассеяния нуклонов нуклонами // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1200.
Ryndin R., Smorodinsky Ya. Minami Transformation for Nucleon-Nucleon Scattering // Soviet Physics JETP. 1957. V. 5. P. 976.

29. *Рындин Р. М., Смородинский Я. А.* О соотношениях унитарности для упругих столкновений частиц с произвольными спинами // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1584.
Ryndin R., Smorodinsky Ya. Unitarity Relationships for Elastic Collisions of Particles with Arbitrary Spins // Soviet Physics JETP. V. 5. P. 1294.

30. *Смородинский Я. А.* Аналитичность нерелятивистской амплитуды рассеяния и потенциал // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 1333.
Smorodinsky Ya. Analiticity of the Nonrelativistic Scattering Amplitude and the Potential // Soviet Physics JETP. 1958. V. 7. P. 920.

31. *Смородинский Я. А.* Конференция югославских физиков // Атомная Энергия. 1958. Т. 4. С. 102.
Smorodinsky Ya. A. Conference of Jugoslav Physicists // Atomnaya Energiya. 1958. V. 4. P. 102.

32. *Каган Ю. М., Смородинский Я. А.* Об анизотропии четного фотомагнитного эффекта // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 1346.
Kagan Yu. M., Smorodinsky Ya. A. Anisotropy of the Even Photomagnetic Effect // Soviet Physics JETP. 1958. V. 7. P. 929.

33. *Пузиков Л. Д., Смородинский Я. А.* Тензоры поляризации в борновском приближении // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1585.
Puzikov L. D., Smorodinsky Ya. A. Polarization Tensors in the Born Approximation // Soviet Physics JETP. 1959. V. 9. P. 1126L.

34. *Смородинский Я. А.* Полный опыт в β-распаде // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1606.
Smorodinsky Ya. A. The Complete Experiment in Beta-Decay // Soviet Physics JETP. 1959. V. 9. P. 1142.

35. *Гольданский В. И., Смородинский Я. А.* Особенности S матрицы и ρ_0 мезон // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1950.
Goldansky V. I., Smorodinsky Ya. A. Singularities of the S Matrix and the ρ_0 Meson // Soviet Physics JETP. 1959. V. 9. P. 1387L.

36. *Биленький С. М., Рындин Р. М., Смородинский Я. А., Хэ Цзо-сю.* К теории β-распада нейтрона // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1758; поправка: Там же. 1960. Т. 38. С. 1013.
Bilenky S. M., Ryndin R. M., *Smorodinsky Ya. A., Ho Tso-Hsiu.* On the Theory of Neutron β Decay // Soviet Physics JETP. 1960. V. 10. P. 1241; correction: Ibid. 1960. V. 11. P. 729L.

37. *Смородинский Я. А.* Современное состояние теории β-распада // УФН. 1959. Т. 67. С. 43.
Smorodinsky Ya. A. The Present State of the Theory of β Decay // Soviet Physics Uspekhi. 1960. V. 2. P. 1; Fortschr. Phys. 1960. Bd. 8. H. 7/8. S. 426–491.

38. *Смородинский Я. А.* β распад и слабые взаимодействия // УФН. 1959. Т. 68. С. 653.
Smorodinsky Ya. A. β Decay and the Weak Interactions // Soviet Physics Uspekhi. 1960. V. 2. P. 557.

39. *Лебедев Д. Р., Смородинский Я. А., Тяпкин А. А.* Физика элементарных частиц. (О IX Междунар. конф. по физике высоких энергий, г. Киев, июль 1959) // УФН. 1960. Т. 70. С. 361–374.
Lebedev D. R., Smorodinsky Ya. A., Tyapkin A. A. Elementary Particle Physics. (The 9th International Conference on High Energy Physics, Kiev, July 1959) // Usp. Fiz. Nauk. 1960. V. 70. P. 361–374.

40. *Смородинский Я. А., Хэ Цзо-сю.* О радиационных поправках в процессах слабого взаимодействия // ЖЭТФ. 1960. Т. 38. С. 1007.
Smorodinsky Ya. A., Tso-Hsiu. On the Radiative Corrections in Weak-Interaction processes // Soviet Physics JETP. 1960. V. 11. P. 724L.

41. *Гельфанд И. М., Грашин А. Ф., Иванова Л. Н., Померанчук И. Я., Смородинский Я. А.* Фазовый анализ pp рассеяния при 95, 150 и 310 МэВ. Препринт ОИЯИ ЛТФ Д-598. 1960.
Gelfand I. M., Grashin A. F., Ivanova L. N., Pomeranchuk I. Ya., Smorodinsky Ya. A. Phase-Shift Analysis of pp Scattering at 95, 150 and 310 MeV. Preprint JINR LTP D–598, 1960.

42. *Бадалян А. М., Смородинский Я. А.* Соотношение Вейцзекера—Вильямса для матричных элементов // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 1231.
Badalyan A. M., Smorodinsky Ya. A. The Weizsäcker-Williams Relation for Matrix Elements // Soviet Physics JETP. 1961. V. 13. P. 865L.

43. *Понтекорво Б., Смородинский Я. А.* Нейтрино и плотность материи во Вселенной // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 239.
Pontecorvo B., Smorodinsky Ya. A. The Neutrino and the Density of Matter in the Universe // Soviet Physics JETP. 1962. V. 14. P. 173.

44. *Смородинский Я. А., Ху Ши-Кэ.* Радиационные поправки в распадах π-мезонов // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С, 612.
Smorodinsky Ya. A., Hu Shih-k'e. Radiative Corrections in Pion Decays // Soviet Physics JETP. 1962. V. 14. P. 438.

45. *Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А.* О верхнем пределе плотности нейтрино, гравитонов и барионов во Вселенной // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 907.
Zeldovich Ya. B., Smorodinsky Ya. A. On the Upper Limit on the Density of Neutrinos, Gravitons, and Baryons in the Universe // Soviet Physics JETP. 1962. V. 14. P. 647.

46. *Смородинский Я. А.* Геометрия Вселенной // Эйнштейн и развитие физико-математической мысли: Сб. М.: Наука, 1962. С. 94.
Smorodinsky Ya. A. The Geometry of the Universe // Einstein i razvitie fiziko-matematicheskoi mysli. Moscow: Nauka, 1962. P. 94.

47. *Любошиц В. Л., Смородинский Я. А.* Ковариантное разложение электромагнитного поля // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. С. 846.
Lyuboshits V. L., Smorodinsky Ya. A. Covariant Expansion of the Electromagnetic Field // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1962. V. 42. P. 846.

48. *Базь А. И., Пузиков Л. Д., Смородинский Я. А.* Восстановление матрицы рассеяния вблизи порога // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. С. 1249.
Baz A., Puzikov L., Smorodinsky Ya. A. Reconstruction of the Scattering Matrix Near Threshold // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1962. V. 42. P. 1249.

49. *Клепиков Н. П., Смородинский Я. А.* Инверсия спиральностей в ядерных реакциях // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 2173.
Klepikov N. P., Smorodinsky Ya. A. Spirality Inversion in Nuclear Reactions // Soviet Physics JETP. 1963. V. 16. P. 1536.

50. *Смородинский Я. А.* Параллельный перенос спина в пространстве Лобачевского // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 2217.
Smorodinsky Ya. A. Parallel Transfer of Spin in Lobachevskii Space // Soviet Physics JETP. 1963. V. 16. P. 1566.

51. *Нгуен Ван Хьеу, Смородинский Я. А.* О радиационных поправках в распаде β нейтрона // ЖЭТФ. 1962. Т. 44. С. 1628.
Nguen Van Hieu, Smorodinsky Ya. A. Radiative Corrections in Decay of β Neutron // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1962. V. 44. P. 1628.

52. *Смородинский Я. А.* Эффект Мессбауэра в теории относительности // УФН. 1963. Т. 79. С. 589.
Smorodinsky Ya. A. The Möessbauer Effect and the Theory of Relativity // Soviet Physics Uspekhi. 1963. V. 6. P. 263.

53. *Смородинский Я. А.* Кинематика и геометрия Лобачевского // Атомная Энергия. 1963. Т. 14. С. 110.
Smorodinsky Ya. A. Kinematics and Lobachevsky Geometry // Atomnaya Energiya. 1963. V. 14. P. 110.

54. *Смородинский Я. А.* К теории спиральных амплитуд // ЖЭТФ. 1963. Т. 45. С. 242.
Smorodinsky Ya. A. On the Theory of Helicity Amplitudes // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1963. V. 45. P. 242.

55. *Смородинский Я. А., Франк-Каменецкий Д. А.* Яков Борисович Зельдович. (К пятидесятилетию со дня рождения) // УФН. 1964. Т. 82. С. 567; поправка: Смородинский Я. А., Франк-Каменецкий Д. А. Письмо в редакцию // УФН. 1964. Т. 83. С. 196.
Smorodinsky Ya. A., Frank-Kamenetsky D. A. Yakov Borisovich Zeldovich. (For His 50th Anniversary) // Soviet Physics Uspekhi. 1965. V. 7. P. 332; correction: Smorodinsky Ya. A., Frank-Kamenetsky D. A. A Letter to Uspekhi // Usp. Fiz. Nauk. 1964. V. 83. P. 196.

56. *Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А.* Инвариантные разложения релятивистских амплитуд // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 1793.
Vilenkin N. Ya., Smorodinsky Ya. A. Invariant Expansions of Relativistic Amplitudes // Soviet Physics JETP. 1964. V. 19. P. 1209.

57. *Смородинский Я. А.* Унитарная симметрия элементарных частиц // УФН. 1964. Т. 84. С. 3.
Smorodinsky Ya. A. The Unitary Symmetry of Elementary Particles // Soviet Physics Uspekhi. 1965. V. 7. P. 637.

58. *Винтерниц П., Смородинский Я. А., Углирж М.* К теории четырехмерного момента количества движения // ЯФ. 1965. Т. 1. С. 163.
Winternitz P., Smorodinsky Ya. A., Uhlir M. On Relativistic Angular Momentum Theory // Soviet J. Nucl. Phys. 1965. V. 1. P. 113.

59. *Friš I., Mandrosov V., Smorodinsky Ya. A., Uhlir M., Winternitz P.* On Higher Symmetries in Quantum Mechanics // Phys. Lett. 1965. V. 16. P. 354.

60. *Клепиков Н. П., Смородинский Я. А.* К вопросу об инверсии спиральностей // ЯФ. 1965. Т. 2. С. 392.
Klepikov N. P., Smorodinsky Ya. A. Concerning the Question of Helicity Inversion // Sov. J. Nucl. Phys. V. 2. P. 280.

61. *Нгуен Ван Хьеу, Смородинский Я. А.* Формфакторы и константа взаимодействия для 56-плета группы $SL(6)$ // ЯФ. 1965. Т. 2. С. 543.
Nguen Van Hieu, Smorodinsky Ya. A. Form Factors and Coupling Constants for the 56-plet of the Group $SL(6)$ // Sov. J. Nucl. Phys. 1966. V. 2. P. 389.

62. *Виленкин Н. Я., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Собственные функции оператора Лапласа, реализующие представления групп $U(2)$, $SU(2)$, $SO(3)$, $U(3)$, $SU(3)$ и символический метод // ЯФ. 1965. Т. 2. С. 906.
Vilenkin N. Ya., Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A. Eigenfunctions of the Laplace Operator Providing Representations of the $U(2)$, $SU(2)$, $SO(3)$, $U(3)$, and $SU(3)$ Groups and the Symbolic Method // Sov. J. Nucl. Phys. 1966. V. 2. P. 645.

63. *Kadyshevsky V. G., Muradjan R. M., Smorodinskij Ya. A.* $SU(6)$-Symmetrie in den starken und elektromagnetishen Wechselwirkungen der Elementarteilchen. $SU(6)$ Symmetry in Strong and Electromagnetic Interactions of Elementary Particles // Fortschr. Phys. 1965. V. 13. P. 599.

64. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Интегральные представления релятивистских амплитуд в нефизической области // ЯФ. 1966. Т. 3. С. 383.
Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A. Integral Representations of Relativistic Amplitudes in the Unphysical Region // Sov. J. Nucl. Phys. 1966. V. 3. P. 275.

65. *Зельдович Я. Б. Смородинский Я. А.* Рец. на книгу Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы. М.: Наука, 1965 // УФН. 1966. Т. 88. С. 199.
Zeldovich Ya. B., Smorodinsky Ya. A. Book review — Stanyukovich K. P. Gravitation Field and Elementary Particles. Moscow, Nauka, 1965 // Usp. Fiz. Nauk. 1966. V. 88. P. 199.

66. *Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А.* Ответ на письмо Станюковича К. П. (Станюкович К. П. О возможном излучении элементарных частиц. УФН. 1966. Т. 89. С. 731) // УФН. 1966. Т. 89. С. 734.
Zeldovich Ya. B., Smorodinsky Ya. A. Reply to the letter (Stanyukovich K. P. Possible Radiation of Elementary Particles. Usp. Fiz. Nauk. 1966. V. 89. P. 731) // Usp. Fiz. Nauk. 1966. V. 89. P. 734.

67. *Винтерниц П., Макаров А. А., Матвеев В. А., Нгуен Ван Хьеу, Смородинский Я. А., Ткачев Л. Г., Углирж М.* Алгебра токов и формфакторы // ЯФ. 1966. Т. 3. С. 918.
Winternitz P., Makarov A. A., Matveev V. A., Nguen Van Hieu, Smorodinsky Ya. A., Tkachev L. G., Uhlir M. Current Generated Algebra and Form Factors // Sov. J. Nucl. Phys. 1966. V. 3. P. 672.

68. *Винтерниц П., Смородинский Я. А., Углирж М., Фриш И.* О группах симметрии в классической и квантовой механике // ЯФ. 1966. Т. 4. С. 625.
Winternitz P., Smorodinsky Ya. A., Uhlir M., Friš I. Symmetry Groups in Classical and Quantum Mechanics // Sov. J. Nucl. Phys. 1967. V. 4. P. 444.

69. *Смородинский Я. А., Тугов И. И.* О полных наборах наблюдаемых // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 653.
Smorodinsky Ya. A., Tugov I. I. On Complete Sets of Observables // Soviet Physics JETP. 1966. V. 23. P. 434.

70. *Makarov A. A., Smorodinsky Ya. A., Valiev Kh., Winternitz P.* A Systematic Search for Nonrelativistic Systems with Dynamical Symmetries // Nuovo. Cim. 1967. V. A52. P. 1061.

71. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Интегральные представления релятивистских амплитуд и асимптотические теоремы // ЯФ. 1967. Т. 6. С. 1308.
Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A. Integral Representations for Relativistic Amplitudes and Asymptotic Theorems // Sov. J. Nucl. Phys. 1968. V. 6. P. 949.

72. *Винтерниц П., Лукач И., Смородинский Я. А.* Квантовые числа в малых группах группы Пуанкаре // ЯФ. 1968. Т. 7. С. 192.
Winternitz P., Lukač I., Smorodinsky Ya. A. Quantum Numbers in the Little Groups of the Poincare Group // Sov. J. Nucl. Phys. 1968. V. 7. P. 139.

73. *Либерман М. А., Смородинский Я. А., Шефтель М. Б.* Унитарные представления группы Лоренца и функции со спином // ЯФ. 1968. Т. 7. С. 202.
Liberman M. A., Smorodinsky Ya. A., Sheftel M. B. Unitary Representaions of the Lorentz Group and Functions with Spin // Sov. J. Nucl. Phys. 1968. V. 7. P. 146.

74. *Смородинский Я. А., Сурков Е. Л.* Об интегральных преобразованиях, связанных с уравнением Клейна—Гордона // ЯФ. 1968. Т. 7. С. 454.
Smorodinsky Ya. A., Surkov E. L. On Integral Transformations Related to the Klein-Gordon Equation // Sov. J. Nucl. Phys. 1968. V. 7. P. 287.

75. *Винтерниц П., Смородинский Я. А., Шефтель М. Б.* Пуанкаре- и лоренц-инвариантные разложения релятивистских амплитуд // ЯФ. 1968. Т. 7. С. 1325.
Winternitz P., Smorodinsky Ya. A., Sheftel M. B. Poincare- and Lorentz-Invariant Expansions of Relativistic Amplitudes // Sov. J. Nucl. Phys. 1968. V. 7. P. 785.

76. *Sheftel M. B., Smorodinsky Ya. A., Winternitz P.* Poincare- and Lorentz-Invariant Expansions of Relativistic Amplitudes // Phys. Lett. 1968. V. 26B, P. 241.

77. *Винтерниц П., Смородинский Я. А., Шефтель М. Б.* Двумерные разложения релятивистских амплитуд, траектории Редже и дочерние полюса // ЯФ. 1968. Т. 8. С. 833.
Winternitz P., Smorodinsky Ya. A., Sheftel M. B. Two-Dimensional Expansions of Relativistic Amplitudes, Regge Tragectories and Daughter Poles // Sov. J. Nucl. Phys. 1969. V. 8. P. 485.

78. *Лукач И., Смородинский Я. А.* Орбитирование и резонансные состояния // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 1296.
Lukač I., Smorodinsky Ya. A. Orbiting and Resonance States // Soviet Physics JETP. 1969. V. 28. P. 680.

79. *Смородинский Я. А.* Границы квантовой электродинамики и точность мировых постоянных // УФН. 1968. Т. 94. С. 359.
Smorodinsky Ya. A. Boundaries of Quantum Electrodynamics and Accuracy of World Constants // Usp. Fiz. Nauk. 1968. V. 94. P. 359.

80. *Смородинский Я. А.* К изданию собрания научных трудов А. Эйнштейна. (Письмо в редакцию) // УФН. 1968. Т. 95. С. 560.
Smorodinsky Ya. A. Publication of Collected Scientific Papers of A. Einstein. (A Letter) // Usp. Fiz. Nauk. 1968. V. 95. P. 560.

81. *Danilov Yu. A., Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A.* Study of Analytical Properties of Pentagon Feynman Graph by Homological Method. Dubna, Preprint E2–4717, 1969.

82. *Лукач И., Смородинский Я. А.* Волновые функции асимметричного волчка // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. С. 1342.
Lukač I., Smorodinsky Ya. A. Wave Functions of Asymmetrical Top // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1969. V. 57. P. 1342.

83. *Нири Ю., Смородинский Я. А.* Координаты и наблюдаемые в задаче трех тел в ядерной физике // ЯФ. 1969. Т. 9. С. 882.
Nyiri J., Smorodinsky Ya. A. Coordinates and Observables in the Nuclear Three-Body Problem // Sov. J. Nucl. Phys. 1969. V. 9. P. 515.

84. *Кузнецов Г. И., Либерман М. А., Макаров А. А., Смородинский Я. А.* Спиральность и унитарные представления группы Лоренца // ЯФ. 1969. Т. 10. С. 641.
Kuznetsov G. I., Liberman M. A., Makarov A. A., Smorodinsky Ya. A. Helicity and Unitary Representations of the Lorentz Group // Sov. J. Nucl Phys. 1970. V. 10. P. 370.

85. *Пустовалов В. В., Смородинский Я. А.* Задача трех тел. Полная система ортогональных угловых функций // ЯФ. 1969. Т. 10. С. 1287.
Pustovalov V. V., Smorodinsky Ya. A. Three-Body Problem. Complete System of Orthogonal Angle Functions // Sov. J. Nucl. Phys. 1970. V. 10. P. 729.

86. *Нири Ю., Смородинский Я. А.* Собственные функции в задаче трех тел // ЯФ. 1970. Т. 12. С. 202.
Nyiri J., Smorodinsky Ya. A. Eigenfunctions in the Problem of Three Bodies // Sov. J. Nucl. Phys. 1971. V. 12. P. 109.

87. *Смородинский Я. А., Хусар М.* Представления группы Лоренца и обобщение спиральных состояний // ТМФ. 1970. Т. 4. С. 328.
Smorodinsky Ya. A., Huszar M. Representaions of the Lorentz Group and Generalization of Helicity States // Teor. Mat. Fiz. 1970. V. 4. P. 328.

88. *Смородинский Я. А.* Памяти Макса Борна // Вестник АН СССР. 1970. Т. 3. С. 83.
Smorodinsky Ya. A. To the Memory of Max Born // Vestnik Akad. Nauk SSSR. 1970. V. 3. P. 83.

89. *Либерман М. А., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Двумерные разложения релятивистских амплитуд // ЭЧАЯ. 1971. Т. 2. С. 105.
Liberman M. A., Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A. Two-Dimensional Expansions of Relativistic Amplitudes // Fiz. Elem. Chastits At. Yadra. 1971. V. 2. P. 105.

90. *Смородинский Я. А.* Переписка А. Эйнштейна и А. Зоммерфельда. (Рец.) // УФН. 1971. Т. 104. С. 526.
Smorodinsky Ya. A. Albert Einstein—Arnold Zommerfeldt, Briefwechsel. Schwabe Co. Verlag, Basel—Stuttgart, 1968; Usp. Fiz. Nauk. 1971. V. 104. P. 526.

91. *Смородинский Я. А.* Представления групп в математике и физике. (Рец.) // УФН. 1971. Т. 105. С. 613.
Smorodinsky Ya. A. Book review — *Goldin G. A., Hermann R., Kostant R., Michel L., Moore C. C., O'Raifeartaigh L., Ruhl W., Sharg D. H., Todorov I. T.* Group Representations in Mathematics and Physics. (Battelle Seattle 1969 Rencontres). Ed. V. Bargmann. (Lecture Notes in Physics, V. 6). Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1970 // Usp. Fiz. Nauk. 1971. V. 105. P. 613.

92. *Данилов Ю. А., Смородинский Я. А.* Кеплер и современная физика // Вестник АН СССР. 1971. Т. 11. С. 117.
Danilov Yu. A., Smorodinsky Ya. A. Kepler and Contemporary Physics // Vestnik Akad. Nauk SSSR. 1971. V. 11. P. 117.

93. *Смородинский Я. А., Шепелев Г. И.* Матричные элементы буста в $O(3,1)$ и продолжение к $O(4)$ // ЯФ. 1971. Т. 13. С. 441.
Smorodinsky Ya. A., Shepelev G. I. Boost Matrix Elements in $O(3,1)$ and Continuation to $O(4)$ // Sov. J. Nucl. Phys. 1972. V. 13. P. 248.

94. *Смородинский Я. А.* Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна // Эйнштейновский сборник 1971. М.: Наука, 1972. С. 272.
Smorodinsky Ya. A. Lobachevsky's Geometry and Einstein's Kinematics // Eishteinovsky sbornik. 1971. Moscow: Nauka, 1972. P. 272.

95. *Смородинский Я. А.* Распад мюона и принцип эквивалентности // Письма ЖЭТФ. 1972. Т. 16. С. 499.
Smorodinsky Ya. A. Muon Decay and Equivalence Principle // JETP Letters. 1972. V. 16. P. 356

96. *Смородинский Я. А., Хусар М.* Унитарные представления группы Лоренца // ЭЧАЯ. 1972. Т. 3. С. 223.
Smorodinsky Ya. A., Huszar M. Unitary Representations of the Lorentz Group // Fiz. Elem. Chastits At. Yadra. 1972. V. 3. P. 223.

97. *Смородинский Я. А., Шелепин Л. А.* Коэффициенты Клебша—Гордана с разных сторон // УФН. 1972. Т. 106. С. 1.
Smorodinsky Ya. A., Shelepin L. A. Clebsh—Gordan Coefficients from Different Sides // Soviet Physics Uspekhi. 1973. V. 15. P. 1.

98. *Смородинский Я. А.* Взаимодействие адронов малых энергий. (Рец.) // УФН. 1972. Т. 106. С. 176.
Smorodinsky Ya. A. Book review — Low Energy Hadron Interactions. Invited Papers Presented at the Ruhenstein Meeting, May 1970. Compilation of Coupling Constants and Low Energy Parameters. (Springer Tracts in Modern Physics-Ergebnisse der Exaten Naturwissenschaften. V. 55). Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1970 // Usp. Fiz. Nauk. 1972. V. 106. P. 176.

99. *Угаров В. А., Смородинский Я. А.* Два парадокса специальной теории относительности // УФН. 1972. Т. 107. С. 141.
Ugarov V. A., Smorodinsky Ya. A. Two Paradoxes of the Special Theory of Relativity // Soviet Physics Uspekhi. 1973. V. 15. P. 340.

100. *Болотовский Б. М., Смородинский Я. А.* Книга о Пауле Эренфесте. (Рец.) // УФН. 1972. Т. 107. С. 173.
Bolotovsky B. M., Smorodinsky Ya. A. Book review — V. Ya. Frenkel. Paul Ehrenfest. Moscow: Nauka, 1971 // Usp. Fiz. Nauk. 1972. V. 107. P. 173.

101. *Смородинский Я. А.* Неравновесная релятивистская кинетическая теория. (Рец.) // УФН. 1972. Т. 107. С. 715.
Smorodinsky Ya. A. Book review — *John M. Stewart.* Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory. (Lecture Notes in physics. V. 10). Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1971 // Usp. Fiz. Nauk. 1972. V. 107. P. 715.

102. *Смородинский Я. А.* Шпрингеровские трактаты по современной физике. (Рец.) // УФН. 1972. Т. 108. С. 391.
Smorodinsky Ya. A. Book review — Springer Tracts in Modern Physics. (Ergebnisse der Exacten Naturwissenschaften). Ed. by G. Hohler. V. 58, 59. Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1971 // Usp. Fiz. Nauk. 1972. V. 108. P. 391.

103. *Данилов Ю. А., Смородинский Я. А.* Иоганн Кеплер: От Мистерии до Гармонии // УФН. 1973. Т. 109. С. 175.
Danilov Yu. A., Smorodinsky Ya. A. Johann Kepler: from Misterium to De Harmonice // Usp. Fiz. Nauk. 1973. V. 109. P. 175.

104. *Лукач И., Смородинский Я. А.* Разделение переменных в сферо-конической системе координат и уравнение Шредингера для одного случая нецентральных сил // ТМФ. 1973. Т. 14. С. 170.
Lukač I., Smorodinsky Ya. A. Separation of Variables in Spherical-Conical system of Coordinates and the Shroedinger Equation for one case of Noncentral Forces // Teor. Mat. Fiz. 1973. V. 14. P. 170.

105. *Смородинский Я. А., Эфрос В. Д.* Ортогональные преобразования многомерных угловых гармоник // ЯФ. 1973. Т. 17. С. 210.
Smorodinsky Ya. A., Efros V. D. Orthogonal Transformations of Multidimensional Angular Harmonics // Sov. J. Nucl. Phys. 1973. V. 17. P. 107.

106. *Смородинский Я. А., Шепелев Г. И.* Матричные элементы буста для редукции $O(3,1)$, $O(2,1)$, $O(2)$ // ЯФ. 1973. Т. 18. С. 934.
Smorodinsky Ya. A., Shepelev G. I. Matrix Elements of the Boost for the Reduction $O(3,1)$, $O(2,1)$, $O(2)$ // Sov. J. Nucl. Phys. 1974. V. 18. P. 483.

107. *Смородинский Я. А.* Гамильтонова космология. (Рец.) // УФН. 1973. Т. 111. С. 563.
Smorodinsky Ya. A. Book review — Hamiltonian Cosmology. (Lecture Notes on Physics. V. 13). Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1972 // Usp. Fiz. Nauk. 1973. V. 111. P. 563.

108. *Вердиев И. А., Керимов Г. А., Смородинский Я. А.* Коэффициенты Клебша—Гордана группы $O(2,1)$ // ЯФ. 1974. Т. 20. С. 827.
Verdiev I. A., Kerimov G. A., Smorodinsky Ya. A. Clebsh—Gordan Coefficients of the Group $O(2,1)$ // Sov. J. Nucl. Phys. V. 20. P. 441.

109. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* К теории $3nj$-коэффициентов // ЯФ. 1975. Т. 21. С. 1135.
Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A. On the Theory of $3nj$ coefficients // Sov. J. Nucl. Phys. V. 21. P. 585.

110. *Угаров В. А., Смородинский Я. А.* Два парадокса специальной теории относительности // Эйнштейновский сборник 1972. М.: Наука, 1974. С. 237.

Ugarov V. A., Smorodinsky Ya. A. Two Paradoxes of the Special Theory of Relativity // Einshteinovsky sbornik 1972. Moscow: Nauka, 1974. P. 237.

111. *Лукач И., Смородинский Я. А.* Квантовая теория несимметричного волчка // Современные проблемы оптики и ядерной физики: Сб. Киев: Наукова думка, 1974. С. 186.
Lukač I., Smorodinsky Ya. A. Quantum Theory of Asymmetrical Top // Recent Problems of Optics and Nuclear Physics. Kiev: Naukova Dumka, 1974. P. 186.

112. *Смородинский Я. А.* Релятивистское разложение амплитуд и модель партонов // Письма ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 55.
Smorodinsky Ya. A. Relativistic Expansion of Amplitudes and the Parton Model // JETP Letters. V. 19. P. 34.

113. *Гуревич И. И., Смородинский Я. А.* Научные труды Энрико Ферми. (Рец. на кн.: Ферми Э. Научные труды: В 2 т. / Под общ. ред. Понтекорво Б. М.: Наука, 1972) // УФН. 1974. Т. 114. С. 385.
Gurevich I. I., Smorodinsky Ya. A. Book review — Fermi E. Scientific Papers. Two volumes (in Russian). Ed. by B. Pontecorvo. Moscow, Nauka, 1972 // Uspekhi Fuz. Nauk. 1974. V. 114. P. 385.

114. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Гиперсферические деревья и $3nj$-коэффициенты // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 378.
Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A. Hyperspherical Trees and $3nj$ Coefficients // JETP Letters. 1975. V. 22. P. 179.

115. *Вердиев И. А., Керимов Г. А., Смородинский Я. А.* Коэффициенты Клебша—Гордана группы Лоренца // ЯФ. 1976. Т. 21. С. 1351.
Verdiev I. A., Kerimov G. A., Smorodinsky Ya. A. Clebsh—Gordan Coefficients of the Lorentz Group // Sov. J. Nucl. Phys. V. 21. P. 697.

116. *Смородинский Я. А.* Деревья и задача многих тел // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1976. Т. 19. С. 932.
Smorodinsky Ya. A. Trees and Many-Body Problem // Izvestiya vuzov. Ser. Radiofizika. 1976. V. 19. P. 932.

117. *Смородинский Я. А.* Фундаментальные справочные таблицы. (Рец.) // УФН. 1976. Т. 118. С. 549.
Smorodinsky Ya. A. Book review — *Varshalovich D. A., Moskalev A. N., Khersonsky V. K.* Quantum Theory of Angular Momentum. Irreducible Tensors Technique. Spherical Functions. $3nj Coefficients$. Leningrad: Nauka (Leningrad Division), 1975 (in Russian) // Usp. Fiz. Nauk. 1976. V. 118. P. 549.

118. *Смородинский Я. А.* В кн.: Я. И. Френкель. Воспоминания, письма, документы. Л.: Наука, 1976. С. 218.
Smorodinsky Ya. A. In: Ya. I. Frenkel. Vospominaniya, pisma, dokumenty. Leningrad: Nauka, 1976. P. 218.

119. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Вырожденные T-коэффициенты и их связь с $3j$-символами и D-функцией Вигнера // ЯФ. 1977. Т. 25. С. 447.
Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A. Degenerate T Coefficients and Their Relation to $3j$ Symbols and Wigner D Functions // Sov. J. Nucl. Phys. 1977. V. 25. P. 241.

120. *Смородинский Я. А.* Развитие основных понятий в физике XX века // Современное естествознание и материалистическая диалектика. М.: Наука, 1977. С. 120.

Smorodinsky Ya. A. Development of the Main Concepts in Physics of the 20th Century // Sovremennoe estestvoznanie i materialisticheskaya dialektika. Moscow: Nauka, 1977. P. 120.

121. *Смородинский Я. А.* Паули и квантовая теория // Паули В. Труды по квантовой теории поля: Статьи 1928–1958. (Сер. Классики науки). М.: Наука, 1977. С. 669.
Smorodinsky Ya. A. Pauli and Quantum Theory // Pauli W. Trudy po kvantovoi teorii polya: Stat'i 1928–1958. (Seriya Klassiki nauki). Moscow: Nauka, 1977. P. 669.

122. *Лукач И., Смородинский Я. А.* Об алгебре матриц Гелл-Манна группы $SU(3)$ // ЯФ. 1978. Т. 27. С. 1978.
Lukač I., Smorodinsky Ya. A. On the Algebra of Gell-Mann Matrices for the SU(3) Group // Sov. J. Nucl. Phys. 1978. V. 27. P. 888

123. *Любошиц В. Л., Смородинский Я. А.* Эффект Ааронова—Бома на тороидальном соленоиде // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. С. 40.
Lyuboshitz V. L., Smorodinsky Ya. A. The Aharonov—Bohm Effect in a Toroidal Solenoid // Soviet Physics JETP. 1978. V. 48. P. 19.

124. *Смородинский Я. А.* Коэффициенты Клебша—Гордана, d-функция $SU(2)$ и их симметрия // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. С. 797.
Smorodinsky Ya. A. Clebsh—Gordan Coefficients, the $SU(2)$ d Function and Their Symmetry // Zh. Eksp. Theor. Fiz. 1978. V. 75. P. 797.

125. *Галицкий В. М., Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А., Шапиро И. С.* Памяти Альфреда Ивановича Базя // УФН. 1979. Т. 127. С. 335.
Galitsky V. M., Zeldovich Ya. B., Smorodinsky Ya. A., Shapiro I. S. Alfred Ivanovich Baz. (Obituary) // Soviet Physics Uspekhi. 1979. V. 22. P. 119.

126. *Визгин В. П., Смородинский Я. А.* От принципа эквивалентности к уравнениям тяготения // УФН. 1979. Т. 128. С. 393.
Vizgin V. P., Smorodinsky Ya. A. From the Equivalence Principle to the Equations of Gravitation // Soviet Physics Uspekhi. 1979. V. 22. P. 489.

127. *Смородинский Я. А.* Лекции Д. Тер-Хаара. (Рец.) // УФН. 1979. Т. 129. С. 558.
Smorodinsky Ya. A. Book review — Ter-Haar D. Lectures on Selected Topics in Statistical Mechanics. Pergamon Press, 1977. (International Series in Nature Phylosophy. V. 92) // Uspekhi Fiz. Nauk. 1979. V. 129. P. 558.

128. *Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* Коэффициенты Вейля в методе деревьев. (Задача n тел) // ЯФ. 1979. Т. 29. С. 286.
Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A. Weyl Coefficients in the Method of Trees (The n-Body Problem) // Sov. J. Nucl. Phys. 1979. V. 29. P. 141.

129. *Нири Ю., Смородинский Я. А.* Симметричный базис в задаче трех тел // ЯФ. 1979. Т. 29. С. 833.
Nyiri J., Smorodinsky Ya. A. Symmetrical Basis in the Three-Body Problem // Sov. J. Nucl. Phys. 1979. V. 29. P. 429.

130. *Смородинский Я. А.* Универсальная производящая функция для ККГ // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 596.
Smorodinsky Ya. A. Universal Generating Function for CGC's // Sov. Phys. JETP. 1979. V. 29. P. 543.

131. *Данилов Ю. А., Смородинский Я. А.* Физик читает Кэрролла // Льюис Кэрролл. Приключения Алисы в стране чудес. Сквозь зеркало и что там увидела Алиса, или Алиса в зазеркалье. (Сер. Литературные памятники). М.: Наука, 1979. С. 266.

Danilov Yu. A., Smorodinsky Ya. A. A Physicist is reading Carroll // Lewis Carroll Alice's Adventures in Wonderland. Through the Looking Glass and What Alice Found There. (Ser. Literaturnye pamyatniki). Moscow: Nauka, 1979. P. 266. (In Russian).

132. *Смородинский Я. А.* Масса // Физика микромира: Маленькая энциклопедия. М.: Сов. Энциклопедия, 1980. С. 244.
Smorodinsky Ya. A. The Mass // Fizika mikromira: Malenkaya entsiklopediya. Moscow, Publishing House Soviet Entsiklopediya, 1980. P. 244.

133. *Волькенштейн М. В., Подгорецкий М. И., Омельяновский М. Э., Смородинский Я. А.* Об аксиоматической структуре физических теорий // Физическая теория: Сб. М.: Наука, 1980. С. 53.
Volkenshtein M. V., Podgoretsky M. I., Omelyanovsky M. E., Smorodinsky Ya. A. On Axiomatic Structure of Physical Theories // Fizicheskaya teoriya. Moscow: Nauka, 1980. P. 53.

134. *Данилов Ю. А., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* О симметрии классических и волновых уравнений // ЯФ. 1980. Т. 32. С. 1587.
Danilov Yu. A., Kuznetsov G. I., Smorodinsky Ya. A. On the Symmetry of Classical and Wave Equations // Sov. J. Nucl. Phys. 1980. V. 32. P. 801.

135. *Pogosyan G. S., Smorodinsky Ya. A., Ter-Antonyan V. M.* Oscillator Wigner Functions // J. Phys. A. Math. Gen., 1981. V. 14. P. 769.

136. *Смородинский Я. А.* Квантовая хромодинамика. (Рец.) // УФН. 1981. Т. 134. С. 178.
Smorodinsky Ya. A. Book review — Quantum Chromodynamics, Proceedings. Jaca, Hyessa, Spain, 1979. Ed. Alonso, Tarrah. Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1980. (Lecture Notes in Physics. V. 118) // Usp. Fiz. Nauk. 1981. V. 134. P. 178.

137. *Смородинский Я. А.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. (Рец. на кн.: Гриб А. А. и др. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. Методы и результаты, не связанные с теорией возмущений) // УФН. 1982. Т. 137. С. 541.
Smorodinsky Ya. A. Book review — *Grib A. A.* Quantum effects in Intense External Fields. (Nonperturbative Methods and Results) // Usp. Fiz. Nauk. 1982. V. 137. P. 541.

138. *Монастырский М., Смородинский Я. А.* Симпозиум Чженя // УФН. 1982. Т. 138. С. 541.
Monastyrsky M., Smorodinsky Ya. A. Book review — The Chern Symposium 1979. Proceedings of the International Symposium on Differential Geometry in Honour of S. S. Chern, held in Berkeley, California, June 1979. Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1981 // Usp. Fiz. Nauk. 1982. V. 138. P. 541.

139. *Смородинский Я. А., Суслов С. К.* Коэффициенты Клебша—Гордана группы $SU(2)$ и полиномы Хана // ЯФ. 1982. Т. 35. С. 192.
Smorodinsky Ya. A., Suslov S. K. The Klebsh—Gordan Coefficients and Hahn Polinomilas // Sov. J. Nucl. Phys. 1982. V. 35. P. 108.

140. *Смородинский Я. А., Суслов С. К.* $6j$-символы и ортогональные полиномы // ЯФ. 1982. Т. 36. С. 1066.
Smorodinsky Ya. A., Suslov S. K. $6j$ Symbols and Orthogonal Polinomials // Sov. J. Nucl. Phys. 1982. V. 36. P. 623.

141. *Погосян Г. С., Смородинский Я. А., Тер-Антонян В. М.* Многомерный изотропный осциллятор: переход от декартового базиса к гиперсферическим. Дубна Препринт Р2–82–118, 1982.

Pogosyan G. S., Smorodinsky Ya. A., Ter-Antonyan V. M. Multi-Dimensional Isotropic Oscillator: Transition from the Carthesian Basis to Hyperspherical Bases. Dubna, Preprint R2–82–118, 1982.

142. *Смородинский Я. А. Дирак П. А. М.* (8.VIII.1902–20.X.1984) // УФН. 1986. Т. 148. С. 527; исправление опечаток: УФН. 1986. Т. 149. С. 357; поправка: УФН. 1986. Т. 150. С. 665.
Smorodinsky Ya. A. Dirac P. A. M. (8 August 1902 – 20 October 1984) // Soviet Physics Uspekhi. 1986. V. 29. P. 281; Errata: Usp. Fiz. Nauk. 1986. V. 149. P. 357; Correction: Ibid. 1986. V. 150. P. 665.

143. *Ораевский В. Н., Семикоз В. Б., Смородинский Я. А.* Поляризационные потери и индуцированный заряд нейтрино в плазме // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 549.
Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A. Polarization Losses and Induced Electric Charge of Neutrinos in Plasma // JETP Letters. 1986. V. 43. P. 709.

144. *Смородинский Я. А.* В кн.: Я. И. Френкель. Воспоминания, письма, документы. Л.: Наука, 1986. С. 218.
Smorodinsky Ya. A. In: Ya. I. Frenkel. Vospominaniya, pisma, dokumenty. Leningrad: Nauka, P. 218.

145. *Боголюбов Н. Н., Джелепов В. П., Дмитриевский В. П., Копелиович Б. З., Понтекорво Б. М., Прокошкин Ю. Д., Смородинский Я. А., Тяпкин А. А.* Памяти Льва Иосифовича Лапидуса // УФН. 1987. Т. 152. С. 349.
Bogolyubov N. N., Dzhelepov V. P., Dmitrievsky V. P., Kopeliovich B. Z., Pontecorvo B. M., Prokoshkin Yu. D., Smorodinsky Ya. A., Tyapkin A. A. Lev Iosifovich Lapidus. (Obituary) // Soviet Physics Uspekhi. 1987. V. 30. P. 546.

146. *Смородинский Я. А.* Несколько эпизодов // УФН. 1987. Т. 153. С. 3.
Smorodinsky Ya. A. Some Episodes // Soviet Physics Uspekhi. 1987. V. 30. P. 823. (Dirac's response to a paper of I. E. Tamm on the Dirac—Kapitsa effect [inverse Compton effect] is discussed. A remark of D. V. Skobeltsyn on Dirac's Recollections of an Exciting Era is given.)

147. *Ораевский В. Н., Плахов А. Ю., Семикоз В. Б., Смородинский Я. А.* Электромагнитная структура и рассеяние нейтрино в изотропной среде // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 1557; поправка: ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 2288.
Oraevsky V. N., Plakhov A. Yu., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A. Electromagnetic Structure and Scattering of Neutrinos in an Isotropic Medium // Soviet Physics JETP. 1987. V. 66. P. 890; Erratum: Ibid., 1989. V. 68. P. 20.

148. *Смородинский Я. А., Романовская Т. Б.* Луи де Бройль (1892–1987) // УФН. 1988. Т. 156. С. 753.
Smorodinsky Ya. A., Romanovskaya T. B. Louis de Broglie (1892–1987) // Soviet Physics Uspekhi. 1988. V. 31. P. 380.

149. *Ораевский В. Н., Семикоз В. Б., Смородинский Я. А.* Электродинамика нейтрино в диспергирующих средах. Труды Всесоюзного семинара «Физика нейтронных звезд». Ленинград, 1988. С. 161.
Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A. Electrodynamics of Neutrino in Dispersive Medium. Proceedings of the Seminar «Physics of Neutron Stars». Leningrad, 1988. P. 161.

150. *Семикоз В. Б., Смородинский Я. А.* Анапольный момент нейтрино в диспергирующей среде // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 48. С. 361.

Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A. The Anapole Moment of Neutrino in a Dispersive Medium // JETP Letters. 1988. V. 48. P. 399.

151. *Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A.* Generation of Mass and Change of the Neutrino Helicity in a Medium in the Presence of Right Currents // Phys. Lett. 1989. V. 227B, P. 255.

152. *Смородинский Я. А.* Три пути к истине и два способа их описания. (Рец.) // УФН. 1989. Т. 158. С. 747; поправка: УФН. 1989. Т. 159. С. 747.
Smorodinsky Ya. A. Three Paths to the Truth and Two Ways of Describing Them. Book review — *Mehra J., Rechenberg H.* The Historical Development of Quantum Theory. New York—Heidelberg—Berlin, Springer-Verlag, 1982–1988. V. 1. Pts. 1, 2; V. 2; V. 3; V. 4; V. 5. Pts. 1, 2 // Soviet Physics Uspekhi. 1989. V. 32. P. 734; Correction: Ibid. 1989. V. 32. P. 1118.

153. *Смородинский Я. А.* Ранняя Вселенная. (Рец.) // УФН. 1989. Т. 159. С. 393.
Smorodinsky Ya. A. Book review — *G. Borner.* The Early Universe. Facts and Fiction. Berlin—Heidelberg—New York—London—Paris—Tokio, Springer-Verlag, 1988. (Physics Texts and Monographs) // Soviet Physics Uspekhi. 1989. V. 32. P. 1118.

154. *Семикоз В. Б., Смородинский Я. А.* Мультипольные электромагнитные моменты нейтрино в диспергирующей среде // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 35.
Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A. Multipole Electromagnetic Moments of a Neutrino in a Dispersive Medium // Soviet Physics JETP. 1989. V. 68. P. 20.

155. *Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A.* Electrodynamics of neutrino in a medium. Proceedings of the International School «Low-Energy Weak Interactions» (LEWI–90), Dubna, September 4–13. 1990. P. 69.

156. *Смородинский Я. А.* Прерванная мысль. (Рец.) // УФН. 1990. Т. 160. С. 393.
Smorodinsky Ya. A. Interrupted Thought. Book review — *Laurikainen K. V.* Beyond the Atom: The Phylosophical Thought of Wolfgang Pauli. (Translation of original Finnish edition). Berlin—Heidelberg—New York—London—Paris—Tokio, Springer-Verlag, 1988 // Soviet Physics Uspekhi. 1990. V. 33. P. 586.

157. *Смородинский Я. А.* Эффект Ааронова—Бома. (Рец.) // УФН. 1990. Т. 160. С. 164.
Smorodinsky Ya. A. Book review — *Peshkin M., Tomonura A.* The Aharonov—Bohm Effect. Berlin—Heidelberg—New York—London—Paris—Tokio—Hong Kong, Springer-Verlag, 1989. (Lecture Notes in Physics. V. 340) // Soviet Physics Uspekhi. 1990. V. 33. P. 589.

158. *Смородинский Я. А.* Физик и инженер // Воспоминания об академике Исааке Константиновиче Кикоине. М.: Наука, 1991. С. 83.
Smorodinsky Ya. A. Physicist and Engineer // Vospominaniya ob akademike Isaake Konstantinoviche Kikoine. Moscow: Nauka, 1991. P. 83.

159. *Смородинский Я. А.* Новое мышление Императора: о компьютерах, мышлении и законах физики. (Рец.) // УФН. 1991. Т. 161. С. 203.
Smorodinsky Ya. A. Book review — *R. Penrose.* The Emperor's New Mind Concerning Computers, Mind, and Laws of Physics. Foreword by Martin Gardner. Oxford—New York—Melbourne, Oxford University Press, 1989 // Soviet Physics Uspekhi. 1991. V. 34. P. 206.

160. *Smorodinsky Ya. A.* New Developments and Applications in Group Theory // Scattering, Reactions, Transitions in Quantum Systems and Symmetry Methods. Obninsk, 1991. P. 10.

161. *Смородинский Я. А.* Наследие Вернера Гейзенберга. (Рец.) // УФН. 1992. Т. 162. С. 141.
Smorodinsky Ya. A. The Legacy of Werner Heisenberg. Book review — *Heisenberg W.* Gesammelte Werke/Collected papers. Ed. by W. Blum, H. P. Durr, H. Rechenberg. Berlin—Heidelberg—New York—London—Paris—Tokio—Hong Kong, Springer-Verlag, 1985–1989. Series A. Parts AI and AII. Original Scientific Papers/ Wissenschaftliche Originalarbeiten. Series B. Scientific review Papers, Talks, Books/Wissenschaftliche Ubersichtsartikel, Wortrage und Bucher // Soviet Physics Uspekhi. 1992. V. 35. P. 50.

162. *Позе Р., Смородинский Я. А.* Фашистская Германия и ядерная энергетика. (Рец.) // УФН. 1992. Т. 162. С. 169.
Pose R., Smorodinsky Ya. A. Nazi Germany and Nuclear Power. Book review — *Walker M.* German Nazi Socialism and Quest for Nuclear Power. 1939–1949. Cambridge, Cambridge University Press, 1989 // Soviet Physics Uspekhi. 1992. V. 35. P. 341.

163. *Смородинский Я. А.* Неопределенность: победы и поражения Вернера Гейзенберга. (Рец.) // УФН. 1992. Т. 162. С. 201.
Smorodinsky Ya. A. Uncertainty: The Triumphs and Defeats of Werner Heisenberg. Book review — Cassidy D. S. Uncertainty: The Life and Science of Werner Heisenberg. New York, W. H. Freeman and Co., 1991 // Soviet Physics Uspekhi. 1992. V. 35. P. 999.

164. *Kryuchkov S. I., Ya. Smorodinsky A.* On Sum Rules in Representation Theory // Symmetry Methods in Physics. Obninsk, 1992. P. 8.

165. *Смородинский Я. А., Шелепин А. А., Шелепин Л. А.* Групповые и вероятностные основы квантовой теории // УФН. 1992. Т. 162. С. 1.
Smorodinsky Ya. A., Shelepin A. A., Shelepin L. A. Groups and Probabilities at the Foundations of Quantum Mechanics // Soviet Physics Uspekhi. 1992. V. 35. P. 1005.

166. *Smorodinsky Ya. A.* Heisenberg und Dirac: Die Bedeutung des Schonen in der Naturwissenschaft; Werner Heisenberg: Physiker und Philosoph. Verbandlungen der Konferenz Werner Heisenberg als Physiker und Philosoph in Leipzig, vom 9–12 Dezember 1991 an der Universitat Leipzig. Spectrum Akademischer verlag Heidelberg—Berlin—Oxford, 1992. S. 364–368.

167. *Смородинский Я. А.* Простой вывод закона Кеплера (движение по эллипсу) // Сибирский физический журнал. 1993. Т. 1. С. 1.
Smorodinsky Ya. A. A Simple Derivation of the Kepler Law (Motion along an Ellipse) // Siberian Physical Journal. 1993. V. 1. P. 1.

168. *Смородинский Я. А.* Блегдамсвей 17. Копенгаген, Дания. Институт им. Нильса Бора. (Рец.) // УФН. 1993. Т. 163. № 3. С. 109.
Smorodinsky Ya. A. Blegdamsvej 17. Copenhagen, Denmark. Niels Bohr Institute. Book review — Aaserud F. Redirecting Science: Niels Bohr. Philantropy and the Rise of Nuclear Physics. Cambridge—New York—Port Chester—Melbourne—Sydney // Physics Uspekhi. 1993. V. 36. P. 197.

169. *Ораевский В. Н., Семикоз В. Б., Смородинский Я. А.* Электродинамика нейтрино в среде // ЭЧАЯ. 1994. Т. 25. С. 312.
Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Smorodinsky Ya. A. Electrodynamics of Neutrino in Medium // Sov. J. Part. Nucl. 1995. V. 25. P. 129.

Содержание

Предисловие 5

Начало пути 7

Ю. А. Данилов
Введение 7

Я. А. Смородинский
Комптон-эффект на мезоне 8

Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский
О рассеянии света мезотронами 15

Я. А. Смородинский
Тормозное излучение частиц со спином единица 23

В. Л. Гинзбург, Я. А. Смородинский
О волновых уравнениях для частиц с переменным спином 40

Я. А. Смородинский
О комптон-эффекте и теории дырок 43

Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский
Рассеяние протонов протонами 45

Я. А. Смородинский
К теории рассеяния нейтронов протонами 56

Я. А. Смородинский
К теории рассеяния нейтронов протонами 64

Я. А. Смородинский
О формуле для изотопического смещения 66

Я. А. Смородинский
Нормировка волновой функции дейтрона 69

Нуклон-нуклонные взаимодействия, поляризация, полный эксперимент 71

Р. М. Рындин
О гидротехнической лаборатории, профессоре Смородинском и рассеянии нуклонов нуклонами 71

Я. А. Смородинский
Поляризация при рассеянии протонов протонами 78

А. И. Базь, Я. А. Смородинский
Взаимодействие протонов с H^3 и возбужденные состояния α-частицы 80

Р. М. Рындин, Я. А. Смородинский
Тождественные преобразования сечений неполяризованных частиц 83

В. В. Владимирский, Я. А. Смородинский
Корреляция поляризаций при рассеянии нуклонов 86

Л. Д. Пузиков, Я. А. Смородинский
Корреляция плоскостей распада V^0-пар и спин ϑ^0-мезона 90

L. Puzikov, R. Ryndin, J. Smorodinsky
Construction of the Scattering Matrix of a Two-nucleon System 94

Р. М. Рындин, Я. А. Смородинский
Преобразования Минами для рассеяния нуклонов нуклонами 103

Р. М. Рындин, Я. А. Смородинский
О соотношениях унитарности для упругих столкновений частиц
с произвольными спинами 110

Я. А. Смородинский
Аналитичность нерелятивистской амплитуды рассеяния и потенциал 112

Я. А. Смородинский
«Полный опыт» в β-распаде 114

С. И. Биленький, Р. М. Рындин, Я. А. Смородинский, Хэ Цзо-сю
К теории β-распада нейтрона 116

К статье С. М. Биленького, Р. М. Рындина, Я. А. Смородинского и Хэ Цзо-сю
«К теории β-распада нейтрона» 122

В. Л. Любошиц, Я. А. Смородинский
Ковариантное разложение электромагнитного поля 123

А. И. Базь, Л. Д. Пузиков, Я. А. Смородинский
Восстановление матрицы рассеяния вблизи порога 135

Н. П. Клепиков, Я. А. Смородинский
Инверсия спиральностей в ядерных реакциях 138

Симметрии в физике **144**

Pavel Winternitz
Introduction 144

Я. А. Смородинский
Параллельный перенос спина в пространстве Лобачевского 147

Н. Я. Виленкин, Я. А. Смородинский
Инвариантные разложения релятивистских амплитуд 154

П. Винтерниц, Я. А. Смородинский, М. Углирж
К теории четырехмерного момента количества движения 169

Н. Я. Виленкин, Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский
Собственные функции оператора Лапласа, реализующие представления
групп $U(2)$, $SU(2)$, $SO(3)$, $U(3)$, $SU(3)$ и символический метод 179

П. Винтерниц, Я. А. Смородинский, М. Углирж, И. Фриш
О группах симметрии в классической и квантовой механике 191

Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский
Интегральные представления релятивистских амплитуд
в нефизической области 202

Я. А. Смородинский, И. И. Тугов
О полных наборах наблюдаемых 216

A. A. Makarov, J. A. Smobodinsky, Kh. Valiev and P. Winternitz
A Systematic Search for Nonrelativistic Systems with Dynamical Symmetries.
PART I: The Integrals of Motion 222

Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский
Интегральные представления релятивистских амплитуд и асимптотические
теоремы 239

М. А. Либерман, Я. А. Смородинский, М. Б. Шефтель
Унитарные представления группы Лоренца и функции со спином 244

П. Винтерниту, Я. А. Смородинский, М. Б. Шефтель
Пуанкаре- и лоренц-инвариантные разложения релятивистских амплитуд . . . 257

Я. А. Смородинский, Е. Л. Сурков
Об интегральных преобразованиях,
связанных с уравнением Клейна—Гордона 271

П. Винтерниту, Я. А. Смородинский, М. Б. Шефтель
Двумерные разложения релятивистских амплитуд,
траектории Редже и дочерние полюса 277

И. Лукач, Я. А. Смородинский
Орбитирование и резонансные состояния 292

Г. И. Кузнецов, М. А. Либерман, А. А. Макаров, Я. А. Смородинский
Спиральность и унитарные представления группы Лоренца 300

И. Лукач, Я. А. Смородинский
Волновые функции асимметричного волчка 312

Я. А. Смородинский
Деревья и задача многих тел 319

В. Л. Любошиц, Я. А. Смородинский
Эффект Ааронова—Бома на тороидальном соленоиде 329

Я. А. Смородинский
Коэффициенты Клебша—Гордана, d-функция $SU(2)$ и их симметрия 335

Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский
Коэффициенты Вейля в методе деревьев (задача n тел) 340

Я. А. Смородинский
Универсальная производящая функции для ККГ 342

G. S. Pogosyan, Ya. A. Smorodinsky, V. M. Ter-Antonyan
Oscillator Wigner functions 345

Я. А. Смородинский, С. К. Суслов
Коэффициенты Клебша—Гордана группы $SU(2)$ и полиномы Хана 352

Я. А. Смородинский, С. К. Суслов
$6j$-символы и ортогональные полиномы 363

Г. С. Погосян, Я. А. Смородинский, В. Н. Тер-Антонян
Многомерный изотропный осциллятор:
переходы от декартового базиса к гиперсферическим 369

Задача трех тел **378**

V. Efros
Introduction 378

Ю. Нири, Я. А. Смородинский
Координаты и наблюдаемые в задаче трех тел в ядерной физике 380

Ю. Нири, Я. А. Смородинский
Собственные функции в задаче трех тел 393

В. В. Пустовалов, Я. А. Смородинский
Задача трех тел. Полная система ортогональных угловых функций 407

Я. А. Смородинский, В. Д. Эфрос
Ортогональные преобразования многомерных угловых гармоник 416

Ю. Нири, Я. А. Смородинский
Симметричный базис в задаче трех тел 431

Слабые взаимодействия и нейтринная физика **442**

В. Н. Ораевский
Введение 442

Б. М. Понтекорво, Я. А. Смородинский
Нейтрино и плотность материи во Вселенной 444

Я. А. Смородинский, Ху Ши-кэ
Радиационные поправки в распадах π-мезонов 449

Я. Б. Зельдович, Я. А. Смородинский
О верхнем пределе плотности нейтрино, гравитонов и барионов
во Вселенной 453

В. Н. Ораевский, В. Б. Семикоз, Я. А. Смородинский
Поляризационные потери и индуцированный электрический заряд нейтрино
в плазме 458

В. Б. Семикоз, Я. А. Смородинский
Анапольный момент нейтрино в диспергирующей среде 461

Последние работы (Квантовые алгебры) **464**

Ю. Ф. Смирнов
Введение 464

Ya. A. Smorodinsky
New Developments and Applications of Group Theory 466

Работы, посвященные Я. А. Смородинскому 469

А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян
Матрица конечных трансляций в осцилляторном базисе
(этюд памяти Я. А. Смородинского) 469

P. Winternitz
Subalgebras of Lie Algebras and Their Applications in Physics 473

V. D. Efros
Method of Integral Transforms for Solving Few-Body Reaction Problems
in Quantum Mechanics 486

Воспоминания 496

Н. В. Князькая
«Это было необычайно интересное и удивительное время...»:
воспоминания о раннем периоде жизни лаборатории № 2
(Я. А. Смородинский) 496

А. Н. Сисакян
Вспоминая Я. А. Смородинского... 504

В. П. Джелепов
О моем друге Якове Абрамовиче Смородинском 506

М. Каганов
Яков Абрамович — Яша Смородинский — человек,
которого мне будет не хватать 509

Д. А. Киржниц
К портрету Якова Абрамовича Смородинского 513

Б. Захарьев
Уроки Смородинского (Продолжаем учиться) 527

Ю. П. Курлапов, О. И. Мельникова
Рождение «Диалога» 532

П. Нири
О Якове Абрамовиче 535

И. Пронина
«Нам не дано предугадать, как наше слово отзовется...» 537

Ю. А. Данилов
Малая энциклопедия о Я. А., или о Я. А. от А до Я 539

Библиография 542

Статьи Я. А. Смородинского, опубликованные в научно-популярных журналах 542

Книги, вышедшие под редакцией Я. А. Смородинского 544

Список трудов Я. А. Смородинского 546

КЛАССИКИ
науки

Я.А.СМОРОДИНСКИЙ



ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ



Я.А.СМОРОДИНСКИЙ ◆ ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

URSS